УДК 004.922

М. Ю. Здоровенко, А. С. Серова

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРКОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

В статье обсуждается проблема гиперконечной аппроксимации вейвлетного преобразования и оптимальности значений параметров такого преобразования. Актуальность исследования обусловлена наличием проблем в современной теории кодирования и восстановления сигналов. Широкое применение средств вычислительной техники в обработке сигналов актуализировало проблему построения и исследования дискретных моделей, позволяющих преобразовывать и восстанавливать непрерывные сигналы по конечному набору значений этих сигналов. Ведущими методами исследования явились методы вейвлетного и инфинитезимального анализа. Инфинитезимальный анализ позволяет исследовать бесконечные и непрерывные объекты с помощью гиперконечномерного, то есть «дискретного», моделирования этих объектов. Вейвлетный анализ эффективен в случае нестационарных сигналов. Качество восстановления сигнала при вейвлетном преобразовании определяется параметрами растяжения и сдвига этого преобразования, поэтому важнейшей проблемой в приложениях вейвлетного анализа является проблема локализации области значений этих параметров.

Ключевые слова: вейвлетное преобразование, гиперконечная аппроксимация, параметры вейвлетного преобразования Хаара.

Начиная с восьмидесятых годов прошлого столетия активно развивается теория вейвлетного анализа [1; 2; 3: 4], а применение вычислительной техники в обработке сигналов актуализировало проблему табличных и гиперконечных аппроксимаций различных операторов [5; 6; 7].

Использование методов инфинитезимального анализа к указанной проблеме приводит к изучению гиперконечной аппроксимации прямого и обратного вейвлетного преобразования.

Настоящая работа посвящена изучению вейвлета Хаара

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & при\, 0\le x<0{,}5\\ -1, & при\, 0{,}5\le x<1\\ 0, & при\quad x\notin[0;1)\end{cases}$$

с носителем [0;1), соответствующих ему вейвлетных функций:

$$\varphi_{\mathrm{a,b}}(t)=\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)=\begin{cases}1, & при\quad b\le t<b+0{,}5a\\ -1, & при\quad b+0{,}5a\le t<b+a\\ 0, & при\qquad t\notin[b;b+a)\end{cases}$$

с носителями $[b;b+a)$ и непрерывному вейвлетному преобразованию, которое задается формулой:

$$(Wf)(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\int_b^{b+0{,}5a}f(t)dt-\int_{b+0{,}5a}^{b+a}f(t)dt\right). \tag{1}$$

Соответствующие дискретные вейвлетные функции

$$\varphi_{m,n}(t)=\sigma^{-\frac{m}{2}}\varphi\left(\frac{t-\sigma^m n}{\sigma^m}\right)$$

и дискретное вейвлетное преобразование

$$(Wf)(m,n)=\sigma^{-\frac{m}{2}}\left(\int_{n\sigma^m}^{(n+0{,}5)\sigma^m}f(t)dt-\int_{(n+0{,}5)\sigma^m}^{b(n+1)\sigma^m}f(t)dt\right)$$

получаем из (1) при

$$a_m=\sigma^m,\quad b_{m,n}=n\sigma^m,$$

где $\sigma>0,\quad m$ и n натуральные.

Для функции $f\colon A\to B$ ее нестандартное расширение обозначают через ${}^*f\colon A\to {}^*B$ [8,9]. Пусть $\Phi_\Delta(f)$ - это таблица значений функции f в узлах сетки $(\Delta\boldsymbol{k})$ с шагом Δ_j по каждой переменной x_j на отрезке $[-A_j;A_j]$, то есть

$$\Phi_\Delta(f)=\langle f(\Delta\boldsymbol{k})|\ \boldsymbol{k}=\overline{-M;M}\rangle$$

где $\Delta_j=A_j/M$.

Размер полученной таблицы равен N^n $(N=2M+1)$. Через $\mathfrak{I}_\Delta(n)$ обозначается пространство таблиц F размера N^n [5]

$$F=\langle F(\Delta\boldsymbol{k})|\ \boldsymbol{k}=\overline{-M;M}\rangle$$

В случае, когда $N \in {}^*\boldsymbol{N} \backslash \boldsymbol{N}$, через $E_{p\Delta}(n)$ обозначается подпространство конечных элементов из $\mathfrak{I}_\Delta(n)$

$$E_{p\Delta}(n) = \{F \in \mathfrak{I}_\Delta(n) \mid \|F\|_{p\Delta} \ll \infty\}.$$

Для линейного ограниченного оператора

$$A: L_p(\boldsymbol{R}^n) \to L_q(\boldsymbol{R}^n)$$

определим множество S_A таких функций из $\wp_p$, образ которых $A[f]$ попадает в $\wp_q$, т. е.

