

## Транспонирование лестничных структур цифровых фильтров, основанных на разложении передаточной функции в цепную дробь\*

**Т. В. Наумович**

старший преподаватель кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет.  
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3659-2664. E-mail: naumovich@vyatsu.ru

**Аннотация.** Цифровой фильтр с бесконечной импульсной характеристикой может быть реализован бесконечно большим числом способов. Различные структуры имеют разную чувствительность к точности представления коэффициентов, разный уровень шумов округления, в них различным образом могут проявляться паразитные колебания предельного цикла. Одним из путей синтеза новых структур является их транспонирование. При транспонировании входной узел становится выходным, а выходной – входным, узлы заменяются на сумматоры, а сумматоры – на узлы, направление всех передач меняется на противоположное. В данной работе транспонировались лестничные структуры, получаемые путем разложения в цепную дробь передаточной функции. В результате произведенных преобразований выяснилось, что транспонирование данного класса цифровых фильтров практически не приводит к формированию принципиально новых структур. Происходит тривиальное изменение порядка следования последовательно соединенных блоков умножения и задержки.

**Ключевые слова:** рекурсивный цифровой фильтр, передаточная функция, цепная дробь, лестничная структура, транспонирование структуры, топологическая матрица.

Известно, что для реализации рекурсивного цифрового фильтра (ЦФ) с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}} \quad (1)$$

может быть использовано бесконечное число структурных схем, различающихся уровнем эффектов, связанных с ограниченной разрядностью коэффициентов и блоков, выполняющих арифметические операции. В работах авторов [3; 5; 6] разрабатывается подход к проектированию ЦФ, включающий генерацию структурных схем под конкретную спецификацию требований к характеристикам ЦФ. Этот подход основан на применении в качестве математической модели структуры так называемой топологической матрицы, элементы которой являются коэффициентами передачи сигналов между узлами схемы. Такая модель была предложена в [4].

Известна простая методика [1; 4], позволяющая из любой структуры, в том числе сгенерированной в соответствии с [3; 5; 6], получить новую структуру, называемую транспонированной. Суть методики в том, что входной узел становится выходным, а выходной – входным, узлы заменяются на сумматоры, а сумматоры – на узлы, направление всех передач меняется на противоположное. Топологическая матрица новой структуры получается транспонированием топологической матрицы исходной структуры.

Как правило, взаимно транспонированные структуры достаточно существенно отличаются друг от друга. На рис. 1 представлены классическая прямая форма ЦФ второго порядка ( $n = 2$ ) (рис. 1а) и соответствующая ей транспонированная прямая форма (рис. 1б).

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант 18-07-00986а.

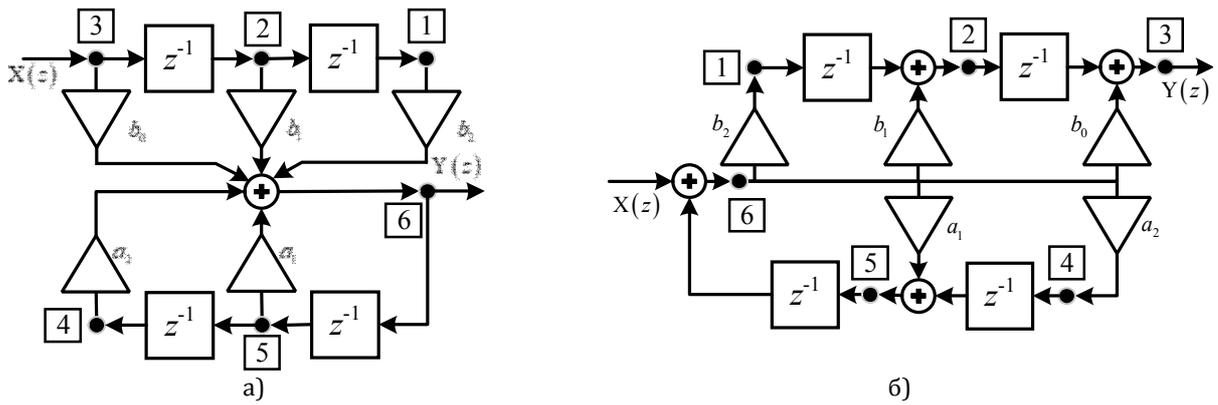


Рис. 1. Прямая форма ЦФ

Топологические матрицы этих структур имеют вид:

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ b_2 & b_1 & b_0 & a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

и

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

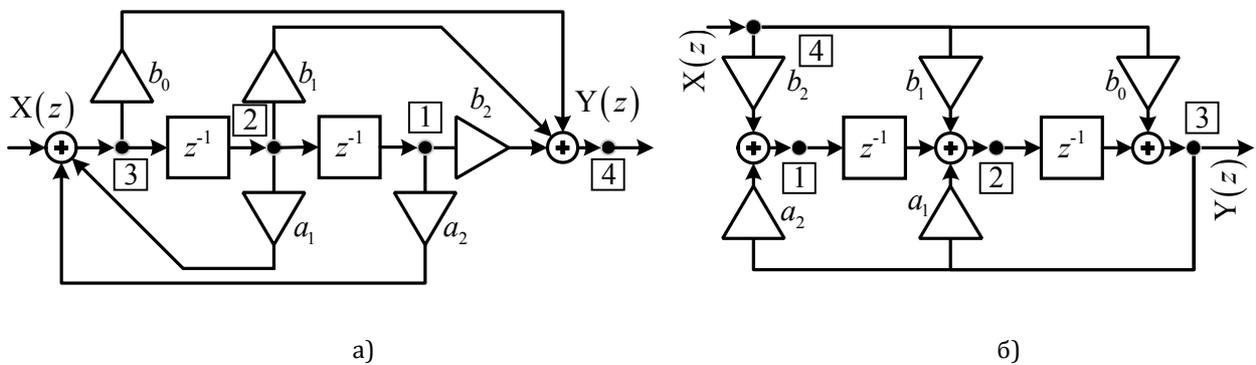


Рис. 2. Каноническая форма

На рис. 2 показаны классические взаимно транспонированные канонические формы с топологическими матрицами

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

для канонической формы рис. 2а и

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ z^{-1} & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & z^{-1} & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

для транспонированной канонической формы. Различия транспонированных и исходных структур очевидны. Совершенно другая ситуация выявляется при транспонировании лестничных структур.

