УДК 372.851 DOI 10.25730/VSU.0536.18.003

Визуализация правильных *n*-мерных многогранников

Е. Н. Лубягина[1], Л. В. Тимшина[2], Д. В. Широков[3]

[1] кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

[2] старший преподаватель кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

[3] кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-9465-4851. E-mail: DimShirokov79@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается вопрос визуализации правильных *n*-мерных многогранников. Такая задача отлично подходит для приобщения старшеклассников и студентов к элементам исследовательской деятельности, способствует развитию пространственного и абстрактного мышления, помогает установлению межпредметных связей.

Как и для 3-мерного случая, *n*-мерные точки для их представления могут быть спроецированы в (*n*-1)-мерное пространство и так далее до 3-мерного пространства с помощью центральной либо параллельной проекции. Авторы считают, что наиболее подходящим инструментом для визуализации *n*-мерных фигур является система динамических чертежей GeoGebra. Отметим такое достоинство динамических чертежей GeoGebra на полотне 3D, как возможность их свободных поворотов и сдвигов с помощью мыши.

Материал статьи может быть использован, например, при организации исследовательской деятельности на различных курсах и уровнях образования (школа, бакалавриат, магистратура) при изучении алгебры и геометрии. Материал статьи также может быть полезен при проведении лабораторных занятий по курсу «Аналитическая геометрия», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» и может послужить основой выпускной работы или индивидуального задания для бакалавров и магистрантов.

Ключевые слова: правильный многогранник, *n*-мерное пространство, GeoGebra.

Приведем основные определения и факты о *n*-мерных многогранниках. Необходимая информация о многомерных пространствах содержится в пособиях [4; 5; 6]. С теорией многомерных многогранников можно познакомиться в книгах [1; 6].

Множество точек *n*-мерного метрического аффинного пространства *V*, равноудаленных от центра *O*, назовем *сферой*. Пусть в пространстве *V* задана система координат с ортонормированным репером $R(O;\ \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n})$. Тогда получаем следующее уравнение сферы S^{n-1} единичного радиуса с центром в точке *O*:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R \in S^{n-1} \iff |MO|=1 \iff x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1. \qquad (1)$$

Гиперплоскостью называется подпространство с размерностью, на единицу меньшей, чем объемлющее пространство. Пусть в некотором репере $R(O;\ \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ пространства *V* точка M_0 гиперплоскости α имеет координаты $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})_R$, гиперплоскость α имеет базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon_1}(e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n})_R, \dots, \boldsymbol{\varepsilon_{n-1}}(e_{(n-1)1}, e_{(n-1)2}, \dots, e_{(n-1)n})_R$. Получаем общее уравнение гиперплоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon_{n-1}}$:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R \in \alpha \iff \boldsymbol{M_0M}, \boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon_{n-1}} \text{ линейно зависимы} \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & x_2 - x_{02} & \dots & x_n - x_{0n} \\ e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e_{(n-1)1} & e_{(n-1)2} & \dots & e_{(n-1)n} \end{vmatrix} = 0.$$

Любая гиперплоскость α определяет два *полупространства*, состоящие из точек, лежащих по одну сторону от гиперплоскости (так, что отрезок, соединяющий любые две из них, не пересекает α).

Выпуклым многогранником называется ограниченная фигура *M*, полученная как пересечение конечного числа полупространств в *V*. Размерностью многогранника *M* считается размерность наименьшего аффинного подпространства в *V*, содержащего *M*.

Правильные n-мерные многогранники определим по индукции [8]:

***n*=2.** *Правильный многоугольник* – это выпуклый многоугольник, у которого все стороны между собой равны и все углы между смежными сторонами равны.

***n*=3.** *Правильный многогранник* (3-*мерный*) – это выпуклый многогранник, все грани которого – равные правильные многоугольники с s сторонами (s>2), а концы всех ребер, исходящих из любой фиксированной вершины, образуют правильный k-угольник (k>2).

***n*>3.** Пусть определены правильные **(*n*–1)-мерные** многогранники.

Тогда *правильный n-мерный многогранник* – это выпуклый многогранник:

1) все грани которого – равные правильные (n–1)-мерные многогранники;

2) концы всех смежных ребер (исходящих из любой фиксированной вершины) образуют правильные (n–1)-мерные многогранники, причем все такие многогранники равны (но не обязательно совпадают с многогранниками из пункта 1)).

Таким образом, у правильного n-мерного многогранника имеются грани всех размерностей от 0 до n–1: вершины, ребра, многоугольники, трехмерные многогранники, …, (n–1)-мерные многогранники. Соотношения между ними можно найти в брошюрах [2; 7].

