Социально-экономические науки

УДК 510.646 +378.147

И. В. Ситникова, М. В. Хохлова

МЕСТО ИНДУКЦИИ И ДЕДУКЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

В статье исследуются возможности применения индукции и дедукции при обучении математике в вузе. Рассматриваются определения данных понятий, виды индукции, область применения индукции и дедукции при обучении математике. Особое внимание уделяется неполной индукции, как эвристическому методу, позволяющему самостоятельно находить решение математических задач. На примере изучения раздела математического анализа «Числовые ряды» показывается, как совместное использование индукции и дедукции способствует не только осознанному усвоению одной из первых тем данного раздела, но и учит студентов рассуждать, выдвигать гипотезы и доказывать их, опираясь на известные математические факты. Предложенная в статье методика обучения решению математических задач, основанная на применении неполной индукции и дедукции, может быть перенесена на решение математических задач при изучении других разделов математики в вузе.

Ключевые слова: полная индукция, неполная индукция, дедукция, методика применения, сходимость числового ряда.

В методической литературе достаточно подробно описана методика применения методов научного познания при обучении математике в школе. Как показывает практика преподавания в университете, для усвоения математических дисциплин необходима довольно серьезная методическая обработка учебного материала. При такой обработке не обойтись без использования методов научного познания, к которым относятся индукция и дедукция, анализ и синтез, сравнение и аналогия, обобщение, абстрагирование, конкретизация и другие. Анализ методической литературы, относящейся к методике обучения в вузе, показывает, что вопрос о возможностях применения методов научного познания при изучении математики в вузе практически не рассматривается. Тем не менее, особенности современного контингента студентов, а именно неподготовленность учащихся к самостоятельному освоению математики приводит к необходимости применения на практических занятиях таких методов, которые помогли бы учащимся усвоить изучаемый материал. К таким методам, несомненно, относятся индукция и дедукция.

Рассмотрим сущность индукции и дедукции, и покажем, как эти методы могут быть реализованы при изучении одного из наиболее сложных для освоения разделов математического анализа «Ряды».

Термин **«индукция»** в методике обучения рассматривается в трёх смыслах:

– один из видов умозаключения, когда вывод об общем делается на основании частных суждений;

– метод научного познания;

– логически организованное изложение материала.

Термин **«дедукция»** рассматривается в тех же смыслах, только это вид умозаключения, в котором из общего делается вывод о частном.

Таким образом, индукция и дедукция – это методы рассуждения, отличающиеся по способу заключения и по характеру заключения. Индукция – наведение, дедукция – выведение.

Выделяют два вида **индукции**: полная и неполная. При полной индукции вывод делается на основе рассмотрения всех частных случаев, при неполной – рассматриваются не все случаи. Поэтому вывод, сделанный в случае использования полной индукции, обязательно верен и её можно применять для доказательства. Неполная индукция не может служить доказательством, т.к. сделанные выводы могут быть ошибочными, но ее можно применять как эвристический метод в следующих случаях:

– для подведения учащихся к самостоятельному открытию математических фактов;

– чтобы убедить учащихся в справедливости утверждения, доказательство которого им недоступно;

– для поиска решения задач.

Пользоваться неполной индукцией надо умело. Необходимо частные примеры при подведении учащихся к самостоятельному открытию математических фактов подбирать так, чтобы приблизить неполную индукцию к полной; разнообразить частные случаи; на первый план выдвигать существенные признаки, а несущественные менять; частные примеры подбирать так, чтобы они не приводили к ложным выводам.

Дедукция – основной метод в обучении математике. Дедуктивное рассуждение – это цепочка умозаключений, построенная на определённых правилах вывода.

Дедукция применяется при решении задач и доказательстве теорем. Доказательство любой теоремы – цепочка дедуктивных заключений. В ней может быть 2 звена, а может быть и 20. Каждое заключение опирается либо на аксиому, либо на определение, либо на доказанную ранее терему [1].

Изучение курса математики в вузе организовано дедуктивно, в виду ограниченности учебного времени. Следовательно, для усвоения материала на практических занятиях необходимо использовать методы, обеспечивающие осознанность применения теоретических сведений, изложенных на лекциях. К таким методам относится индукция, которую на практике можно применять для поиска решения задач.

Рассмотрим, как неполную индукцию можно использовать при поиске решения задач по теме «Числовые ряды».

Пример 1.

Используя определение, исследовать сходимость ряда $\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\frac{133}{1000}+\dots$. Если ряд сходится, найти его сумму $[2]$.

Решение.

По определению ряд сходится, если существует предел частичной суммы ряда (дедуктивный вывод). Найдем частичную сумму ряда, т.е. сумму n - первых его членов. Для этого сначала необходимо получить формулу n-ого члена ряда. Очевидно, что знаменатели членов ряда — это степени числа 10.

Подобрать формулу для числителей сложнее. Здесь поможет индукция: представляем числитель первого члена ряда в виде суммы целых чисел: 1+6; 2+5; 3+4 (перебрали все варианты). Выясняем, можно ли воспользовавшись степенями полученных слагаемых, заменить суммой соответственных чисел числитель второго члена ряда.

