Технические науки

УДК 681.7

И. Л. Кривошеин, Г. Г. Гаврилов

ФИЛЬТР РАСЧЕТА СПЕКТРА ЗАДАННОЙ ГАРМОНИКИ

В статье рассмотрен один из вариантов решения задачи спектральной обработки сигналов в реальном времени. Часто такие методы обработки сигналов, когда каждому входному отсчёту соответствует выходной результат, называют фильтром. Необходимым условием при такой обработке является уменьшение количества арифметических действий, необходимых для вычисления спектральных составляющих сигнала. Такая оптимизация позволяет ускорить получение результата, снизить требования к производительности процессора и минимизировать потребляемую устройством энергию. Поставленная цель достигается путём использования рекуррентных алгоритмов, когда для получения нового значения используются ранее полученные данные. Так для вычисления одного спектрального отсчета на основе N значений сигнала, используя дискретное преобразование Фурье, требуется N комплексных умножений и сложений. А используя модификацию алгоритма Герцеля – всего одно комплексное умножение и два сложения. Статья будет полезна разработчикам встраиваемых приложений.

Ключевые слова: преобразование Фурье, дискретизация, комплексные амплитуды, количество компонент разложения, алгоритм Герцеля, рекуррентное вычисление, рекуррентное соотношение, фильтр, гармоники.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) – это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в MP3, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале. Дискретное преобразование Фурье требует в качестве входа дискретную функцию. Такие функции часто создаются путем дискретизации (выборки значений из непрерывных функций).

Дискретное преобразование. Фурье помогает решать дифференциальные уравнения в частных производных и выполнять такие операции, как свертки.

Обозначения в дискретном преобразовании Фурье:

N – количество значений сигнала, измеренных за период, а также количество компонент разложения.

x_n – измеренные значения сигнала в дискретных временных точках с номерами n = 0…N-1, которые являются входными данными для прямого преобразования и выходными данными для обратного.

X_k – N комплексных амплитуд синусоидальных сигналов с номерами частот k = 0…N-1, слагающих исходный сигнал; являются выходными данными для прямого преобразования и входными для обратного; поскольку амплитуды комплексные, то по ним можно вычислить амплитуду и фазу.

k – индекс частоты. Частота k-го сигнала равна $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{T}}$, где T – период времени, в течение которого брались входные данные.

Дискретное преобразование Фурье раскладывает сигнал на синусоидальные составляющие (гармоники) с частотами от N колебаний за период до одного колебания за период. Поскольку частота дискретизации сама по себе равна N отсчетов за период, то высокочастотные составляющие не могут быть корректно отображены. Это приводит к тому, что вторая половина из N комплексных амплитуд фактически является зеркальным отображением первой и не несет дополнительной информации.

Вычисление одного частотного компонента непосредственно по формуле – определению дискретного преобразования Фурье требует большого числа арифметических вычислений и больших затрат времени. В комплексном случае требуется 4N умножений и 4N сложений, а в действительном случае 2N умножений и 4N сложений. Это значительно больше, чем при расчете по алгоритму Герцеля. Кроме того, для эффективного проведения вычислений по прямой формуле требуется хранить таблицу коэффициентов.

Технические науки

Алгоритм Герцеля – это специальная реализация дискретного преобразования Фурье (ДПФ) в форме рекурсивного фильтра. Данный алгоритм был предложен Джеральдом Герцелем в 1958 году (*Эммануил С. Айфичер, Барри У. Джервис*. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. 992 с.).

В отличие от быстрого преобразования Фурье (БПФ), алгоритм Герцеля позволяет вычислить значение одного частотного компонента.

Процесс рекуррентного вычисления членов последовательности S_n является цифровым БИХ-фильтром второго порядка. Как и любой БИХ-фильтр, он чувствителен к ошибкам, которые возникают в результате квантования и использования арифметических операций со словами конечной длины. Поскольку оба полюса фильтра лежат на единичной окружности, ошибки округления могут привести к неустойчивости фильтра. В связи с этим, алгоритм Герцеля следует применять с осторожностью при больших длинах окон (большие значения N), особенно при использовании арифметики с низкой разрядностью.

Для вычисления одного частотного компонента ДПФ комплексной последовательности отсчетов длины N с помощью алгоритма Герцеля требуется 2N+4 умножений и 4N+4 сложений. Для действительной последовательности требуется N+2 умножений и 2N+1 сложений, не считая затрат на вычисление постоянных коэффициентов. При этом метод не требует хранения каких-либо таблиц коэффициентов, а основной объем арифметических вычислений метода может производиться по мере поступления входных отсчетов x_n.

Как видим, затраты времени при вычислении с помощью алгоритма Герцеля значительно меньше, чем по формуле дискретного преобразования Фурье.

Целью данной работы является оптимизация вычислений и еще большего уменьшения времени расчетов.

Выражение для N точечного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) сигнала $s(n)$, $n = 0 \ldots N-1$ имеет вид:

Технические науки

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)\cdot W_N^{n\cdot k}\,;\; W_N^n=\exp\left(-j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot n\right);\; k=0...N-1. \tag{1}$$

Поворотные коэффициенты $W_N^{n\cdot k}$ обладают следующим свойством:

$$W_N^{-k\cdot N}=\exp\left(j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot N\cdot k\right)=1;\; k=0...N-1. \tag{2}$$

Для расчета значения ДПФ для одного фиксированного спектрального отсчета (одной гармоники) с номером $k=k_0$ выражение ДПФ принимает вид

$$S(k_0)=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)\cdot W_N^{n\cdot k_0}\;. \tag{3}$$

Таким образом для вычисления одного спектрального отсчета требуется N комплексных умножений и сложений.