Каждому правильному многограннику можно взаимно однозначно сопоставить его *символ* (*Шлефли*), определяющийся также по индукции как n-ка чисел (m_1, m_2, …, m_{n-1}), где (m_1, m_2, …, m_{n-2}) – символ любой из (n-1)-мерных граней многогранника, (m_2, …, m_{n-1}) – символ любого из (n–1) мерного многогранника с вершинами в концах смежных ребер.

Заметим, что для любого правильного многогранника можно естественным образом определить *двойственный* ему *многогранник*, соединив отрезками центры граней, имеющих общее ребро.

Другим важным свойством правильного n-мерного многогранника является возможность описать вокруг него сферу S^{n-1}, заданную в подходящем репере уравнением (1).

Отметим, что каждому 3-мерному правильному многограннику взаимно однозначно соответствует разбиение сферы S^2: чтобы из правильного многогранника получить разбиение сферы, нужно на описанной вокруг него сфере соединить вершины многогранника дугами, а чтобы по разбиению сферы построить многогранник, вершины дуг разбиения соединяются обычными отрезками.

На рис. 1 приведен снимок динамического чертежа в GeoGebra, иллюстрирующего разбиение сферы, соответствующее кубу. Мы видим, что символ Шлефли куба (4, 3) (треугольники, собранные по пять в вершине), задает не только многогранник, но разбиение двумерной сферы. Это верно и в общем случае.

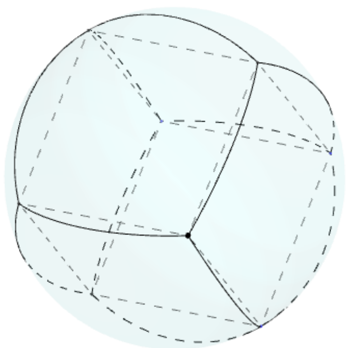


Рис. 1. Разбиение сферы (4, 3)

Подробнее с возможностями GeoGebra можно познакомиться в пособии [3].

Для 3-мерного пространства имеет место следующая теорема, иллюстрирующая связь геометрии и общей алгебры. Отметим, что под самосовмещением фигуры мы понимаем движение (то есть преобразование, сохраняющее расстояние между соответствующими точками), отображающее эту фигуру на себя. Пусть $R(S^2)$ – группа всех возможных поворотов относительно различных осей, проходящих через центр сферы S^2.

Теорема 1. [8] *Любая конечная нетривиальная подгруппа G группы* $R(S^3)$ *изоморфна одной из следующих групп*:

1) *группе* $\mathbf{Z}_n$, $n\geq2$, *поворотов вокруг одной и той же оси на углы* $2k\pi/n$ *для значений* k=0, 1, …, n-1;

2) *группе диэдра* $\mathbf{D}_n$, $n\geq2$, *самосовмещений правильного n-угольника*;

3) *группе самосовмещений правильного тетраэдра*;

4) *группе самосовмещений куба*;

5) *группе самосовмещений додекаэдра*.

Так как при любом движении многогранника его вершины переходят в вершины, то группа поворотов правильного многогранника конечна и, значит, изоморфна одной из групп, перечисленных в теореме. Пункты 1) и 2) теоремы 1 не дают многогранников, пункт 3) позволяет получить правильный тетраэдр, пункт 4) – куб и двойственный ему октаэдр, пункт 5) – додекаэдр и двойственный ему икосаэдр. Получается

Теорема 2. *Существует ровно* 5 *различных правильных трехмерных многогранников*: (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5). *Они соответствуют пяти разбиениям сферы* S^2.

Для пространств размерности $n>3$ выполняется аналогичная трехмерному случаю теорема классификации правильных n-мерных многогранников:

Терема 3. [6] *Существует ровно 6 различных правильных 4-мерных многогранников*: (3, 3, 3), (4, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (5, 3, 3), (3, 3, 5). *При $n>4$ существует ровно 3 различных правильных n-мерных многогранника*: (3, 3,…, 3, 3), (4, 3,…, 3, 3), (3, 3,…, 3, 4).

Далее рассмотрим примеры визуализации многомерных многогранников.

1. *n*-мерный куб

Многогранник с символом (4, 3,…, 3) – это *n-мерный куб* с вершинами в точках (±1, ±1, …, ±1) (см. [7]).

1. Вычислим координаты проекций вершин 4-мерного куба при центральном проецировании из точки S вне фигуры на гиперплоскость $h=0$.

