

УДК 674.02

А. И. Агапов

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ ДОСОК В СБЕГОВОЙ ЗОНЕ ПИЛОВОЧНИКА

Рассматривается задача оптимизации получения обрезных досок из сбеговой зоны пиловочника. Целевая функция составлена в виде объема обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны. Уравнение связи составлено с учетом среднего диаметра пиловочника, величины пифагорической зоны, а также сбега бревна. Для решения задачи оптимизации использовался метод множителей Лагранжа. Были получены формулы для определения размеров укороченных досок в зависимости от диаметра, длины и сбега бревна, а также от размера пифагорической зоны. Для определения оптимальных размеров досок использовался численный метод и составлялся алгоритм решения задачи. С уменьшением пифагорической зоны оптимальные относительные размеры досок уменьшаются. С увеличением длины бревна относительные толщина и ширина доски возрастают, а относительная длина досок уменьшается. Алгоритм решения задачи рекомендуется использовать при расчете и составлении поставок.

*Ключевые слова:* пиловочник, пифагорическая зона, сбеговая зона, обрезная доска, целевая функция, уравнение связи.

*Постановка задачи.* При брусово-развальном способе раскря брёвен в теории максимальных поставок принято поперечное сечение бревна подразделять на две зоны: пифагорическую и сбеговую. В пифагорической зоне выпиливаются доски длиной, равной длине бревна, то есть в этой зоне доски только обрезаются по ширине вершинного торца. В сбеговой зоне все получаемые доски укорачиваются на оптимальную длину и обрезаются на оптимальную ширину [3]. В сбеговой зоне одна внутренняя пласть доски формируется пифагорической зоной и представляет собой, как правило, усечённую параболу (рисунок 1). Другая наружная пласть доски в сбеговой

зоне может представить собой усечённую или полную параболу (рисунок 2). Причём усечённая парабола наружной пласти доски получается меньших размеров, чем усечённая парабола внутренней пласти этой доски.

В настоящее время имеются методики для определения оптимальной длины и оптимальной ширины досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника [3,4]. Методики определения оптимальной толщины этой доски в настоящее время не имеется. Задача постановки и решения такой задачи усложняется тем, что этом необходимо еще учитывать не только сбеговую зону, но и пифагорическую зону [2, 3, 5].

Возникает задача определения в сбеговой зоне бревна при первом проходе брусово-развального способа раскря оптимальных размеров досок, как по толщине, так по ширине и длине (рисунок 1).

