УДК 517.2/.3 DOI 10.25730/VSU.0536.18.002

О достаточных условиях гармонической выпуклости функции

С. И. Калинин
доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной и компьютерной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. В работе формулируются определения понятий гармонически выпуклой, строго гармонически выпуклой, гармонически вогнутой, строго гармонически вогнутой функций. Рассматривается геометрическая характеризация таких функций в терминах расположения точек графика функции под или над так называемой гиперболической дугой в зависимости от вида гармонической выпуклости. Приводятся примеры гармонически выпуклых (вогнутых) функций, в частности функций, являющихся разрывными на рассматриваемых промежутках. Главным результатом работы является вывод достаточных условий строгой и нестрогой гармонической выпуклости или вогнутости функции на промежутке в терминах ее производных первого и второго порядков. Получен своеобразный аналог классического утверждения основ анализа о достаточных условиях строгой выпуклости и строгой вогнутости гладкой функции в терминах знака ее второй производной.

Ключевые слова: гармонически выпуклая функция, гармонически вогнутая функция, гиперболическая дуга.

Воспроизведем определение понятия гармонически выпуклой функции (см., напр., [2; 3]).

Пусть $l \subset (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ – произвольный промежуток числовой прямой *Ox* и $f : l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1. Функцию *f* назовем *гармонически выпуклой* на *l*, если для любого отрезка $[a;b] \subset l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1} + (1-\lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях определения 1 для всех $\lambda \in (0;1)$ будет выполняться неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1} + (1-\lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то функцию *f* условимся называть *строго гармонически выпуклой* на рассматриваемом промежутке *l*.

Ясно, что строго гармонически выпуклая функция является гармонически выпуклой.

Аналогично определяются *гармонически вогнутая* и *строго гармонически вогнутая* функции – для этого в определяющих их неравенствах типа (1)–(2) следует использовать знаки $\geq$ и > соответственно.

Приведем примеры гармонически выпуклых и гармонически вогнутых функций, рассмотренные нами ранее в работе [1].

Функция $f(x) = c + \dfrac{\gamma}{x}$, где *c* и γ – вещественные константы, является как гармонически выпуклой, так и гармонически вогнутой на всяком промежутке $l \subset (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Это следует из того, что для данной функции соотношение (1) обращается в равенство.

Функция $f(x) = x,\ x > 0$, является строго гармонически выпуклой, так как для любых положительных чисел *a* и *b* ($a \neq b$) и любого $\lambda \in (0;1)$ имеем:

$$\left(\lambda a^{-1} + (1-\lambda)b^{-1}\right)^{-1} < \lambda a + (1-\lambda)b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)\left(a^2 - 2ab + b^2\right) > 0.$$

Аналогично устанавливается, что функция $g(x) = x,\ x < 0$ – строго гармонически вогнутая.

В работе [1] приводится геометрическая характеризация гармонически выпуклых функций. Она заключается в следующем.

Если $f(x)$ – гармонически выпуклая на промежутке *l*, $0 \notin l$, функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего *l*, и любого $x,\ x \in (a;b)$, выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции *f* будет находиться не выше точки гиперболической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой *x*.

Если же $f(x)$ – строго гармонически выпуклая на промежутке *l* функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего *l*, и любого $x,\ x \in (a;b)$, выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции *f* лежит строго ниже точки гиперболической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ с той же абсциссой *x*.

Обращаясь к рассуждениям в [1], легко проследить то, что приводимые утверждения обратимы.

В данных утверждениях упоминаемая гиперболическая дуга, соединяющая точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, есть кривая

$$y = \frac{bf(b) - af(a)}{b-a} + \frac{f(a) - f(b)}{b-a}\frac{ab}{x}. \tag{3}$$

Заметим, уравнение (3) можно переписать в виде

$$y = \frac{a(b-x)}{x(b-a)} \cdot f(a) + \frac{b(x-a)}{x(b-a)} \cdot f(b). \tag{4}$$

Правую часть (4) условимся обозначать символом $\sigma_f^{(a,b)}(x)$, подчеркивающим связь (4) с функцией *f* и отрезком $[a;b]$. В терминах введенного символа условие гармонической выпуклости функции *f* можно сформулировать следующим образом.

Функция $f(x)$ гармонически выпукла на промежутке *l*, $0 \notin l$, тогда и только тогда, когда для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего *l*, и любого $x,\ x \in (a;b)$, выполняется условие $f(x) \le \sigma_f^{(a,b)}(x)$. На рассматриваемом промежутке функция $f(x)$ будет строго гармонически выпуклой тогда и только тогда, когда для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего *l*, и любого $x,\ x \in (a;b)$, выполняется условие $f(x) < \sigma_f^{(a,b)}(x)$.

