УДК 519.12

И. А. Пушкарёв, В. А. Бызов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДОНАХЬЮ: ПРИМИТИВНО-ИНДУКТИВНЫЙ ПОДХОД

Преобразование Донахью является примером преобразования, с одной стороны, обратимого (попросту – являющегося перестановкой плоских корневых деревьев или, равносильно – перестановкой любой другой комбинаторной интерпретации чисел Каталана), а с другой стороны – преобразования, орбиты которого, по крайней мере, на первый взгляд, кажутся устроенными крайне сложно. Соответственно, это преобразование можно рассматривать как «комбинаторную модель хаоса» (оксюморон), и в качестве таковой модели оно представляет большой интерес.

С другой стороны, сама по себе хаотичность поведения предполагает отсутствие простого описания и необходимость синтеза разных подходов.

Один из таких подходов реализован в данной работе. Рассматриваемый подход основан на использовании для задания деревьев формул определённого вида, формально тесно связанных с преобразованием Донахью. В работе рассмотрены некоторые свойства этого описания, увязывающие свойства формул со специальными свойствами деревьев, которые могут оказаться полезны в дальнейшей работе по изучению свойств преобразования Донахью.

Ключевые слова: преобразование Донахью, индуктивный подход, плоское дерево, орбита преобразования, триадное представление.

В данной работе будет рассмотрено преобразование Донахью, действующее на множестве плоских деревьев (см. [1, 2 , 3]).

Среди всех подходов к изучению преобразования Донахью наиболее агрессивно-примитивным является примитивно-индуктивный, в основе которого лежит попытка описать орбиту дерева при помощи орбит «чуть более простых» (то есть – получаемых из исходного одним простым упрощением).

Возможности подходов такого типа необходимо протестировать перед тем, как использовать более «наукоёмкие» подходы: странно доказывать нечто при помощи продвинутых концепций, если можно доказать это индуктивно. В этом смысле отрицательный результат (даже типа «почему-то пока не получилось», а не только «доказано, что этими средствами проблему решить невозможно») является не только «тоже результатом», но и результатом желательным, свидетельствующим об отсутствии тривиальности в постановке.

Преобразование Донахью определено на множестве плоских кубических деревьев с висячим корнем (далее – ПКДВК). Одним из способов представления таких деревьев является изображение их в виде наборов связанных друг с другом *триад*. Под триадой дерева понимается вершина вместе с тремя половинками инцидентных ей рёбер. Пример такого представления дерева приведён на рисунке 1.

Триада №1 на данном рисунке слева назвается корневой триадой дерева *T*. Для триад естественным образом определены отношения инцидентности: одна триада может быть левым или правым сыном другой триады (например, у дерева *T* на рисунке 1 триада №5 является левым сыном триады №4, а триада №8 – правым сыном триады №4). Дерево, корневой триадой которого является правый сын корневой триады дерева *T*, назовём правым поддеревом дерева *T*. Аналогичным образом определяется левое поддерево.