$$S_A = \{f \in L_p(R^n) \big| |f| \in \wp_p; |A[f]| \in \wp_q\}.$$

Предполагаем следующее:

(а) числа Δ, $\hat{\Delta}$ из ${}^*\boldsymbol{R}$ и число N из ${}^*\boldsymbol{N}$ удовлетворяют условиям

$$\Delta \approx 0, \hat{\Delta} \approx 0, N \in {}^*\boldsymbol{N} \backslash \boldsymbol{N}, \Delta N \approx \infty, \hat{\Delta} N \approx \infty;$$

(б) оператор $A_\Delta: E_{p\Delta}(n) \to E_{q\hat{\Delta}}(n)$ является внутренним гиперконечным оператором с конечной нормой, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

(в) оператор $A: L_p(\boldsymbol{R}^n) \to L_q(\boldsymbol{R}^n)$ является линейным ограниченным оператором таким, что множество S_A плотно в пространстве $L_p(\boldsymbol{R}^n)$.

Говорят, что оператор A_Δ аппроксимирует оператор A, если для любой функции f из S_A справедливо соотношение [5]

$$\|A_\Delta[\Phi_\Delta(\mathrm{f})] - \Phi_{\hat{\Delta}}(A[f])\|_{q\hat{\Delta}} \approx 0.$$

В терминах стандартного анализа это означает, что если нормы линейных операторов

$$A_s: E_{p\Delta_s}(n) \to E_{q\Delta_s}(n)$$

ограничены в совокупности, для линейного ограниченного оператора $A: L_p(\boldsymbol{R}^n) \to L_q(\boldsymbol{R}^n)$ множество S_A плотно в $L_p(\boldsymbol{R}^n)$ и при $s \to \infty$ справедливо $N_s \to \infty$, $\Delta_s \to 0$, $\hat{\Delta}_s \to 0$, $\Delta_s N_s \to \infty$, $\hat{\Delta}_s N_s \to \infty$, то последовательность операторов A_s аппроксимирует оператор A в том смысле, что для всякой функции f из S_A

$$\left\|A_s\left[\Phi_{\Delta_s}(f)\right] - \Phi_{\hat{\Delta}}(A[f])\right\|_{q\hat{\Delta}} \underset{s \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Для исследуемого сигнала f рассмотрим таблицу его значений в узлах сетки Δk:

$$F =< f(\Delta k) | k = \overline{-K; K} >$$

Через $f_1(t)$ и $f_2(t)$ обозначим сужение функции $f(t)$ на промежутки $[n\sigma^m; (n + 0{,}5)\sigma^m]$ и $[(n + 0{,}5)\sigma^m; (n + 1)\sigma^m]$ соответственно, При введенной дискретизации параметров вейвлетного преобразования гиперконечный вейвлетный оператор примет вид

$$(W_\Delta f)(m,n) = \sigma^{-\frac{m}{2}} \Delta\left(\sum_{k=-K}^{K} f_1(\Delta k) -\cdot \sum_{k=\_K}^{K} f_2(\Delta k)\ \right).$$

Заметим, что гиперконечный оператор $(W_\Delta f)(m,n)$ аппроксимирует дискретный вейвлетный оператор $(Wf)(m,n)$,

Согласно формуле восстановления сигнала f из пространства L_2 [1]

$$f = \frac{1}{C_\varphi} \int_{R^2_-} (Wf)(a,b)\varphi_{a,b} \frac{dadab}{|a|^2},$$

причем, константа C_φ определяется соотношением

$$C_\psi = \frac{\langle Wf, Wf \rangle}{\langle f, f \rangle}$$

Таблицу значений для сигнала f можно восстановить по формуле:

$$G(\Delta k) = \frac{1}{C_\varphi} \sum_{m=-M_1}^{M_2} \sum_{n=-N_m}^{N_m} \sigma^{-m} \Delta \left(\sum_{k=-K}^{K} f_1(\Delta k) - \sum_{k=\_K}^{K} f_2(\Delta k)\ \right) \varphi\left(\frac{\Delta k - \sigma^m n}{\sigma^m}\right) \cdot\ \Delta_m \Delta_{m,n}$$

В исследовательской литературе значение σ, как правило, берется равным двум, β равным единице. Однако данные значения не являются оптимальными в том смысле, что восстановленный сигнал отличается от исходного в большей мере, чем при других значениях параметров. Проблема локализации области значений параметров σ и β представляет одну из важных проблем при решении задачи о восстановлении сигнала. Наши исследования показали, что наименьшая ошибка при восстановлении сигнала в случае вейвлетного преобразования Хаара получается при σ=1,2, β=0,8. Приведем несколько примеров восстановленных сигналов.