Ясно, что аналогичные утверждения можно сформулировать и для гармонически вогнутой (в строгом или нестрогом смысле) функции.

В данном месте построим примеры гармонически выпуклых на промежутке функций, не являющихся на данном промежутке непрерывными.

Рассмотрим функцию $h(x) = \begin{cases} 0,\ 1 < x \le 2, \\ 1,\ x = 1. \end{cases}$ Она, очевидно, в точке $x = 1$ имеет разрыв первого рода. Поскольку для нее выполняется условие $h(x) < \sigma_h^{(1,b)}(x) = \dfrac{b-x}{(b-1)x}, 1 < x < b \le 2$; $h(x) \le \sigma_h^{(a,b)}(x) = 0, 1 < a < x < b \le 2$, то *h* –гармонически выпуклая на отрезке $[1;2]$ функция.

Аналогично можно обосновать, что функция $sign\ x = \begin{cases} 1,\ x > 0, \\ 0,\ x = 0, \\ -1,\ x < 0 \end{cases}$ является гармонически выпуклой на промежутке $(-\infty, 0]$ и гармонически вогнутой на промежутке $[0, +\infty)$.

Поставим сейчас перед собой цель вывести достаточные условия строгой гармонической выпуклости или вогнутости непрерывной на промежутке *l*, $0 \notin l$, и дважды дифференцируемой внутри данного промежутка функции. Справедлива

Теорема А. Пусть $f : l \to \mathbf{R}$ – функция, непрерывная на промежутке $l \subset (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ числовой прямой *Ox*, дважды дифференцируемая внутри данного промежутка. Если для внутренних точек *x* из *l* выполняется условие $2xf'(x) + x^2 f''(x) > 0$, то *f* – строго гармонически выпуклая на промежутке *l* функция. Если же для таких точек выполняется условие $2xf'(x) + x^2 f''(x) < 0$, то *f* – строго гармонически вогнутая на рассматриваемом промежутке функция.

Доказательство. Пусть $2xf'(x) + x^2 f''(x) > 0$ для любой внутренней точки *x* промежутка *l*. Покажем, что в данном предположении для любого отрезка $[a;b] \subset l$ будет выполняться неравенство $f(x) < \sigma_f^{(a,b)}(x)$, где *x* – произвольная точка из интервала $(a;b)$. Это будет означать, как отмечено выше, строгую гармоническую выпуклость функции *f* на промежутке *l*.

Имеем:

$$\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) = \frac{a(b-x)}{x(b-a)} \cdot f(a) + \frac{b(x-a)}{x(b-a)} \cdot f(b) - f(x) =$$

$$= \frac{a(b-x)}{x(b-a)} \cdot \left(f(a) - f(x)\right) + \frac{b(x-a)}{x(b-a)} \cdot \left(f(b) - f(x)\right) =$$

$$= \frac{\left(b^{-1} - x^{-1}\right)\left(x^{-1} - a^{-1}\right)}{b^{-1} - a^{-1}} \left(\frac{f(a) - f(x)}{x^{-1} - a^{-1}} + \frac{f(b) - f(x)}{b^{-1} - x^{-1}} \right).$$

Замечаем, что в последнем произведении в силу неравенства $a < x < b$ дробь $K(a,x,b) = \dfrac{\left(b^{-1} - x^{-1}\right)\left(x^{-1} - a^{-1}\right)}{b^{-1} - a^{-1}}$ отрицательна, а дроби $\dfrac{f(a) - f(x)}{x^{-1} - a^{-1}}$, $\dfrac{f(b) - f(x)}{b^{-1} - x^{-1}}$ по теореме Коши можно представить в виде

$$\frac{f(a) - f(x)}{x^{-1} - a^{-1}} = \frac{f'(\xi)}{-\dfrac{1}{\xi^2}}, \quad \frac{f(b) - f(x)}{b^{-1} - x^{-1}} = \frac{f'(\eta)}{-\dfrac{1}{\eta^2}},$$

где ξ и η – некоторые средние точки, удовлетворяющие условию $a < \xi < x < \eta < b$. Следовательно,

$$\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) = -K(a,x,b) \cdot \left(\eta^2 f'(\eta) - \xi^2 f'(\xi)\right).$$

Применяя теорему Лагранжа, отсюда получаем представление

$\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) = -K(a,x,b) \cdot \left(2\varsigma f'(\varsigma) + \varsigma^2 f''(\varsigma)\right)(\eta - \xi)$, где ς – некоторая точка, лежащая между точками ξ и η. Так как $2\varsigma f'(\varsigma) + \varsigma^2 f''(\varsigma) > 0$, то получаем $\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) > 0$. Нужное показано.