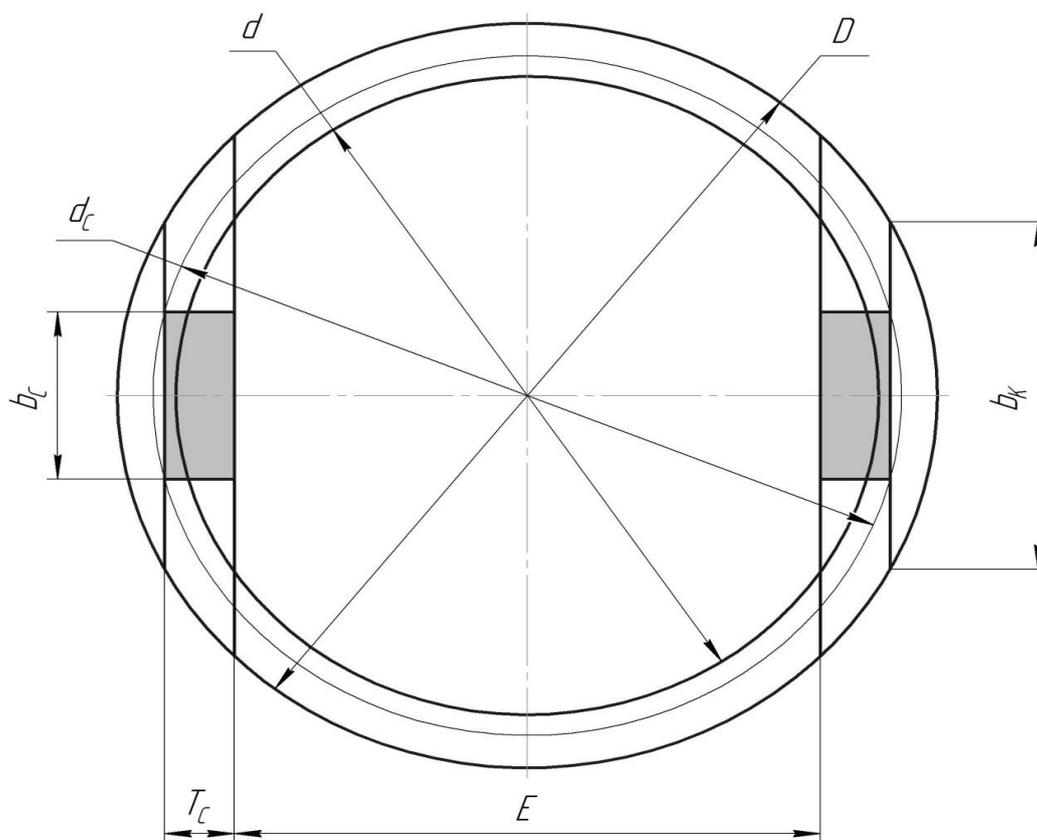


Рис. 1. Схема образования обрезных досок в сбеговой зоне пиловочника  
в поперечном сечении

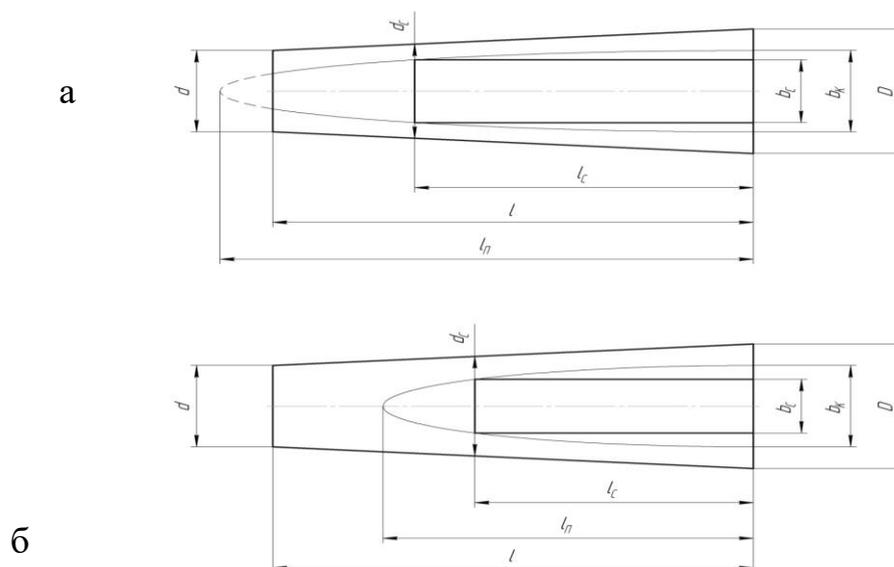


Рис. 2. Виды получаемых наружных пластей досок в сбеговой зоне в продольном сечении бревна:

а – с получением усечённой параболы; б – с получением полной параболы

*Составление математической модели.* Целевую функцию можно представить в виде объёма пилопродукции получаемой, из сбеговой зоны пиловочника [1,6]

$$Z = 2b_c T_c l_c, \quad (1)$$

где  $b_c$  – ширина пласти укороченной доски;

$T_c$  – толщина укороченной доски;

$l_c$  – длина укороченной доски.

Уравнение связи можно составить, используя теорему Пифагора [2]

$$d_c^2 = b_c^2 + (E + 2T_c)^2, \quad (2)$$

где  $d_c$  – диаметр бревна в сбеговой зоне, при котором начинают образовываться доски оптимальных размеров;

$E$  – размер пифагорической зоны.