Пример 1. Сигнал $f(t)=\begin{cases}\sin(t) & (0 \le x < \pi),\\ 0 & (в\,другихслучаях).\end{cases}$

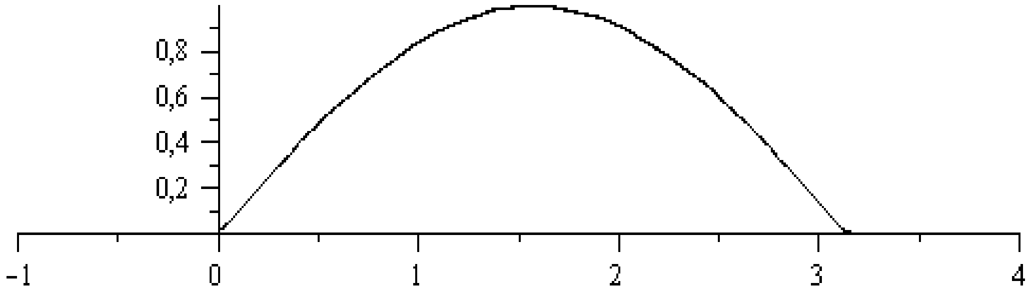

Рис. 1. Исходный сигнал

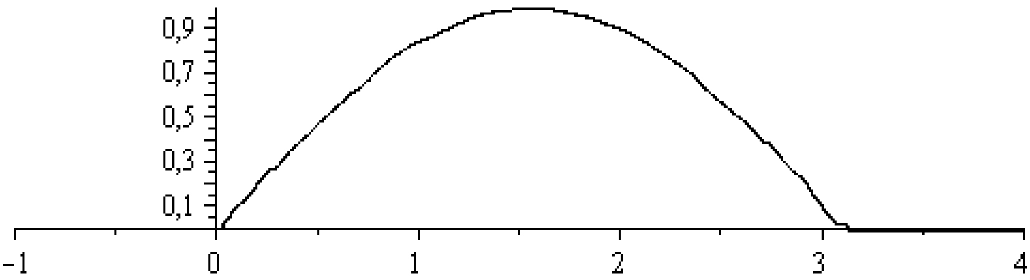

Рис. 2. Восстановленный сигнал

Пример 2. Сигнал $f(t)=\begin{cases}-2\cdot t^2+3 & (0 \le x < 2),\\ 0 & (в\,другихслучаях).\end{cases}$

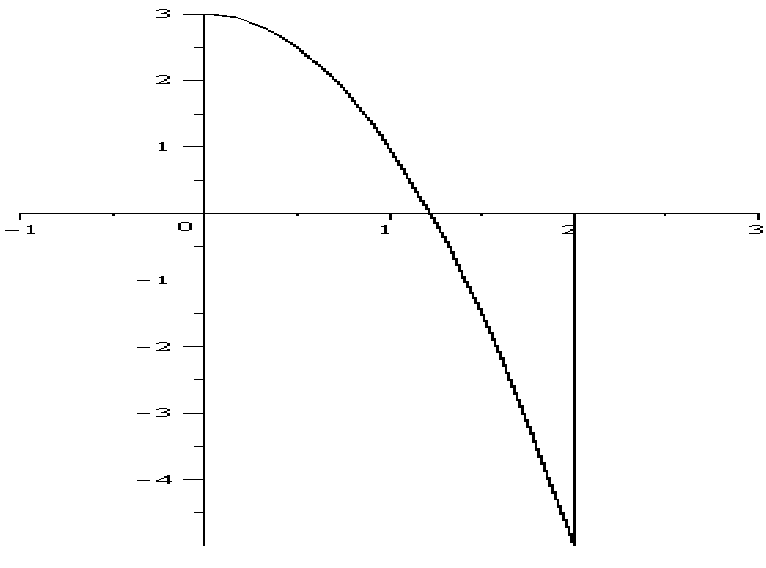

Рис. 3. Исходный сигнал

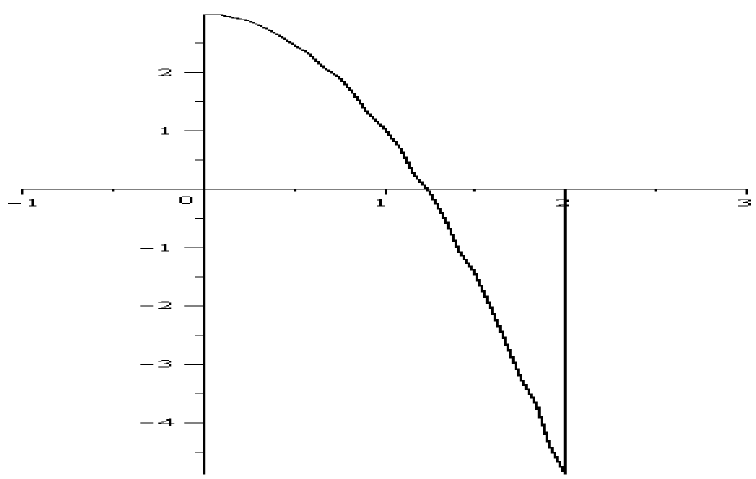

Рис. 4. Восстановленный сигнал

Пример 3. Сигнал $f(t)=\begin{cases}\sin(15\cdot t) & (0\le x<\pi),\\ 0 & (в\,другихслучаях).\end{cases}$

