

УДК 004.932.4

В. А. Лесников, Т. В. Наумович, А. В. Частиков

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНОСТИ В СТРУКТУРНОМ СИНТЕЗЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

В этой статье для реализации рекурсивных цифровых фильтров предлагается использовать структуры, у которых есть много степеней свободы, значительно больше, чем степеней свободы передаточной функции. Такая избыточность позволяет уменьшать длину дробной части коэффициентов фильтра без потери точности реализации передаточной функции. На первом этапе синтезируется передаточная функция цифрового фильтра. При этом принимается во внимание конечная длина слова. Результаты первого этапа окончательные, и на последующих этапах не изменяются. На втором этапе генерируется структура цифрового фильтра. Эта структура обеспечивает неискаженную реализацию нулей и полюсов, вычисленных на предыдущем этапе. Эта работа посвящена рассмотрению вопросов, необходимых для решения проблем первого этапа при проектировании рекурсивных цифровых фильтров второго порядка.

Для реализации рекурсивных цифровых фильтров предлагается использовать структуры, у которых много степеней свободы, значительно больше, чем степеней свободы передаточной функции. Такая избыточность позволяет уменьшать длину дробной части коэффициентов фильтра без потери точности реализации передаточной функции.

Ключевые слова: избыточность, ограниченная разрядность, цифровые фильтры без умножителей.

Известен подход к синтезу цифровых фильтров, уменьшающий разрядность коэффициентов слова из-за переоценки порядка фильтра [1]. Однако такой подход приводит к чрезмерным затратам на аппаратное обеспечение и увеличению шумов округления. В данной работе предложен другой подход, не требующий увеличения порядка фильтра.

Технические науки

Если эффекты конечной длины слова не учитываются, то передаточная функция рекурсивного цифрового фильтра представляет собой отношение полиномов от комплексной переменной z :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}{z^n + \sum_{i=1}^n a_i z^{n-i}}, \quad (1)$$

полностью описывающая все его свойства [2]. В уравнении (1) n – порядок фильтра, a_i и b_i – коэффициенты передаточной функции. Очевидно, что $2n + 1$ параметров достаточно для полного описания любого рекурсивного цифрового фильтра n -го порядка.

Передаточная функция цифрового фильтра может быть реализована при помощи разных вариантов структурных схем [3]. Некоторые структуры описаны в [4]. Различные структурные схемы характеризуются разными уровнями эффектов конечной длины слова. Есть четыре типа эффектов конечной длины слова [5]:

- В результате квантования коэффициентов фильтра происходит смещение полюсов и нулей фильтра в z -плоскости. Фактическая частотная характеристика фильтра искажается.

- Шумы округления результатов арифметических операций.
- Паразитные колебания предельного цикла.
- Шумы квантования входных отсчетов.

Авторы этой работы в публикациях [6, 7] разрабатывают альтернативный подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров. Сущность идеи следующая. На первом этапе синтезируется передаточная функция. При этом принимается во внимание конечная длина слова. Результаты первого этапа окончательные, и на последующих этапах не изменяются. На втором этапе генерируется структура цифрового фильтра. Эта структура обеспечивает неискаженную реализацию нулей и полюсов, вычисленных на предыдущем этапе. Эта

Технические науки

работа посвящена рассмотрению вопросов, необходимых для решения проблем первого этапа при проектировании рекурсивных цифровых фильтров второго порядка.

Количество коэффициентов фильтра, полученных на втором шаге, больше, чем количество коэффициентов передаточной функции. Таким образом, имеется избыточность. В [7] предлагаются методы устранения избыточности для синтеза новых канонических форм фильтров.

В этой работе предлагается сохранить избыточность. Одновременно, увеличение числа коэффициентов обменивается на уменьшение длины слова.

Общая форма описания структуры цифрового фильтра, предложенная в [8], имеет вид

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{x}(z) + \mathbf{F}'_c \mathbf{y}(z) + \mathbf{F}'_d \mathbf{y}(z) z^{-1} \quad , \quad (2)$$

где $\mathbf{y}(z) = [y_1(z) \ y_2(z) \ \dots \ y_N(z)]$ - вектор-столбец значений сигнала в N узлах, $\mathbf{x}(z) = [x_1(z) \ x_2(z) \ \dots \ x_N(z)]$ - вектор-столбец значений входного сигнала в N узлах, \mathbf{F}'_c - матрица коэффициентов передачи между узлами размерностью $N \times N$, \mathbf{F}'_d - матрица коэффициентов передачи между узлами через блоки задержки размерностью $N \times N$, t - символ транспонирования.

Эта статья основана на манипуляции с матрицей

$$\mathbf{F}(z^{-1}) = \mathbf{F}'_c + \mathbf{F}'_d z^{-1} \quad (3)$$

Эту матрицу будем называть топологической матрицей.

Как показано в [7], если структура вычислима, то узлы могут быть перенумерованы таким образом, что все ненулевые элементы матрицы \mathbf{F}'_c будут располагаться ниже главной диагонали.