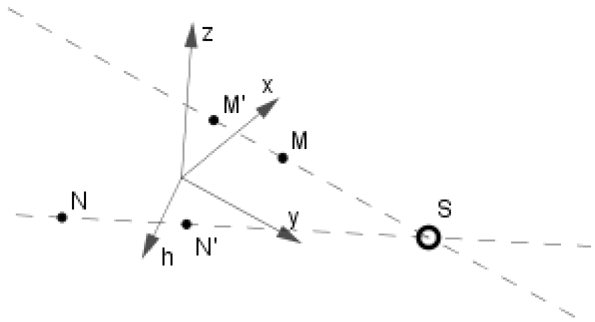


Рис. 2. Центральное проецирование

Пусть $M(x_0, y_0, z_0, h_0)$, $S(x_s, y_s, z_s, h_s)$ в системе координат $Oxyzh$. Найдем уравнение прямой SM:

$$M(x,y,z,h) \in SM \Leftrightarrow \boldsymbol{SM} || \boldsymbol{SM_0} \neq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{SM} = t\boldsymbol{SM_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_s = t(x_0 - x_s) \\ y - y_s = t(y_0 - y_s) \\ z - z_s = t(z_0 - z_s) \\ h - h_s = t(h_0 - h_s) \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Образом M' точки M на гиперплоскость $h = 0$ будет пересечение этой гиперплоскости и прямой SM. Поэтому координаты M' удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} h = 0 \\ x - x_s = t(x_0 - x_s) \\ y - y_s = t(y_0 - y_s) \\ z - z_s = t(z_0 - z_s) \\ h - h_s = t(h_0 - h_s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ x - x_s = t(x_0 - x_s) \\ y - y_s = t(y_0 - y_s) \\ z - z_s = t(z_0 - z_s) \\ t = \frac{-h_s}{h_0 - h_s} \end{cases}.$$

Значит, в гиперплоскости $h=0$ в системе координат $Oxyz$ точка M' будет иметь координаты $\left(\frac{-h_s}{h_0-h_s}(x_0 - x_s) + x_s,\ \frac{-h_s}{h_0-h_s}(y_0 - y_s) + y_s,\ \frac{-h_s}{h_0-h_s}(z_0 - z_s) + z_s\right)$.

Для вычисления координат проекций вершин куба удобно использовать содержащуюся в GeoGebra электронную таблицу и отображать найденные точки на полотно 3D. Для изображения 3-мерных точек GeoGebra использует параллельное проецирование. На рис. 3, 4 приведена 3-мерная проекция 4-мерного куба с разных ракурсов при центральном проецировании.

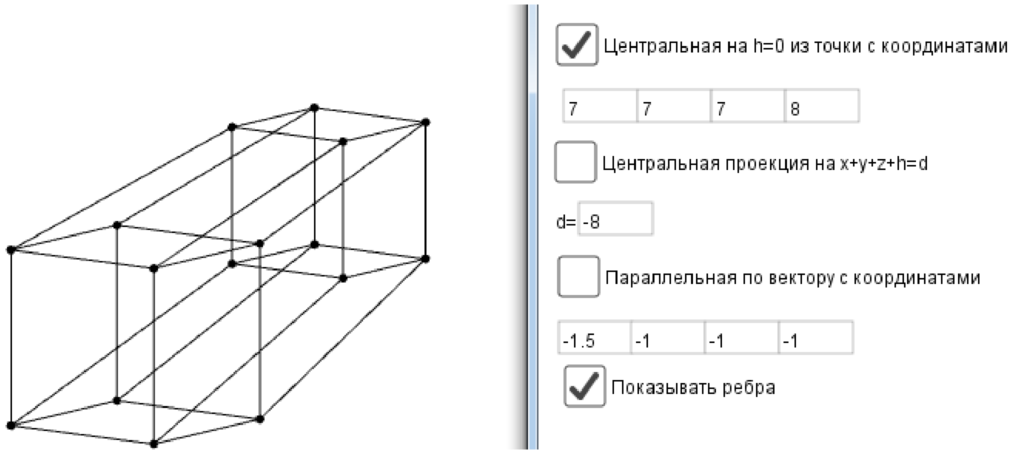


Рис. 3. Центральное проецирование на гиперплоскость h=0 из точки (7, 7, 7, 8)