Уравнение связи представляем в следующем виде

$$d_c^2 - b_c^2 - (E + 2T_c)^2 = 0. \quad (3)$$

Диаметр бревна, при котором начинают образовываться доски оптимальных размеров, можно определить по формуле

$$d_c = d + K_c d(l - l_c). \quad (4)$$

где  $d$  – диаметр бревна в вершинном торце;

$l$  – длина бревна;

$K_c$  – относительный сбеги бревна, отношение абсолютного сбег бревна к его диаметру

$$K_c = C_6 / d, \quad (5)$$

$C_6$  – сбеги бревна.

Подставим в уравнении связи (3) равенство (4), получим

$$d^2(1 + K_c(l - l_c))^2 - b_c^2 - (E + 2T_c)^2 = 0. \quad (6)$$

Полагаем, что математическая модель задачи оптимизации составлена.

*Решение математической модели.* Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа можно записать в следующем виде

$$L = 2b_c T_c l_c + \lambda(d^2 + K_c^2 d^2 l^2 + K_c^2 d^2 l_c^2 + 2K_c d^2 l - 2K_c d^2 l_c - 2K_c^2 d^2 l l_c - b_c^2 - E^2 - 4ET_c - 4T_c^2). \quad (7)$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial b_c} = 2T_c l_c - 2\lambda b_c = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_c} = 2b_c l_c - 4\lambda E - 8\lambda T_c = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial l_c} = 2b_c T_c + 2\lambda K_c^2 d^2 l_c - 2\lambda K_c d^2 - 2\lambda K_c^2 d^2 l = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решаем полученную систему уравнений (8) совместно с уравнением связи. Рассматриваем первое уравнение системы (8) из которого находим

$$\lambda = \frac{T_C l_C}{b_C}. \quad (9)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (8). Подставив в него равенство (9), получим

$$b_C^2 = 2ET_C + 4T_C^2. \quad (10)$$

Подставим в уравнение связи (6) последнее равенство (10), получим

$$(d + K_C d(l - l_C))^2 - E^2 - 6ET_C - 8T_C^2 = 0. \quad (11)$$

Оптимальную длину укороченной доски, выпиливаемой из сбеговой зоны, можно определить используя формулу (11)

$$l_C = \frac{1 + K_C l}{K_C} - \frac{1}{K_C d} \sqrt{8T_C^2 + 6ET_C + E^2}. \quad (12)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (8). Подставим в него равенство (9), получим

$$b_C^2 + K_C^2 d^2 l_C^2 - K_C d^2 l_C - K_C^2 d^2 l l_C = 0. \quad (13)$$

Выразим из полученного уравнения (13) ширину укороченной доски

$$b_C = d \sqrt{K_C l_C [1 + K_C (l - l_C)]}. \quad (14)$$

Толщину укороченной доски можно определить при рассмотрении уравнения (10) и равенства (2). Приравняв их, получим

$$T_C^2 + \frac{3}{4} ET_C - \frac{1}{8} (d_C^2 - E^2) = 0. \quad (15)$$

Решая это квадратное уравнение (15), получим

$$T_C = \frac{1}{8} \left( \sqrt{8d_C^2 + E^2} - 3E \right). \quad (16)$$

Однако в этом уравнении (16) неизвестным является диаметр  $d_C$ , который можно определить по формуле (4). Но в формуле (4), неизвестным является длина укороченной доски  $l_C$ . Поэтому по этим формулам определить

оптимальную толщину укороченной доски  $T_C$  невозможно, не зная оптимальную длину укороченной доски  $l_C$ . Поэтому следует найти другое решение задачи с учетом возможности определения оптимальной толщины укороченной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника.

Так как рассмотрены все уравнения системы (8), а также учтены все уравнения связи, то воспользуемся дополнительным уравнением связи. Выразим диаметр бревна в комлевом торце  $D$  в следующем виде

$$D = d + K_C dl = d(1 + K_C l). \quad (17)$$

Тогда ширина наружной пласти укороченной доски в комлевом торце бревна  $b_K$  определится по формуле

$$b_K^2 = D^2 - (E + 2T_C)^2. \quad (18)$$

Из теории раскря брёвен известно [1], что оптимальная ширина обрезной укороченной доски в сбеговой зоне равна