Получаем — $1^2+6^2\neq 29$, $2^2+5^2=29$, $3^2+4^2\neq 29$.

Проверяем для третьего члена: $2^3+5^3=133$. Таким образом, закономерность найдена. Формула n-ого члена ряда будет иметь вид

$$a_n=\frac{2^n+5^n}{10^n}.$$

Находим сумму n-первых членов ряда:

$$S_n=\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\frac{133}{1000}+\dots+\frac{2^n+5^n}{10^n}.$$

Чтобы выяснить, имеет ли частичная сумма ряда предел, необходимо преобразовать ее, получив конечное выражение. Встает вопрос как это сделать? Ответить на вопрос опять поможет индукция. Рассмотрим отдельно каждый член ряда. Мы знаем, что числители являются суммой целых чисел, а значит, каждый член ряда можно представить в виде суммы дробей:

$$\frac{7}{10}=\frac{2+5}{10}=\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2},$$

аналогично можно преобразовать второй, третий и наконец n-ый член ряда:

$$\frac{29}{100}=\frac{4+25}{100}=\frac{1}{25}+\frac{1}{4},\ \frac{133}{1000}=\frac{8+125}{1000}=\frac{1}{125}+\frac{1}{8},\quad \frac{2^n+5^n}{10^n}=\left(\frac{1}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{.n}.$$

Далее заменяем дроби полученными суммами и преобразуем выражение, сгруппировав степени с одинаковыми основаниями.

$$S_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{25}+\frac{1}{4}...+\left(\frac{1}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+...+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Суммы, полученные в скобках можно найти, так как это суммы геометрических прогрессий со знаменателем меньшим единицы. Окончательно получаем: S_n=1,25. Делаем вывод: предел частичной суммы ряда равен 1,25, следовательно, по определению ряд сходится и его сумма S=1,25 (дедуктивный вывод).

Пример 2.

Используя определение, исследовать сходимость ряда $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\frac{9}{400}...$ Если ряд сходится, найти его сумму [2].

Решение.

Поступаем как в предыдущем примере. Сначала найдем формулу n-ого члена ряда. Числители дробей – нечетные положительные числа, поэтому формула для числителя $2n+1$. Знаменатели являются квадратами чисел 2, 6, 12, 20 и т.д. Нам надо подобрать формулу, связывающую эти числа с номерами членов ряда. Прием, примененный в предыдущем примере, не подходит, поэтому попробуем другой вариант. Представим каждое из чисел в виде произведения целых чисел. Для числа 2 вариант один: $2=1\cdot 2$, для следующего числа имеем два варианта: далее количество вариантов увеличивается $12=1\cdot 12=2\cdot 6=3\cdot 4$,

$20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$. Сравнивая полученные произведения, выясняем, что с номерами членов ряда можно связать только следующие: $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, $20 = 4 \cdot 5$. В каждом из этих произведений первый множитель совпадает с номером члена ряда, а второй на единицу больше. Тогда формула n-ого члена ряда будет иметь вид $\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$.

Преобразование частичной суммы ряда является в данном примере более сложной задачей. Вариант преобразования будем искать индуктивно, отталкиваясь от формул членов ряда. Рассмотрим первый член ряда, заменив знаменатель дроби произведением, а затем дробь разностью $\frac{3}{4} = \frac{3}{1 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{4}$.

Проверяем, можно ли так же преобразовать следующие члены ряда: $\frac{7}{144} = \frac{7}{9 \cdot 16} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$, $\frac{9}{400} = \frac{9}{16 \cdot 25} = \frac{1}{16} - \frac{1}{25}$.

Как видно, для первых членов ряда имеет место закономерность, остается проверить, будет ли она выполняться для n-ого члена ряда.

Проверяем: $\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. Далее остается преобразовать частичную сумму ряда и найти предел от полученного выражения.

$$S_n = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$$

Делаем вывод: предел частичной суммы ряда равен 1, следовательно, ряд сходится и его сумма S=1.

В рассмотренных примерах показано, как с помощью индукции можно научить студентов находить формулы n-ого члена ряда, а затем подбирать вариант преобразования частичной суммы ряда. Дедукция используется на заключительном этапе решения задач, когда необходимо найти предел частичной суммы и сделать вывод о сходимости ряда.

Индукция в данной статье рассматривается как эвристический метод, позволяющий студентам самостоятельно открывать математические факты, что не только позволяет глубже усвоить материал, но и способствует повышению интереса к изучению математики.

Список литературы

1. Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Саннинский В. Я., Луканин Г.Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. – Москва: Просвещение, 1975. – 462 с.

2. Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Кожухов И.Б., Поспелов А. С., Прокофьев А. А. Сборник задач по математике для втузов / Под общ. Ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – 4-е изд. Перераб. и доп. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 288 с.

СИТНИКОВА Ирина Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: i.sitn@mail.ru

ХОХЛОВА Марина Владиславовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: mv_hohlova@mail.ru