Обозначим $S_{N-1}(k_0)=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)\cdot W_N^{n\cdot k_0}$ – значение гармоники на предыдущем такте и $S_N(k_0)=\sum_{n=1}^{N}s(n)\cdot W_N^{n\cdot k_0}$ – значение гармоники на текущем такте.

За каждый интервал дискретизации необходимо выполнить N комплексных умножений и сложений, что невозможно в реальном времени при высоких частотах дискретизации. Однако можно заметить, что пересчет всего спектрального отсчета крайне неэффективен, поскольку используются те же самые отсчеты. что и на предыдущем такте, за исключением $s(0)$, который не участвует в расчете $S_N(k_0)$ и $s(N)$, который не участвует в расчете $S_{N-1}(k_0)$. Таким образом, можно предположить, что существует способ рекуррентного пересчета спектрального отсчета на текущем и предыдущих тактах.

Для расчета гармоники на очередном такте можно записать:

$$S_N(k_0)=s(N)\cdot W_N^{(N-1)\cdot k_0}+\sum_{n=1}^{N-1}s(n)\cdot W_N^{(n-1)\cdot k_0}=s(N)\cdot W_N^{(N-1)\cdot k_0}+W_N^{-k_0}\sum_{n=1}^{N-1}s(n)\cdot W_N^{n\cdot k_0}\,. \tag{4}$$

Обратим внимание, что

$$W_N^{(N-1)\cdot k_0} = W_N^{N\cdot k_0} \cdot W_N^{-k_0} = W_N^{-k_0}. \tag{5}$$

Кроме того из выражения (3) можно заметить, что

$$\sum_{n=1}^{N-1} s(n)\cdot W_N^{n\cdot k_0} = S_{N-1}(k_0) - s(0). \tag{6}$$

Тогда окончательно можно записать:

$$S_N(k_0) = s(N)\cdot W_N^{-k_0} + W_N^{-k_0}\cdot\big(S_{N-1}(k_0) - s(0)\big) = W_N^{-k_0}\cdot\big(S_{N-1}(k_0) + s(N) - s(0)\big). \tag{7}$$

Выражение (7) ничто иное, как рекуррентное соотношение, которое связывает значение ДПФ одной гармоники для предыдущего и следующего такта. Пересчет предыдущего такта в следующий требует всего одно комплексное умножение и два комплексных сложения, что можно реализовать в реальном времени. Очень важно, что сложность пересчета спектрального отсчета не зависит от N – всегда одно комплексное умножение и два сложения.

В общем виде для момента времени n рекуррентное соотношение (7) можно записать:

$$S_n(k_0) = W_N^{-k_0}\cdot\big(S_{n-1}(k_0) + s(n) - s(n-N)\big), \tag{8}$$

где $s(n-N)$ – задержанный на N отсчетов входной сигнал $s(n)$ (комплексный или вещественный), в выражении (7) $s(n-N)$ соответствует $s(0)$. Соотношение (7) получается из (8) при $n = N$.

Таким образом, мы получили модификацию алгоритма Герцеля в виде нерекурсивной ветви, которая позволяет вести динамический пересчет спектрального отсчета при поступлении отсчетов сигнала в реальном времени.

Пусть комплексный входной сигнал $s(n)$ равен:

$$s(n) = i(n) + j\cdot q(n). \tag{12}$$

Спектральные отсчеты на выходе фильтра равны:

$$S(k_0) = I_n + j\cdot Q_n. \tag{13}$$

Коэффициент фильтра равен:

$$W_N^{-k_0} = \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k_0 \right) = a + j \cdot b\,;\; a = \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k_0 \right);\; b = \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k_0 \right). \quad (14)$$

Тогда выражение (8) можно записать:

$$I_n + jQ_n = (a + jb) \cdot (I_{n-1} + jQ_{n-1} + i(n) + jq(n) - i(n-N) - jq(n-N)). \quad (15)$$

Преобразовав (15) можно получить:

$$I_n = a \cdot (I_{n-1} + i(n) - i(n-N)) - b \cdot (Q_{n-1} + q(n) - q(n-N));$$
$$Q_n = a \cdot (Q_{n-1} + q(n) - q(n-N)) + b \cdot (I_{n-1} + i(n) - i(n-N)). \quad (16)$$

Тогда расчет спектрального отсчета можно выполнить, используя только вещественные умножения и сложения.

Или, с учетом отсутствия в реальном оцифрованном сигнале мнимой составляющей:

$$I_n = a \cdot (I_{n-1} + i(n) - i(n-N)) - b \cdot Q_{n-1});$$
$$Q_n = a \cdot Q_{n-1} + b \cdot (I_{n-1} + i(n) - i(n-N)). \quad (17)$$

Полученное в работе рекуррентное соотношение позволяет вычислять спектр в реальном времени, т.е. на каждом такте выборки сигнала и без использования комплексных вычислений.

КРИВОШЕИН Игорь Леонидович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры электротехники и электроники, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: usr00778@vyatsu.ru

ГАВРИЛОВ Геннадий Георгиевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры электротехники и электроники, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: usr00079@vyatsu.ru