Ясно, что второе утверждение теоремы устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 1. Техника доказательства теоремы 1 позволяет сформулировать следующее утверждение.

Если в условиях теоремы А для внутренних точек *x* из *l* выполняется условие $2xf'(x) + x^2 f''(x) \geq 0$, то *f* – гармонически выпуклая на промежутке *l* функция; выполнение для таких точек неравенства $2xf'(x) + x^2 f''(x) \leq 0$ обеспечивает вывод о гармонической вогнутости функции *f* на рассматриваемом промежутке.

Замечание 2. Теорема А есть своеобразный аналог классического утверждения о достаточных условиях строгой выпуклости и строгой вогнутости гладкой функции в терминах второй производной данной функции.

Вернемся к рассмотренным выше примерам гармонически выпуклых и вогнутых функций.

Для функций $f(x) = x,\ x > 0$, и $g(x) = x,\ x < 0$, фигурирующая в условиях теоремы А величина $2xf'(x) + x^2 f''(x)$ есть выражение $2x$. Следовательно, по данной теореме *f* – строго гармонически выпуклая функция, а *g* – строго гармонически вогнутая.

Для функции $f(x) = c + \dfrac{\gamma}{x}$ величина $2xf'(x) + x^2 f''(x)$ тождественно равна нулю, следовательно, по приводимому замечанию данная функция и гармонически выпукла, и гармонически вогнута на всяком промежутке $l \subset (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Рассмотрим другие иллюстрации применения теоремы А.

Для функции $f(x) = e^x$ выражение $2xf'(x) + x^2 f''(x)$ есть величина

$x(2+x)e^x$, следовательно, она является строго гармонически выпуклой на всяком промежутке $l \subset (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$ и строго гармонически вогнутой на интервале $(-2;0)$.

Так как $2x\left(xe^x\right)' + x^2\left(xe^x\right)'' = x\left(2 + 4x + x^2\right)e^x$, то по теореме А функция $f(x) = xe^x$ есть строго гармонически выпуклая функция на интервалах, $\left(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right)$, $(0;+\infty)$ и строго гармонически вогнутая на интервалах $\left(-\infty;-2-\sqrt{2}\right)$, $\left(-2+\sqrt{2};0\right)$.

Функция $\ln x$ – гармонически выпуклая функция, поскольку в ее области определения $2x(\ln x)' + x^2(\ln x)'' = 1 > 0$.

Список литературы

1. *Калинин С. И.* Геометрическая характеризация гармонически выпуклых функций // Актуальные проблемы физико-математического образования : материалы II Междунар. науч.-практ. конф. Наб. Челны : НГПУ, 2017. С. 24–27.

2. *İşcan İ., Wu S.* Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals. Applied Mathematics and Computation, 238 (2014). P. 237–244.

3. *Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U.* Some characterizations of harmonically log-convex functions, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 17 (2014), № 1. P. 51–61.

On sufficient conditions of the harmonic convexity of the function

S. I. Kalinin

Doctor of pedagogical sciences, professor of the Department of fundamental and computer mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Abstract: The definitions of the concepts of a harmonic convex, strictly harmonic convex, harmonically concave, strictly harmonically concave function are formulated in the paper. We consider the geometric characterization of these functions meaning the location of the points of the graph of a function under or over a so-called hyperbolic arc, depending on the form of the harmonic convexity. Examples of harmonically convex (concave) functions are given, in particular, functions that are discontinuous on the intervals considered. The main result of the work is the inference of sufficient conditions for a strict and non-strict harmonic convexity or concavity of a function on an interval in terms of its first and second order derivatives. An original analog of the classical statement about sufficient conditions for strict convexity and strict concavity of a smooth function in terms of the sign of its second derivative is obtained.

Keywords: harmonic convex function, harmonic concave function, hyperbolic arc.

References

1. *Kalinin S. I.* [Geometric characterization of harmonic convex functions. Actual problems of physical and mathematical education: materials of II Internat. scientific- pract. conf.] Nab. Chelny. NSPU. 2017. Pp. 24-27.

2. *İşcan İ., Wu S.* Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals. Applied Mathematics and Computation, 238 (2014). Pp. 237–244.

3. *Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U.* Some characterizations of harmonically log-convex functions, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 17 (2014), № 1. Pp. 51–61.