Предполагается возможность генерации матриц $\mathbf{F}(z^{-1})$. Размерность матрицы фиксирована и равна $N \times N$. Эти матрицы будут соответствовать раз-

Технические науки

личным структурам с N узлами. Все структуры с N узлами будут описываться одной и той же обобщенной матрицей \mathbf{F}'_c .

$$\mathbf{F}'_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_{N1} & c_{N2} & c_{N3} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

и различными матрицами \mathbf{F}'_d . Легко показать, что число коэффициентов сгенерированных структур с N узлами, равно

$$M = \frac{(N-1)N}{2} \quad (5)$$

В соотношении (4) ($M - 2n - 1$) элементов ниже главной диагонали сгенерированной матрицы \mathbf{F}'_c равны нулю.

В этой статье мы будем манипулировать всеми элементами, расположенными ниже главной диагонали сгенерированной матрицы.

После очевидных преобразований уравнения (1), получаем следующее уравнение

$$\mathbf{y}(z) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}(z^{-1}) \right)^{-1} \mathbf{x}(z), \quad (6)$$

где \mathbf{I} единичная матрица размерности $N \times N$. Элементы $h_{ij}(z)$ матрицы

$$\mathbf{H}(z) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}(z^{-1}) \right)^{-1} \quad (7)$$

являются передаточными функциями между узлами i и j . Коэффициенты передаточных функций выражаются в виде суммы произведений соответствующих коэффициентов c_{ij} [9].

Использование избыточности основано на том факте, что длина дробной части произведения равна сумме длин сомножителей дробных частей. Таким образом, коэффициенты передаточной функции с заданной длиной дробной ча-

Технические науки

сти L могут быть получены с использованием структуры с коэффициентами, которые имеют меньшую длину дробной части.

Свойство избыточности можно использовать для синтеза БИХ-фильтров без умножителей. Приведем пример для цифрового фильтра с передаточной функцией:

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{0.25 z^2 + 0.20703125 z + 0.25}{z^2 - 0.83984375 z + 0.984375}. \quad (8)$$

Будем считать, что в результате структурного синтеза выбрана структурная схема, показанная на рис. 1.

Топологическая матрица этой структуры равна

$$\mathbf{F}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

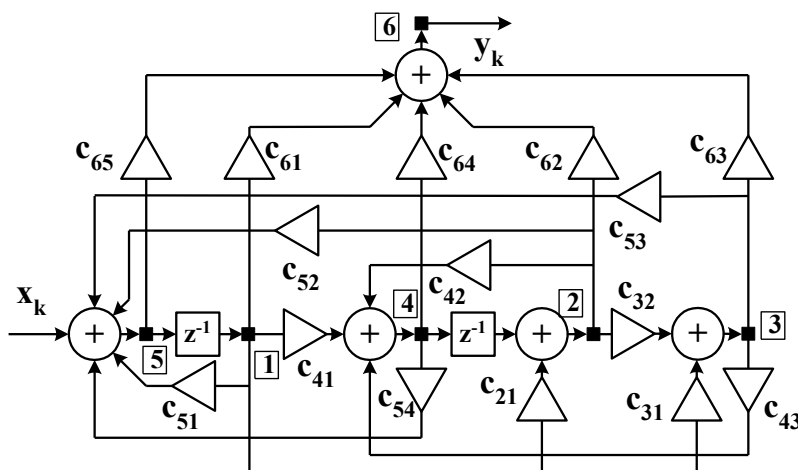


Рис. 1. Структурная схема цифрового фильтра

Коэффициенты передаточной функции (8) выражаются через коэффициенты фильтра следующим образом:

Технические науки

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = c_{21}c_{32}c_{43}c_{54} + c_{21}c_{32}c_{53} + c_{21}c_{42}c_{54} + \\ + c_{31}c_{43}c_{54} + c_{21}c_{52} + c_{31}c_{53} + c_{32}c_{43} + c_{41}c_{54} + c_{42} + c_{51} \\ a_2 = c_{31}c_{43}c_{52} - c_{31}c_{42}c_{53} + c_{32}c_{41}c_{53} - c_{32}c_{43}c_{51} + c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51} \\ b_0 = c_{65} \\ b_1 = c_{21}c_{32}c_{43}c_{64} + c_{21}c_{32}c_{63} + c_{21}c_{42}c_{64} + c_{31}c_{43}c_{64} - \\ - c_{32}c_{43}c_{65} + c_{21}c_{62} + c_{31}c_{63} + c_{41}c_{64} - c_{42}c_{65} + c_{61} \\ b_2 = c_{41}c_{62} - c_{31}c_{42}c_{63} - c_{32}c_{43}c_{61} - c_{42}c_{61} + c_{32}c_{41}c_{63} + c_{31}c_{43}c_{62} \end{array} \right. \quad (10)$$