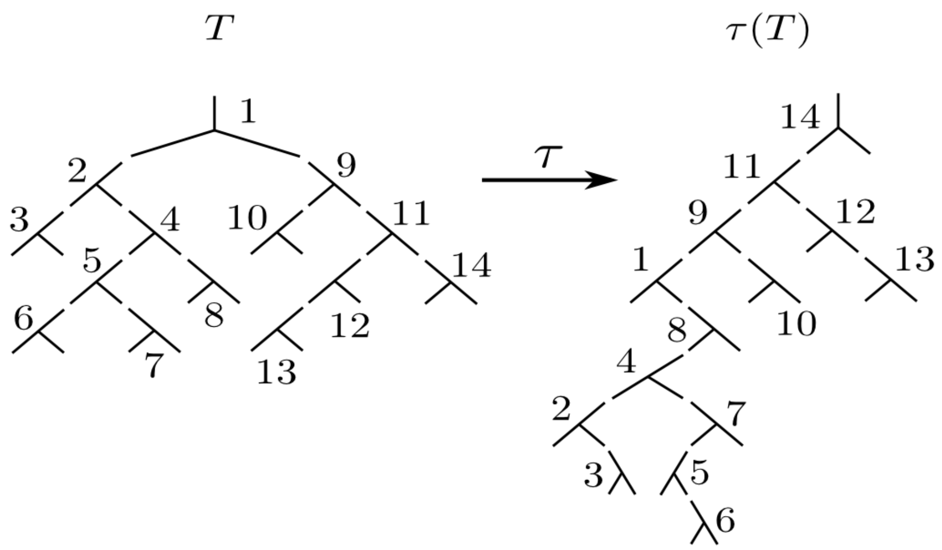

Рис. 1. Преобразование Донахью

Пусть α_1 – корневая триада ПКДВК T, α_2 – правый сын α_1, α_3 – правый сын α_2 и т. д., α_n – правый сын α_{n-1}, и, при этом, α_n не имеет правого сына. Последовательность триад $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ назовем *старшей правой цепью триад*. Предположим, что триада α_i имеет левого сына $\tilde{\alpha}_i$. Дерево с корневой триадой $\tilde{\alpha}_i$ обозначим $T_i = T_i(\alpha_i)$. Если триада α_i не имеет левых сыновей, то дерево T_i будем считать пустым. Полученную ситуацию в целом запишем формулой

$$T = | T_1(\alpha_1), T_2(\alpha_2), \ldots, T_n(\alpha_n) \rangle, \tag{1}$$

которую назовем *правым триадным разложением* дерева T.

Аналогично определяется *старшая левая цепь триад* и *левое триадное разложение* дерева T:

$$T = \langle T_1(\beta_1), T_2(\beta_2), \ldots, T_m(\beta_m) |, \tag{2}$$

где β_1 не имеет левых сыновей, $\beta_m = \alpha_1$ – корневая триада.

Определение 1.

1. База индукции. Если T – дерево, состоящее только из корневой триады то $\tau(T) = T$.

2. Индукционный переход. Пусть T – ПКДВК, и для всех ПКДВК S с меньшим количеством триад их образ $\tau(S)$ уже определен. Далее, пусть $T = | T_1(\alpha_1), T_2(\alpha_2), \ldots, T_n(\alpha_n) \rangle$, – правое разложение дерева T. Тогда образом T назовем дерево $\tau(T)$, левое разложение которого есть $\tau(T) = \langle \tau(T_1)(\alpha_1), \tau(T_2)(\alpha_2), \ldots, \tau(T_n)(\alpha_n) |$.

На рисунке 1 показано, как изменяется ПКДВК при рассматриваемом преобразовании.

Введём преобразования деревьев α, β и θ. Отображение α переводит дерево T в дерево $\alpha(T)$, левое поддерево которого пусто, а правое поддерево совпадает с деревом T. Отображение β действует следующим образом: дерево $\beta(T)$ содержит пустое правое поддерево и левое поддерево, совпадающее с деревом T. При инволюции θ дерево переходит в симметричное. Рисунок 2 иллюстрирует действие отображений α и β.

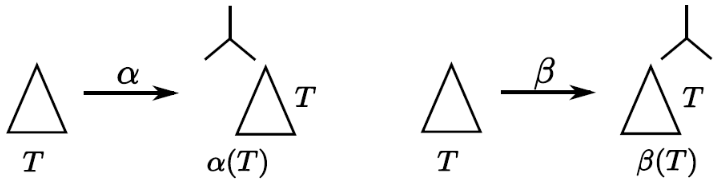

Рис. 2. Отображения α и β

Рассмотрим преобразования α^{-1} и β^{-1}, обратные к преобразованиям α и β. Операция α^{-1} определена на деревьях с пустым левым поддеревом, операция β^{-1} – на деревьях с пустым правым поддеревом. Действие этих преобразований проиллюстрировано на рисунке 3.