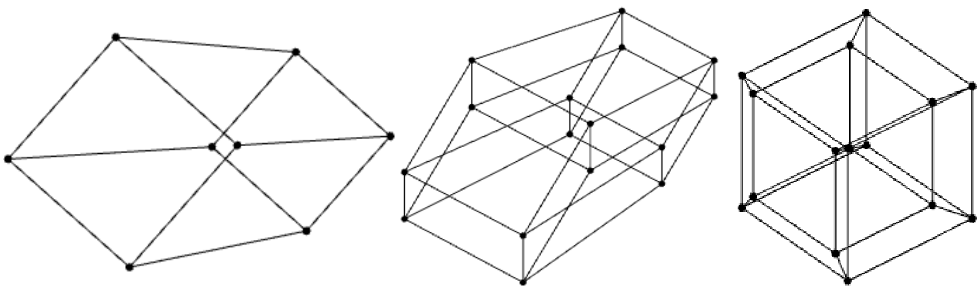


Рис. 4. Вид на проекцию (см. рис. 3) с других сторон

2. Найдем теперь координаты проекции 4-мерной точки при центральном проецировании из точки S на гиперплоскость $x+y+z+h=d$, где d – некоторое число.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0, h_0)$, $S(x_s, y_s, z_s, h_s)$ в системе координат $Oxyzh$.

Образ M' точки M на гиперплоскость $x+y+z+h=d$ равен пересечению этой гиперплоскости с прямой SM. Координаты M' являются решением системы

$$\begin{cases} x+y+z+h=d \\ x-x_s=t(x_0-x_s) \\ y-y_s=t(y_0-y_s) \\ z-z_s=t(z_0-z_s) \\ h-h_s=t(h_0-h_s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+h=d \\ x=t(x_0-x_s)+x_s \\ y=t(y_0-y_s)+y_s \\ z=t(z_0-z_s)+z_s \\ t=\dfrac{d-(x_s+y_s+z_s+h_s)}{(x_0+y_0+z_0+h_0)-(x_s+y_s+z_s+h_s)} \end{cases}.$$

Обозначим найденные координаты точки M' как (x', y', z', h').

Гиперплоскость $x+y+z+h=d$ проходит через точки $O(d/4, d/4, d/4, d/4)$, $E_1(d, 0, 0, 0)$, $E_2(0, d, 0, 0)$, $E_3(0, 0, d, 0)$. При этом векторы $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{OE_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{OE_2}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{OE_3}$ линейно независимы и могут быть выбраны в качестве базиса в $x+y+z+h=d$. Найдем координаты точки M' в репере $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Во внешнем репере $\boldsymbol{OM'}$ имеет координаты $(x' - d/4, y' - d/4, z' - d/4, h' - d/4)$. Для поиска координат (x_m, y_m, z_m) вектора $\boldsymbol{OM'}$ в репере $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ достаточно решить векторное уравнение

$\boldsymbol{OM'}=x_m\boldsymbol{e_1}+y_m\boldsymbol{e_2}+z_m\boldsymbol{e_3}$, учитывая условие ограничения на гиперплоскость $x+y+z+h=d$. Получаем координаты точки M' на гиперплоскости: $\left(\frac{x'-h'}{d}, \frac{y'-h'}{d}, \frac{z'-h'}{d}\right)$.

На рис. 5 приведена получившаяся 3-мерная проекция 4-мерного куба.

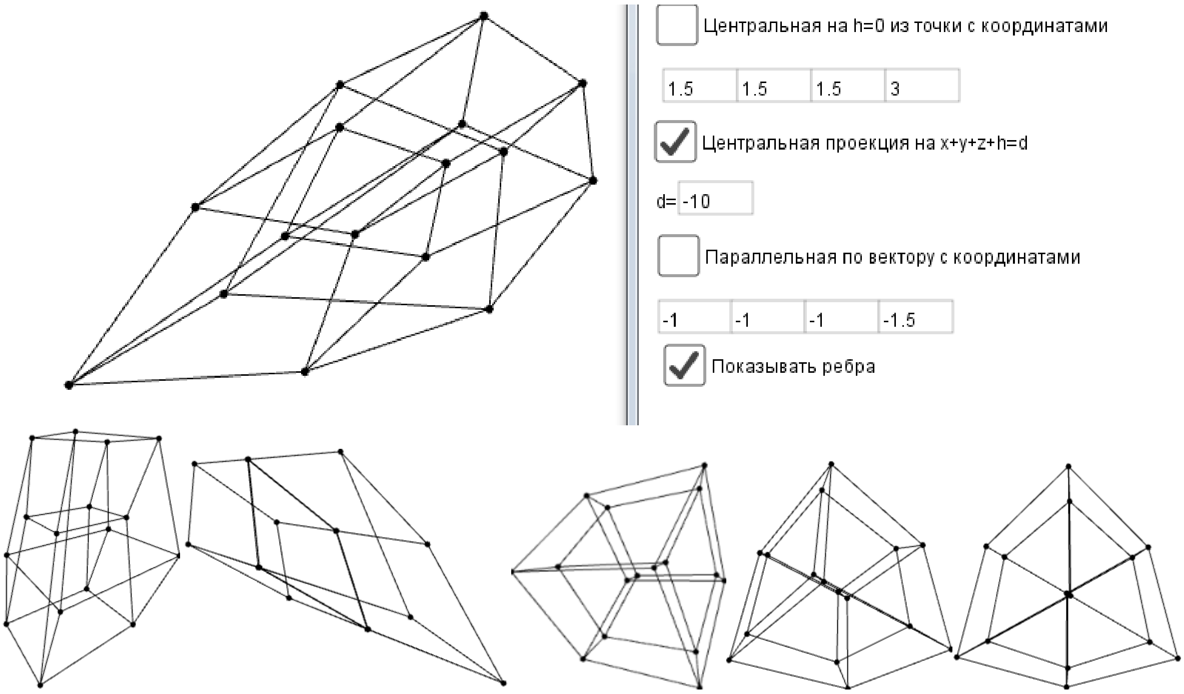
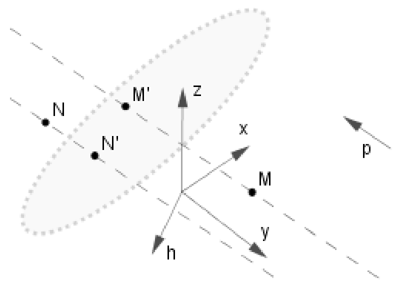


