

## Конечно-элементное моделирование продольных колебаний упругого стержня при соударении его с неподвижной преградой

А. П. Левашов<sup>1</sup>, Б. Л. Тимофеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: 670094@rambler.ru

<sup>2</sup> кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00461@vyatsu.ru

**Аннотация.** Моделируется прохождение упругих волн в кумулятивной струе при столкновении ее с неподвижной преградой. Кумулятивная струя представлена в виде упругого стержня, имеющего коэффициент вязкости. Построена конечно-элементная модель вязкоупругого стержня на стадии столкновения с неподвижной преградой. Выбран конечный элемент для моделирования кумулятивной струи. Записаны перемещения произвольной точки конечного элемента. Составлены матрицы масс и демпфирования конечного элемента вязкоупругого стержня. Получено уравнение движения конечного элемента и дифференциальное уравнение конечно-элементной модели. Проведены численные эксперименты на примере высокоскоростной газо-кумулятивной струи. По результатам численных экспериментов построена диаграмма развития затухающих колебаний кумулятивной струи. Показано, что метод конечных элементов пригоден для моделирования высокоскоростных газо-кумулятивных струй.

**Ключевые слова:** кумулятивная струя; математическая модель; взрывчатые вещества; детонационная волна; конечный элемент; уравнение движения конечного элемента; матрица масс; матрица демпфирования; коэффициент динамичности.

Изучение газоккумулятивных зарядов ведется давно ввиду их широкого применения во многих областях науки и техники. Но до сих пор многие особенности протекающих процессов остаются до конца не исследованными. Ранее эти исследования большей частью проводились с помощью аналитических и экспериментальных методов. Однако, несмотря на то что экспериментальные исследования играют основную роль в изучении импульсных устройств и технологий, использующих в своей основе взрывчатые вещества, без глубокого теоретического анализа, как правило, не удается достичь требуемого результата [1]. Помимо всего этого современные условия требуют необходимости сокращения количества испытаний по причине их дороговизны. Поэтому большое значение и практическую ценность приобрели исследования, проводимые на основе численных методов механики сплошной среды, которые, в свою очередь, предъявляют повышенные требования не только к качеству физико-математических моделей, но и уровню разработанных на их основе алгоритмов расчета [3].

Современные численные методы позволяют решать такие сложные задачи, включающие генерацию и распространение ударных и детонационных волн в упругих телах и газах с возможными фазовыми переходами твердой фазы в газ и последующим ударно-волновым нагружением [1]. Возможности математических моделей достаточно широки и зависят от полноты используемых свойств моделируемых процессов. И здесь, по мнению автора, очень удобен метод конечных элементов, который является универсальным методом, широко применяемым для решения задач прикладной физики. В статье на основе метода конечных элементов разработана математическая модель высокоскоростной кумулятивной струи при столкновении ее с неподвижной преградой.

Конструкция заряда состоит из бризантного взрывчатого вещества с осевой симметрией и клиновидной кумулятивной выемки с одного конца, имеющей металлическую облицовку, выполненную из металла (чаще медь или ее сплавы), с углом раствора, достигающего 90 градусов (рис. 1.) Кумулятивная струя образуется в результате детонации взрывчатого вещества, и тогда образующиеся продукты детонации, воздействующие на кумулятивную облицовку, приводят к ее схлопыванию и формированию металлической струи из внутреннего слоя облицовки.