$$b_C = 0,5777b_K. \quad (19)$$

Тогда

$$b_C^2 = 0,333b_K^2. \quad (20)$$

Отсюда

$$b_K^2 = 3b_C^2. \quad (21)$$

Пользуясь равенством (21), уравнениями (10) и (18) можно написать

$$D^2 - (E + 2T_C)^2 = 3(2ET_C + 4T_C^2). \quad (22)$$

Полученное равенство (22) приводим к следующему виду

$$T_C^2 + \frac{5}{8}ET_C - \frac{1}{16}(D^2 - E^2) = 0. \quad (23)$$

Решив это квадратное уравнение, получим оптимальную толщину выпиливаемой укороченной доски из сбеговой зоны

$$T_C = \frac{1}{16} \left( \sqrt{16D^2 + 9E^2} - 5E \right). \quad (24)$$

На практике обычно пиловочник оценивают по диаметру в вершинном торце бревна. Используя равенство (17) можно записать

$$T_C = \frac{1}{16} \left( \sqrt{16d^2(1 + K_C l)^2 + 9E^2} - 5E \right). \quad (25)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (8), а также учтены все уравнения связи. Получены формулы для определения размеров укороченных досок из сбеговой зоны.

Для установления влияния пифагорической зоны на размеры досок из сбеговой зоны воспользуемся численным методом. Задаёмся длиной бревна, а также сбегом пиловочника и изменяем размер пифагорической зоны в определённом диапазоне. Далее по полученным формулам определяем размеры и объём получаемых досок.

Для удобства расчётов, полученные ранее формулы, представим в относительных единицах. Алгоритм решения задачи представим в следующей последовательности.

Относительная толщина укороченной доски

$$m_{T_C} = \frac{T_C}{d} = \frac{1}{16} \left( \sqrt{16(1 + K_C l)^2 + 9m_E^2} - 5m_E \right). \quad (26)$$

Относительная длина укороченной доски

$$m_{l_C} = \frac{l_C}{l} = \frac{1}{K_C l} \left( 1 + K_C l - \sqrt{8m_{T_C}^2 + 6m_E m_{T_C} + m_E^2} \right). \quad (27)$$

Относительная ширина укороченной доски

$$m_{b_C} = \frac{b_C}{d} = \sqrt{K_C m_{l_C} l [1 + K_C l (1 - m_{l_C})]}. \quad (28)$$

Объём досок получаемых из сбеговой зоны можно определить относительно объёма бревна, который в свою очередь определяется по формуле

$$V_B = \frac{\pi d_{\text{ср}}^2}{4} l = \frac{\pi(d+D)^2}{16} l = \frac{\pi d^2(2+K_C l)^2}{16} l. \quad (29)$$

Тогда объём укороченных досок определится по формуле

$$V_c = \frac{32T_c b_c l_c}{\pi d^2(2+K_C l)^2} l. \quad (30)$$

Заменяем в формуле (30) размеры досок относительными размерами

$$m_V = \frac{32m_{T_c} m_{b_c} m_{l_c}}{\pi(2+K_C l)^2}. \quad (31)$$

*Результаты исследований.* Изменяя длину бревна и размер пифагорической зоны, по полученным выше формулам определяем относительные размеры досок из сбеговой зоны, а затем и относительный объём этих досок. По результатам расчетов построены графики для различных размеров пифагорической зоны (рисунок 3). Расчёты показывают, что с уменьшением величины пифагорической зоны оптимальные размеры досок (толщина, ширина, длина), получаемых из сбеговой зоны бревна, увеличиваются, а также увеличивается их относительный объём.

С увеличением длины бревна относительные оптимальные размеры досок изменяются различно. Толщина и ширина возрастают, а относительная длина уменьшается.