Рис. 5. Центральное проецирование на гиперплоскость $x+y+z+h=-10$ из точки (1.5, 1.5, 1.5, 3)

3. Вычислим координаты проекций 4-мерной точки при проецировании параллельно вектору $\boldsymbol{p}$ на гиперплоскость $x+y+z+h=d$, где d – некоторое число.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0, h_0)$, $\boldsymbol{p}(x_p, y_p, z_p, h_p)$ заданы в системе координат $Oxyzh$:



Образ M' точки M при параллельном проецировании на гиперплоскость $x+y+z+h=d$ будет пересечением этой гиперплоскости и прямой, проведенной через M в направлении $\boldsymbol{p}$. Значит, координаты M' являются решением системы

$$\begin{cases} x+y+z+h=d \\ x-x_0=t\,x_p \\ y-y_0=t\,y_p \\ z-z_0=t\,z_p \\ h-h_0=t\,h_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+h=d \\ x=tx_p+x_0 \\ y=t\,y_p+y_0 \\ z=t\,y_p+z_0 \\ t=\dfrac{d-(x_0+y_0+z_0+h_0)}{x_p+y_p+z_p+h_p} \end{cases}$$

Обозначим найденные координаты точки M' во внешнем репере как (x', y', z', h'). По формуле из предыдущего пункта получаем координаты точки M' на гиперплоскости $x+y+z+h=d$ в репере $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$:

$$M'\left(\frac{x'-h'}{d}, \frac{y'-h'}{d}, \frac{z'-h'}{d}\right).$$

На рис. 6 приведена параллельная 3-мерная проекция 4-мерного куба, схожая с центральной проекцией при максимально удаленном центре проецирования.