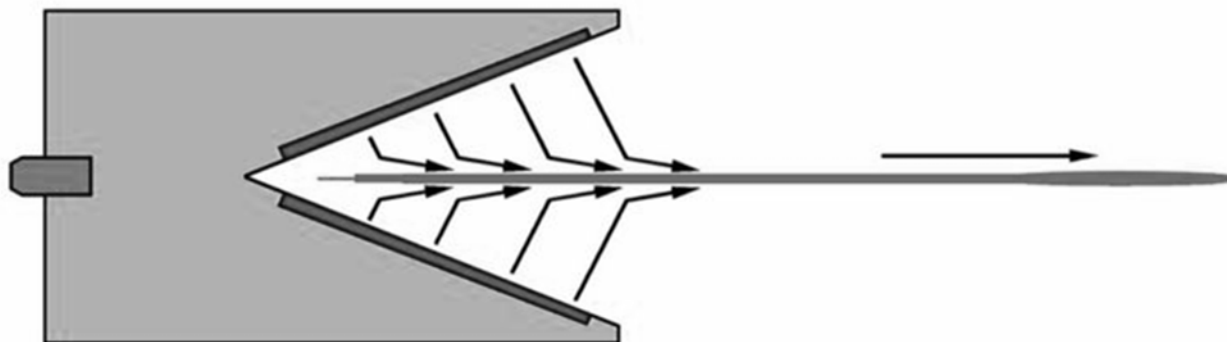


Рис. 1. Заряд с образующейся кумулятивной струей

Кумулятивная струя, аккумулирующая в себе энергию взрывчатого вещества, может достигать скорости до 10 км/с. Металл облицовки в формирующейся высокоскоростной кумулятивной струе представлен в виде критического состояния, находящегося между твердым веществом и жидкостью, когда ее структура еще не отличается от структуры твердого вещества. Это представление не противоречит теореме Гельмгольца, согласно которой движение частиц или газа представлено как движение, состоящее из квазитвердого и деформационного, что подобно вязкоупругому телу модели Фойхта – Кельвина. Кумулятивная струя, выдавливаемая из обжатого вкладыша, формируется в виде стержня переменного сечения, находящегося перед преградой. Для упрощения рассмотрения процесса примем, что стержень имеет постоянное сечение, а также однороден по длине. Процесс взаимодействия стержня с преградой будет рассматриваться на стадии соударения с ней. В момент, когда стержень сталкивается с неподвижной преградой, от плоскости контакта ударник-мишень в противоположные стороны отражается ударная волна и в стержне-ударнике развивается процесс продольных колебаний. При контакте с преградой малый элемент (лидирующая часть) струи под воздействием тепла от продуктов детонации заряда переходит в жидкое состояние, условно названное гидродинамической жидкостью Покровского – Биркгоффа [2], которую можно считать вязкоупругой жидкостью, подчиняющейся модели Максвелла. Колебания стержня, обусловленные одновременным действием квазиупругой силы и силой трения (которая пропорциональна мгновенной скорости), являются затухающими колебаниями. Уравнение собственных колебаний стержня, описывающее процесс прохождения упругих волн, запишется в виде:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} = 0$$

Для получения уравнений движения конечно-элементной модели стержня взят стержневой конечный элемент при одноосном однородном напряженном состоянии (рис. 2).

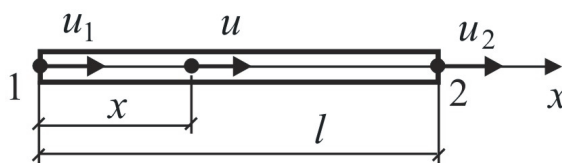


Рис. 2. Стержневой конечный элемент

Уравнение, описывающее движение  $i$ -го конечного элемента стержня, имеет вид:

$$\mathbf{M}_i^e \ddot{\mathbf{r}}_i^e + \mathbf{C}_i^e \dot{\mathbf{r}}_i^e + \mathbf{K}_i^e \mathbf{r}_i^e = 0$$

Перемещение  $u(x)$  произвольной точки конечного элемента вдоль оси  $X$  можно выразить через узловые перемещения  $u_1$  и  $u_2$  так, чтобы выполнялись условия  $u(0) = u_1$ ,  $u(l) = u_2$ :  $u(x) = u_1(1 - x/l) + u_2 x/l = u_1 N_1 + u_2 N_2$ . Отсюда следуют функции распределения

$N_1 = 1 - x/l$ ,  $N_2 = x/l$ . Данные функции удовлетворяют условиям: в узле 1  
 $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 0$ ; в узле 2  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 1$ .

Дифференциальные уравнения движения конечно-элементной модели имеют вид:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = 0$$

$[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $\{r\}$  – соответственно матрица масс, матрица демпфирования, матрица жесткости и вектор узловых перемещений отмеченной модели;

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad [K] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M] = \rho F h \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \frac{K\delta}{\pi\omega}$$

Матрицы  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  собираются методом прямой жесткости [4] из соответствующих матриц  $\mathbf{M}^{(e)}$ ,  $\mathbf{C}^{(e)}$ ,  $\mathbf{K}^{(e)}$  конечных элементов.

### Численный эксперимент

Для проведения численных экспериментов рассматривается вязкоупругий стержень длиной  $L=1,6$  м и площадью поперечного сечения  $F=0,0048$  м<sup>2</sup>. Модуль упругости стержня  $E=1,28e5$ . Коэффициент демпфирования берется постоянным. Плотность стержня  $\rho=8900$  кг/м<sup>3</sup>. Скорость соударения стержня с преградой берется равной  $V=4000$  м/с. Для моделирования методом конечных элементов стержень разбивается на двадцать конечных элементов с длиной одного элемента, равной  $l$ . По результатам расчета построена диаграмма затухающих колебаний (рис. 3). На диаграмме показано, как происходят затухания кумулятивной струи при столкновении ее с неподвижной преградой, что вполне хорошо совпадает с аналитическими решениями, описывающими затухающие колебания. Это говорит о том, что на стадии соударения кумулятивной струи с неподвижной преградой ее моделирование методом конечных элементов возможно.