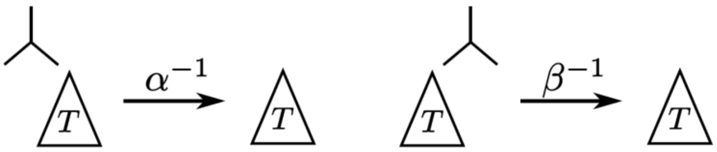

Рис. 3. Отображения α^{-1} и β^{-1}

Заметим, что в орбите любого дерева есть и деревья с пустым левым поддеревом, и деревья с пустым правым поддеревом. Рассмотрим произвольное дерево T, состоящее из $s+1$ триады. Пусть i_s – наименьшее число, такое что дерево $\tau^{i_s}(T)$ имеет пустое левое поддерево (взможно, что $i_s = 0$). Дерево $(\alpha^{-1} \circ \tau^{i_s})(T)$ состоит из s триад. Рассмотрим i_{s-1} – наименьшее число, такое что $(\tau^{i_{s-1}} \circ \alpha^{-1} \circ \tau^{i_s})(T)$ имеет пустое левое поддерево. Перейдем к дереву $(\alpha^{-1} \circ \tau^{i_{s-1}} \circ \alpha^{-1} \circ \tau^{i_s})(T)$, состоящему из $s-1$ триады. Повторяя эти операции, получим дерево T_0, состоящее из одной триады, то есть

$$(\alpha^{-1} \circ \tau^{i_1} \circ \ldots \circ \alpha^{-1} \circ \tau^{i_{s-1}} \circ \alpha^{-1} \circ \tau^{i_s})(T) = T_0. \tag{3}$$

Следовательно,

$$T = \tau^{-i_s} \circ \alpha \circ \tau^{-i_{s-1}} \circ \alpha \circ \ldots \circ \tau^{-i_1} \circ \alpha(T_0). \tag{4}$$

Формулу (4) будем называть *правой формулой* дерева T. Заметим, что правая формула дерева определена однозначно, так как коэффициенты i_l $(l=\overline{1,s})$ были выбраны как наименьшие возможные. Аналогичным образом можно определить *левую формулу* дерева T:

$$T=\tau^{j_s}\circ\beta\circ\tau^{j_{s-1}}\circ\beta\circ\ldots\circ\tau^{j_1}\circ\beta(T_0). \qquad (5)$$

Для того чтобы левая формула была определена однозначно, числа j_l $(l=\overline{1,s})$ тоже выбираются наименьшими.

Для правой формулы (4) будем применять краткую запись

$$T=R(i_1,i_2,\ldots,i_s), \qquad (6)$$

для левой формулы (5) будем применять запись

$$T=L(j_1,j_2,\ldots,j_s). \qquad (7)$$

Сформулируем некоторые свойства деревьев в терминах левых и правых формул.

Теорема 1. Даны два дерева: $T_1=R(i_1,i_2,\ldots,i_s)$ и $T_2=L(j_1,j_2,\ldots,j_s)$. Дерево T_1 симметрично T_2 (то есть $T_1=\theta(T_2)$) тогда и только тогда, когда $i_l=j_l$ для всех $l=\overline{1,s}$.

Доказательство. Пусть коэффициенты $i_l=j_l$ для всех $l=\overline{1,s}$. Доказательство того, что деревья T_1 и T_2 симметричны, проведем индукцией по количеству элементов в формулах. Если $i_1=j_1$, то видно, что $\tau^{-i_1}\circ\alpha(T_0)=\theta(\tau^{j_1}\circ\beta(T_0))$, то есть база индукции выполняется.

Пусть деревья $R(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ и $L(j_1,j_2,\ldots,j_k)$ симметричны. Тогда будут симметричны и деревья $\alpha\circ R(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ и $\beta\circ L(j_1,j_2,\ldots,j_k)$. Из определения преобразования Донахью через левые и правые биекции (см. [2]) следует, что при $i_{k+1}=j_{k+1}$ деревья $\tau^{-i_{k+1}}\circ\alpha\circ R(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ и $\tau^{j_{k+1}}\circ\beta\circ L(j_1,j_2,\ldots,j_k)$ также будут симметричны. То есть $R(i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1})=\theta(L(j_1,j_2,\ldots,j_k,j_{k+1}))$.