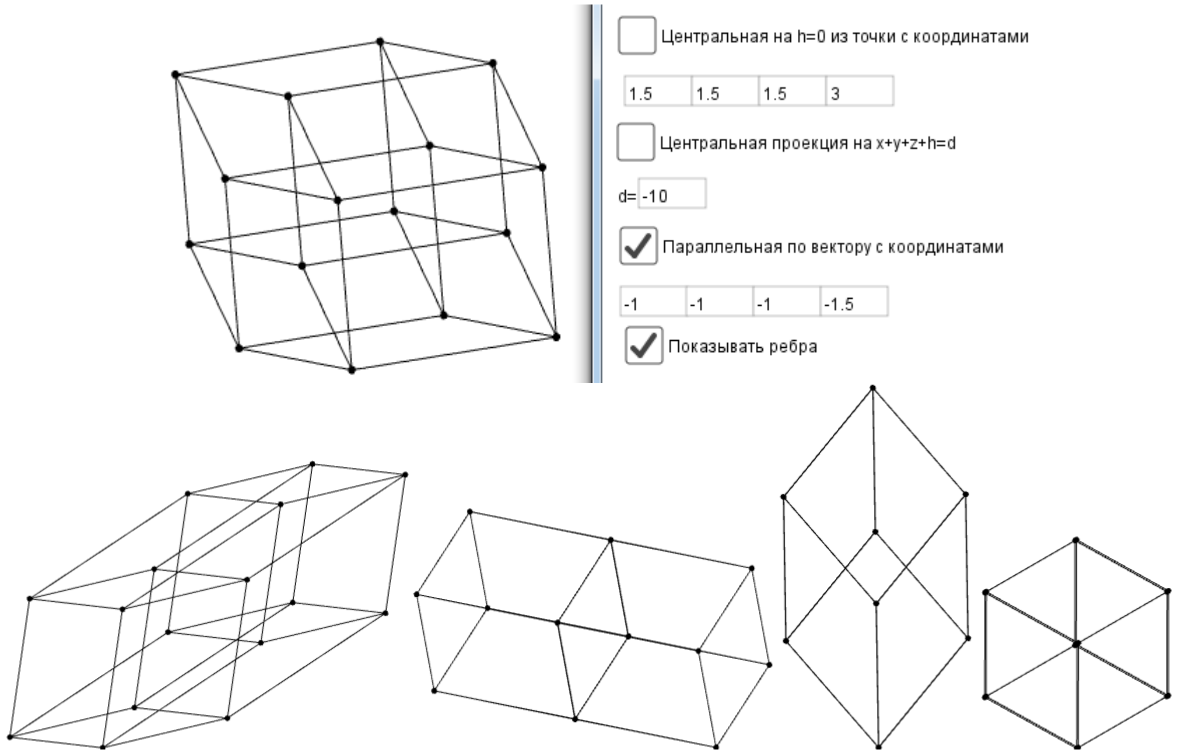


Рис. 6. Проецирование на гиперплоскость $x+y+z+h=-10$
параллельно вектору (-1, -1, -1, -1.5)

4. Построим изображение 5-мерного куба, дважды спроецировав его: сначала на 4-мерную гиперплоскость, затем – на 3-мерную. Применив два центральных проецирования, получим чертеж (рис. 7).

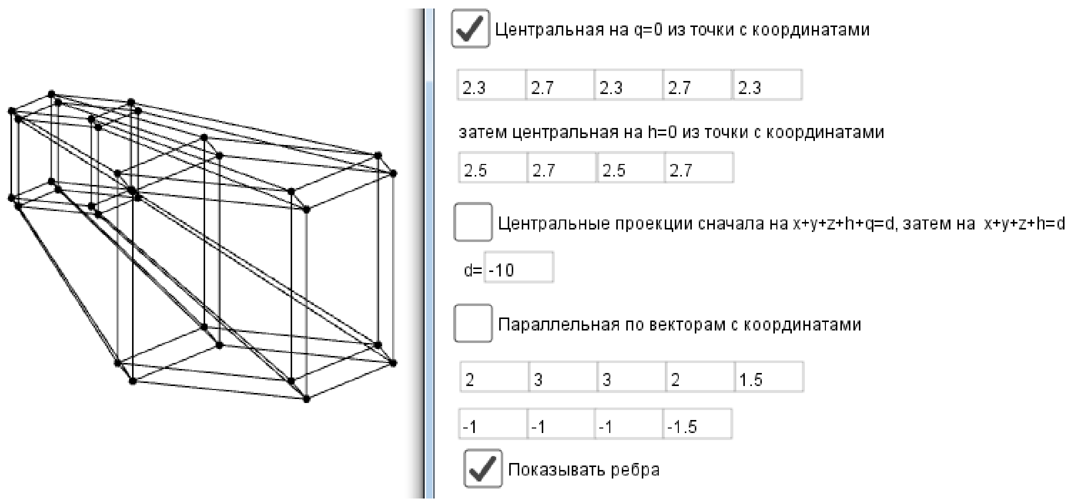


Рис. 7. Центральные проецирования на гиперплоскость q=0
из точки (2.3, 2.7, 2.3, 2.7, 2.3), затем на гиперплоскость h=0
из точки (2.5, 2.7, 2.5, 2.7)

2. Симплекс

Общая формула вычисления координат вершин многогранника с символом (3,3,…,3,3) приведена в [6]. Этот многогранник называется *n-мерным симплексом.*

В 4-мерном пространстве вершины симплекса имеют такие координаты: $\left(-\sqrt{10},\ -\sqrt{\frac{10}{3}},\ -\sqrt{\frac{5}{3}},-1\right)$, $\left(\sqrt{10},\ -\sqrt{\frac{10}{3}},\ -\sqrt{\frac{5}{3}},-1\right)$, $\left(0,\ 2\sqrt{\frac{10}{3}},\ -\sqrt{\frac{5}{3}},-1\right)$, $\left(0,\ 0,-\sqrt{15},-1\right)$, (0, 0, 0, 4). На рис. 8 приведены центральная и параллельная проекции 4-мерного симплекса.