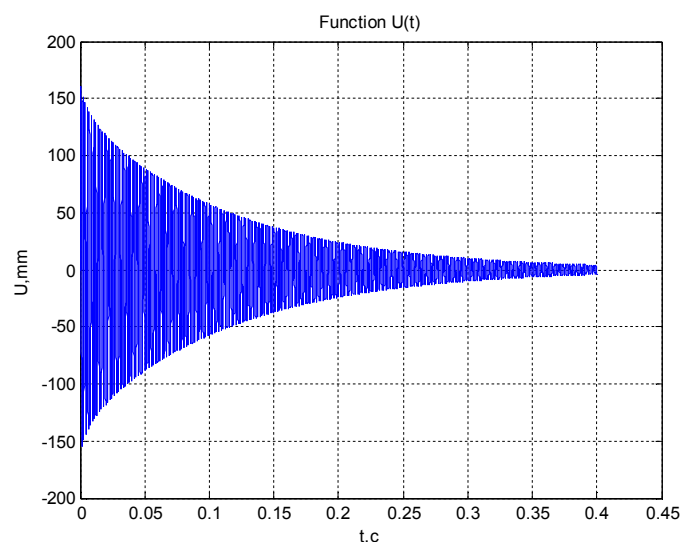


Рис. 3. Диаграмма затухания колебаний кумулятивной струи

Результаты расчета показывают, что кумулятивная струя, представленная в виде вязкоупругого стержня, хорошо моделируется методом конечных элементов. Это позволит проводить дальнейшие исследования поведения кумулятивной струи на стадии соударения с преградой, включая ее пробивную способность.

Численные эксперименты проведены с использованием лицензионного математического пакета MATLAB R2012b.

### Список литературы

1. Абузяров М. Х. Численное моделирование детонации и воздействия газокумулятивных зарядов на преграды / М. Х. Абузяров, А. В. Кочетков, С. В. Крылов, Е. В. Цветкова // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1. № 2. С. 5–165.
2. Головатенко В. Д., Головатенко А. В. Процесс взаимодействия кумулятивной струи с преградой // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. «Машиностроение». 2012. № 19. С. 13–22.
3. Колпаков В. И. Математическое моделирование взрывных устройств // Наука и образование : электрон. науч.-техническое изд. 2012. 02 февр. С. 1.
4. Postnov V. A., Harhurim I. Ya. Metod konechnykh elementov v raschetah sudovyykh konstruktsiy. L. : Sudostroenie, 1974. 344 s.
5. Sterne Th. E. A Note on Collapsing Cylindrical Shells // Journ. of the Appl. Phys. 1950. Vol. 21. № 2. P. 73–74.

## Finite-element modeling of longitudinal vibrations of an elastic rod at its collision with a fixed barrier

A. P. Levashov<sup>1</sup>, B. L. Timofeev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> PhD of technical sciences, associate professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: 670094@rambler.ru

<sup>2</sup> PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr00461@vyatsu.ru

**Abstract:** Simulated the passage of elastic waves in the shaped-charge jet when its collision with a stationary obstacle. The jet stream is presented in the form of elastic rod having a coefficient of *vyazkosti*. The finite element model of viscoelastic rod under impact against a fixed obstacle. The selected finite element for the simulation of a cumulative jet. The recorded movement of an arbitrary point of a finite element. Composed of mass matrix and damping finite element viscoelastic rod. The resulting equation of motion finite element and differential equation finite element model. Numerical experiments on the example of high-speed gas jet. According to the results of numerical experiments the diagram of the development of the damped oscillations of the cumulative jet. It is shown that the finite elements are suitable for modeling high-speed gas-cumulative jets.

**Keywords:** cumulative jet; mathematical model; explosives; detonation wave; finite element; equation of motion of the finite element; mass matrix; damping matrix; dynamic coefficient.

### References

1. Abuzyarov M. H. *Chislennoe modelirovanie detonacii i vozdejstviya gazokumulyativnykh zaryadov na pregrady* [Numerical simulation of detonation and impact gas-cumulative charges at the barrier] / M. H. Abuzyarov, A. V. Kochetkov, S. V. Krylov, E. V. Tsvetkova // *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* - Computational mechanics of continuum. 2008, vol.1, No. 2, pp. 5–165.
2. Golovatenko V. D., Golovatenko A. V. *Process vzaimodejstviya kumulyativnoj strui s pregradoj* [Process of interaction of the jet with the obstacle] // *Vestnik YUzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. «Mashinostroenie»* – Herald of the South Ural State University. Ser. «Engineering». 2012, No. 19, pp. 13–22.
3. Kolpakov V. I. *Matematicheskoe modelirovanie vzryvnykh ustrojstv* [Mathematical modeling of explosive devices] // *Nauka i obrazovanie: ehlektron. nauch.-tekhnicheskoe izd.* - Science and education: electron. scientific- technical publication. 2012, 02 February, p. 1.
4. Postnov V. A., Harhurim I. Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetah sudovyykh konstruktsiy*. L. : Sudostroenie, 1974. 344 p.
5. Sterne Th. E. A Note on Collapsing Cylindrical Shells // *Journ. of the Appl. Phys.* 1950. Vol. 21. № 2. Pp. 73–74.