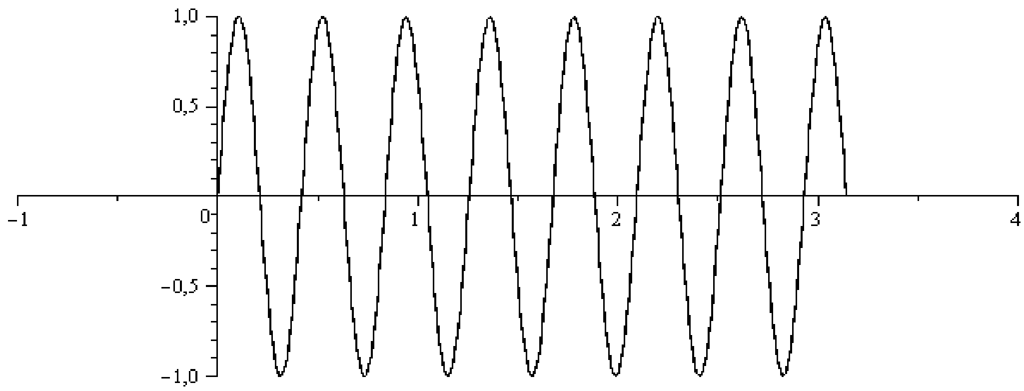

Рис. 5. Исходный сигнал

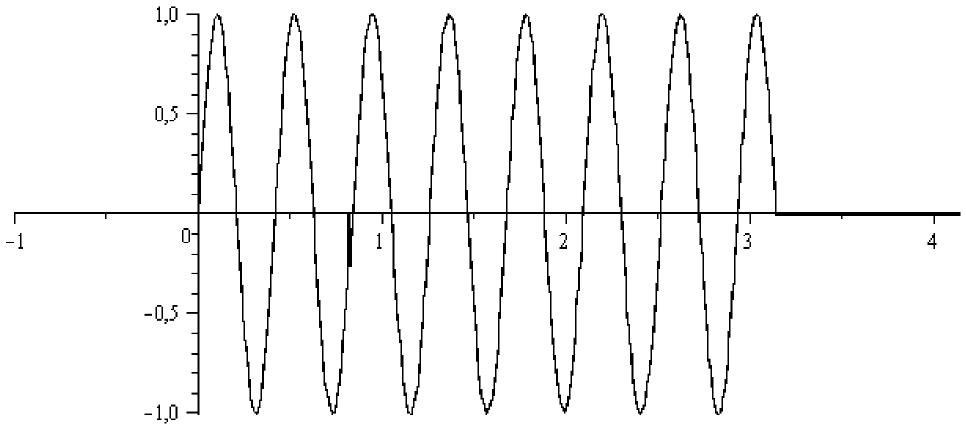

Рис. 6. Восстановленный сигнал

Список литературы

1. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. – М. : Техносфера, 2004. – 280 с.

2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.

3. *Смоленцев Н. К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М. : ДМК Пресс, 2005. – 304 с.

4. *Дьяконов В. П.* Вейвлеты. От теории к практике. – М. : Солон-Р, 2002. – 448 с.

5. *Гордон Е. И.* О преобразовании Фурье в нестандартном анализе. // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 2. – С. 17–25.

6. *Здоровенко М. Ю.* Гиперконечномерные табличные аппроксимации некоторых типов операторов в пространствах $L_p(R^n)$: дис. … канд. физ.-мат. Наук. – Саранск, 1997.

7. *Здоровенко М. Ю.*, *Зимакина А. И.* О некоторых свойствах гиперконечномерного вейвлет-преобразования // Общество, наука, инновации : материалы Всерос. ежегод. науч.-техн. конф., 16–27 апр. 2012 г. – Киров, 2012. – С. 1442–1445.

8. *Гордон Е. И.* Инфинитезимальный анализ : в 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. – 247 с.

9. *Дэвис М.* Прикладной нестандартный анализ. – М. : Изд-во «Мир», 1980. – 236 с.

ЗДОРОВЕНКО Марина Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: zdorovenko.s@mail.ru

СЕРОВА Анастасия Сергеевна – старший преподаватель кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: anastasya_serova@mail.ru