Решим систему уравнений (10) относительно переменных c_{ij} . Коэффициенты a_i и b_i определены в (8). Решение будем искать на множестве

$$c_{ij} \in \left\{ \begin{array}{l} -0.75_{(10)} = -0.11_{(2)}, -0.50_{(10)} = -0.10_{(2)}, \\ -0.25_{(10)} = -0.01_{(2)}, 0.00_{(10)} = 0.00_{(2)}, \\ 0.25_{(10)} = 0.01_{(2)}, 0.50_{(10)} = 0.10_{(2)}, \\ 0.75_{(10)} = 0.11_{(2)} \end{array} \right. \quad (11)$$

Из большого количества полученных решений выберем следующее:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{21} = c_{42} = c_{54} = c_{62} = c_{65} = 0.25 = 2^{-2} \\ c_{43} = c_{61} = -0.25 = -2^{-2} \\ c_{31} = c_{41} = c_{53} = c_{64} = 0.75 = 1 - 0.25 = 1 - 2^{-2} \\ c_{32} = c_{52} = -0.75 = -1 + 0.25 = -1 + 2^{-2} \\ c_{51} = c_{63} = 0.00 \end{array} \right. \quad (12)$$

По описанному алгоритму, получим структурную схему фильтра без умножителей, представленную на рис. 2.

Технические науки

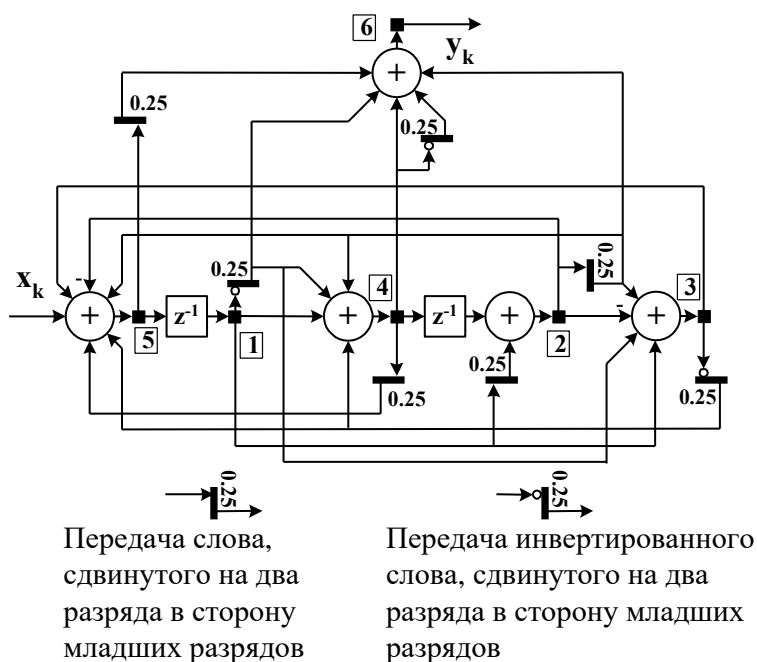


Рис. 2. Схема без умножителей, соответствующая структуре, приведенной на рис. 1

Итак, в данной статье предлагается способ для достижения заданной точности реализации коэффициентов передаточной функции при использовании структур с избыточным числом умножителей. Применение метода показано на примере реализации фильтра без умножителей. Однако, можно синтезировать фильтры и с умножителями с небольшим числом разрядов.

Список литературы

1. *Dehner G. F.* On the design of digital Cauer filters with coefficients of limited word length // Archiv fur Elektronik und Uebertragungstechnik. – 1975. – April, vol. 29. – P. 165–168.
2. *Schlichthärle D.* Digital Filters: Basics and Design. – Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. – 527 p.
3. *Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A.* The Use of Redundancy in the Structural Synthesis of IIR Digital Filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium, (EWDTS 2016), Yerevan, Armenia, 14.10.2016–17.10, 2016. P. 422–424.
4. *Antoniou A.* Digital Signal Processing: Signals, Systems, and Filters. – New York : McGraw Hill Professional, 2005. – 965 p.

Технические науки

5. *Ingle V. K., Proakis J. G.* Digital Signal Processing Using MATLAB: A Problem Solving Companion, 4th edition, Cengage Learning, 2016. – 652 p.

6. *Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S.* A new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTTS'10, September 2010. – P. 282–285.

7. *Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S.* A generation of canonical forms for design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTTS'11, September 2011. – P. 221–224.

8. *Crochiere R. E., Oppenheim A. V.* Analysis of linear digital networks // Proceedings of the IEEE. – 1975. – Vol. 63, № 4. – P. 581–595.

9. *Lesnikov V., Naumovich T.* Explanation of effect of low sensitivity of digital filters with some structures // GSPx-2004, (The Embedded Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, September 27–30, 2004 (paper number: 1270).

ЛЕСНИКОВ Владислав Алексеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: lesnikov@vyatsu.ru

НАУМОВИЧ Татьяна Викторовна – старший преподаватель кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: naumovich@vyatsu.ru

ЧАСТИКОВ Александр Вениаминович – доктор технических наук, профессор кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: chastikov@vyatsu.ru