Обратно: пусть $T_1 = \theta(T_2)$. Доказательство того, что $i_l = j_l$ для всех $l = \overline{1,s}$, проведем индукцией «с конца». Так как $T_1 = \theta(T_2)$, то наименьшее число i_s, такое что $\tau^{i_s}(T_1)$ имеет пустое левое поддерево равно наименьшему числу j_s, при котором $\tau^{-j_s}(T_2)$ имеет пустое правое поддерево. При этом деревья $(\alpha^{-1} \circ \tau^{i_s})(T_1)$ и $(\beta^{-1} \circ \tau^{-j_s})(T_2)$ оказываются симметричными.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} T_1^k &= \alpha^{-1} \circ \tau^{i_k} \circ \ldots \circ \alpha^{-1} \circ \tau^{i_{s-1}} \circ \alpha^{-1} \circ \tau^{i_s}(T_1), \\ T_2^k &= \beta^{-1} \circ \tau^{-j_k} \circ \ldots \circ \beta^{-1} \circ \tau^{-j_{s-1}} \circ \beta^{-1} \circ \tau^{-j_s}(T_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть доказано, что $i_l = j_l$ для всех $k \le l \le s$, и деревья T_1^k и T_2^k симметричны. Тогда наименьшее число i_{k-1}, при котором $\tau^{i_{k-1}}(T_1^k)$ будет иметь пустое левое поддерево, равно наименьшему j_{k-1}, при котором $\tau^{-j_{k-1}}(T_2^k)$ будет иметь пустое правое поддерево. При этом, деревья $\alpha^{-1} \circ \tau^{i_{k-1}}(T_1^k)$ и $\beta^{-1} \circ \tau^{-j_{k-1}}(T_2^k)$ снова будут симметричны. □

Следующая теорема описывает факт наличия в дереве внутреннего ростка (см. [4]) на языке левых и правых формул.

Теорема 2. Пусть дерево T состоит из $s+1$ триады. Следующие условия равносильны:

1. дерево T не содержит внутренних ростков;
2. в правой формуле $T = R(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ коэффициенты $i_l \ne 0$ при $l = \overline{1, s-1}$;
3. в левой формуле $T = L(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ коэффициенты $j_l \ne 0$ при $l = \overline{1, s-1}$.

Доказательство. Справедливость импликаций $1 \Rightarrow 2$ и $1 \Rightarrow 3$ хорошо видна. Действительно, пусть в правой (левой) формуле дерева встретился коэффициент i_l (j_l) равный нулю (при этом, $l \ne s$). Тогда при формировании этого дерева как минимум две операции α (β) были выполнены друг за другом. Значит дерево T содержит внутренние ростки.

Докажем справедливость импликации $2 \Rightarrow 1$. Предположим, что все коэффициенты правой формулы (кроме, возможно, i_s) отличны от нуля, но, при этом, дерево T содержит внутренние ростки. Вспомним, как строится правая формула: поочередно выполняются преобразования τ^{i_l} (так, чтобы левое поддерево становилось пустым) и α^{-1} до получения дерева T_0. Внутренний росток при преобразованиях Донахью сохраняется, а так как в итоге получается дерево из одной триады, то внутренний росток исчез после операции α^{-1}. Значит после этой операции дерево содержит пустое левое поддерево, и, по крайней мере, один коэффициент в правой формуле равен нулю.

Справедливость импликации $3 \Rightarrow 1$ доказывается аналогично.

Список литературы

1. *Donaghey R.* Automorphisms on Catalan trees and bracketings // Journal of Combinatorial Theory, Series B. – 1980. – Vol. 29. № 1. – P. 75–90.

2. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Преобразование Донахью: элементарный подход // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2013. – Т. 411. – С. 148–177.

3. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Повороты первого уровня на множестве плоских деревьев // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2013. – Т. 411. – С. 178–190.

4. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Изменение типа внутреннего ростка при преобразовании Донахью [Электронный ресурс] // ОБЩЕСТВО, НАУКА, ИННОВАЦИИ (НПК – 2016) : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. статей, 18–29 апреля 2016 г. / Вят. гос. ун-т. Киров, 2016. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). С. 2707–2711.

ПУШКАРЁВ Игорь Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: god_sha@mail.ru

БЫЗОВ Виктор Александрович – ассистент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: vbyzov@yandex.ru