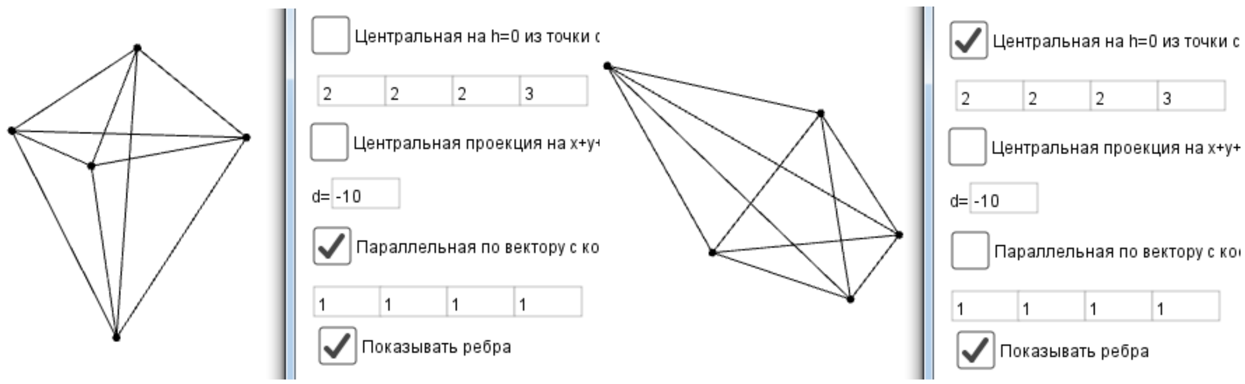


Рис. 8. Проекции симплекса

3. Кокуб

n-мерный кокуб – это многогранник с символом (3, 3, …, 3, 4). Его вершинами будут точки (0, …, 0, ±1, 0, …, 0) [7].

На рис. 9 приведена получившаяся 3-мерная проекция 4-мерного кокуба.

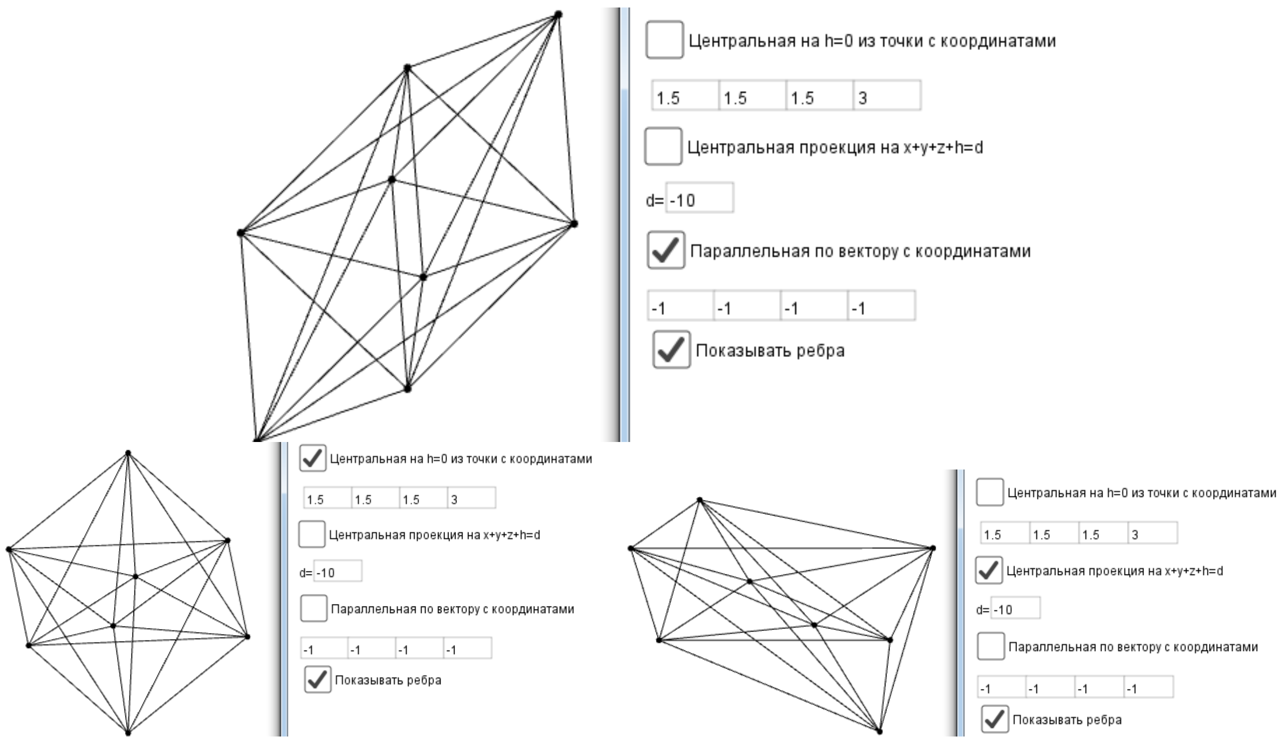


Рис. 9. Проекции кокуба

Аналогично строятся проекции других *n*-мерных многогранников. Изображения могут легко быть дополнены выделением (*n*–1)-мерных граней, реализацией поворотов *n*-мерных многогранников и т. п. Такие упражнения послужат хорошей иллюстрацией при изучении свойств многомерных многогранников.