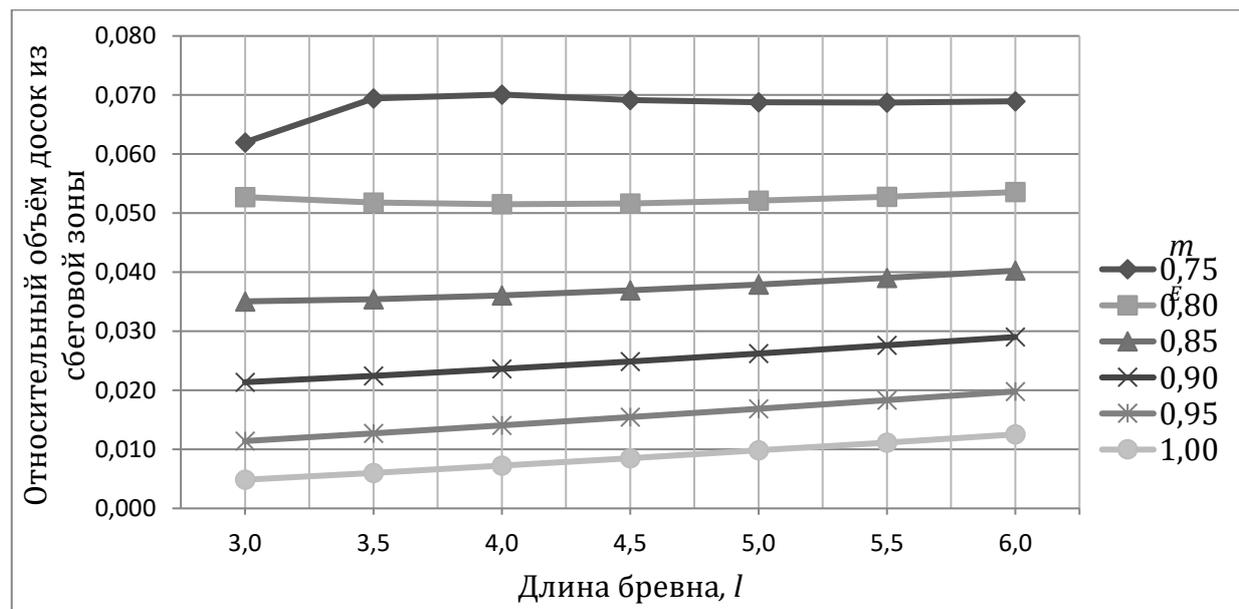


Рис. 3. Влияние длины бревна и размера пифагорической зоны на относительный объём досок получаемых из сбеговой зоны.

Следует обратить внимание, что у коротких брёвен, при малом размере пифагорической зоны, доски из сбеговой зоны получаются такой же длины, как и само бревно. Эта интересная закономерность позволяет сделать вывод о том, что пифагорическая зона должна использоваться максимально и размер её должен быть не меньше определённого размера, в зависимости от длины бревна.

Таким образом поставлена и решена задача определения оптимальных размеров обрезных укороченных досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника.

### Список литературы

1. *Агапов А. И.* Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при раскросе пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых досок // Лесотехнический журнал. Воронеж, ВГЛТА. – 2014. – Т4, № 2. – С. 128–135.
2. *Агапов А. И.* Оптимизация технологических процессов деревообработки : учеб. пособие. – Киров : ВятГУ, 2012. – 81 с.
3. *Агапов А. И.* Влияние и учет сбег бревна при раскросе пиловочника // Актуальные проблемы лесного комплекса : сб. науч. трудов. Вып. 7. – Брянск, 2002. – С. 94–96.
4. *Аксенов П. П.* Теоретические основы раскроса пиловочного сырья. – М. : Лесн. пром-сть, 1976. – 168 с.
5. *Аксенов П. П.* Технология пиломатериалов. – М., 1963. – 579 с.
6. *Калитеевский Р. Е.* Лесопиление в XXI веке. Технология, оборудование, менеджмент. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : Профи КС, 2008. – 496 с.
7. *Пижурич А. А.* Моделирование и оптимизация процессов деревообработки : учеб. – М. : МГУЛ, 2004. – 375 с.
8. *Уласовец В. Г.* Технологические основы производства пиломатериалов. – Екатеринбург : УГЛТУ, 2002. – 510 с.

**АГАПОВ Александр Иванович** – доктор технических наук, профессор кафедры машин и технологии деревообработки, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: [usr00005@vyatsu.ru](mailto:usr00005@vyatsu.ru)