Список литературы

1. *Берже М.* Геометрия / пер. с фр. М. : Мир, 1984. Т. 1. 560 с.
2. *Гальперин Г. А.* Многомерный куб. М. : МЦНМО, 2015. 80 с.
3. *Есаян А. Р., Добровольский Н. М., Седова Е. А., Якушин А. В.* Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra : учеб. пособие. Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. Ч. I. 417 с.
4. *Игнатьев Ю. Г.* Аналитическая геометрия. Ч. II. Аффинные и евклидовы пространства : учеб. пособие. II семестр. Казань : ТГГПУ, 2013. 188 с.
5. *Игнатьев Ю. Г., Агафонов А. А.* Проективная геометрия и методы изображений : учеб. пособие. Казань : Казан. ун-т, 2014. 179 с.
6. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 668 с.
7. *Смирнов Е. Ю.* Группы отражений и правильные многогранники. М. : МЦНМО, 2009. 48 с.
8. *Сосинский А. Б.* Геометрии / пер. с англ. Б. Р. Френкина. М. : МЦИНО, 2017. 263 с.

Visualization of regular n-dimensional polytopes

E. N. Lubyagina[1], L. V. Timshina[2], D. V. Shirokov[3]

[1] PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5071-6208.
E-mail: shishkina.en@mail.ru

[2] senior lecturer of the Department of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259.
E-mail: larisatimshina@rambler.ru

[3] PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-9465-4851.
E-mail: DimShirokov79@mail.ru

Abstract: In this paper, we consider the question of visualization of regular n-dimensional polyhedra. Such a task is perfectly suitable for involving high school students and students in the elements of research activity, it promotes the development of spatial and abstract thinking and the establishment of intersubject communications.

As in the 3-dimensional case, points in n-dimensional space can be projected into an (n-1) -dimensional space and so on to 3-dimensional space by means of a central or parallel projection. We believe that GeoGebra's dynamic drawing system is the most suitable tool for such visualization. Note that GeoGebra drawings on the 3D canvas can be rotated and moved with the mouse.

The material of this article can, for example, be used in the formation of research activities at various courses and levels of education (school, bachelor, master) in the studyalgebra and geometry. The material of the article can be used for conducting laboratory studies on the course "Analytical Geometry", "Computer Geometry and Geometric Modeling" and can serve as the basis for the final work or individual task for bachelors and undergraduates.

Keywords: regular polyhedron, n-dimensional space, GeoGebra.

References

1. *Berger M. Geometriya* [Geometry] / transl. from Fr. M. Mir. 1984. Vol.1. 560 p.
2. *Gal'perin G. A. Mnogomernyj kub* [Multidimensional cube]. M. MCCME. 2015. 80 p.
3. *Esayan A. R., Dobrovol'skij N. M., Sedova E. A., YAkushin A. V. Dinamicheskaya matematicheskaya obrazovatel'naya sreda GeoGebra : ucheb. posobie* [Dynamic mathematics learning environment GeoGebra : tutorial]. Tula. Publishing house of Tula State Ped. Un-ty n.a. L. N. Tolstoy. 2017. Part I. 417 p.
4. *Ignat'ev YU. G. Analiticheskaya geometriya. CH. II. Affinnye i evklidovy prostranstva : ucheb. posobie. II semestr* [Analytical geometry. Part II. Affine and Euclidean spaces: tutorial. II semester]. Kazan. TSHPU. 2013. 188 p.
5. *Ignat'ev YU. G., Agafonov A. A. Proektivnaya geometriya i metody izobrazhenij: ucheb. posobie* [Projective geometry and imaging methods: tutorial]. Kazan. Kazan Un-ty. 2014. 179 p.
6. *B. A. Rosenfeld Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional spaces]. M. Nauka. 1966. 668 p.
7. *Smirnov E. YU. Gruppy otrazhenij i pravil'nye mnogogranniki* [Reflection groups and regular polytopes]. M. MCCME. 2009. 48 p.
8. *Sosinskij A. B. Geometrii* [Geometries] / transl. from English by B. R. Frenkin. M. MCCME. 2017. 263 p.