Известен класс структур, получаемых разложением передаточной функции в цепную дробь [2; 7; 8; 9].

Структура типа IA основана на разложении

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2z + \frac{1}{A_2 + \dots + \frac{1}{B_nz + \frac{1}{A_n}}}}}}. \tag{6}$$

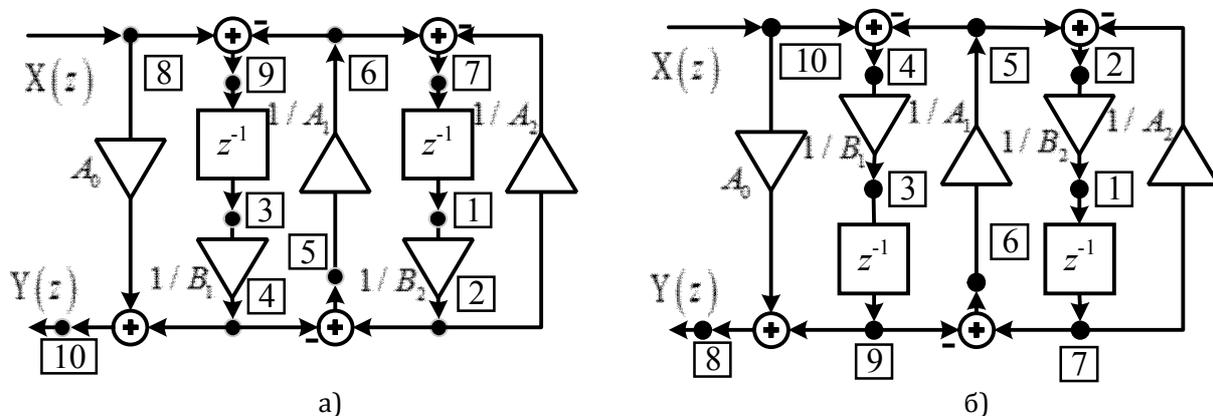


Рис. 3. Лестничные структуры типа IA

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 3а. Топологическая матрица этой структуры равна

$$T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/A_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

После транспонирования топологическая матрица приобретает следующий вид:

$$T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & A_0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Соответствующая этой матрице структура построена на рис. 3б.  
 Структура типа IB основана на разложении

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z^{-1} + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z^{-1} + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{B_n z^{-1} + \frac{1}{A_n}}}}}}}. \tag{9}$$

Соответствующая структурная схема показана на рис. 4а.

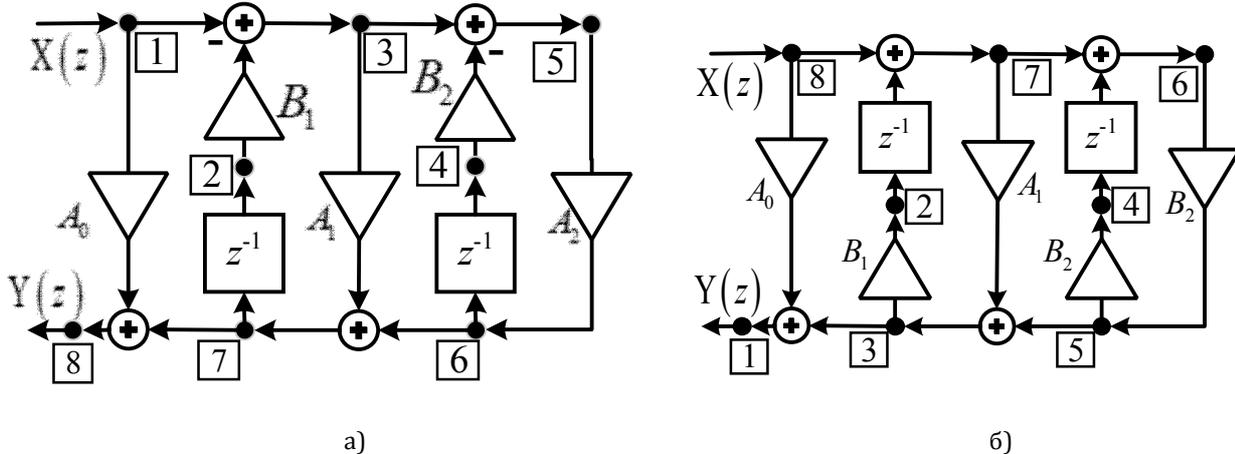


Рис. 4. Структура типа IB

Топологическая матрица этой структуры имеет вид:

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 1 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

После транспонирования топологическая матрица приобретает вид

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

По этой матрице строим структурную схему, рис. 4б.  
 Структура типа IIA основана на разложении

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1z + A_1 + \frac{1}{B_2z + A_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{B_nz + A_n}}}} \tag{12}$$

На рис. 5а показана структурная схема лестничного ЦФ типа IIА.

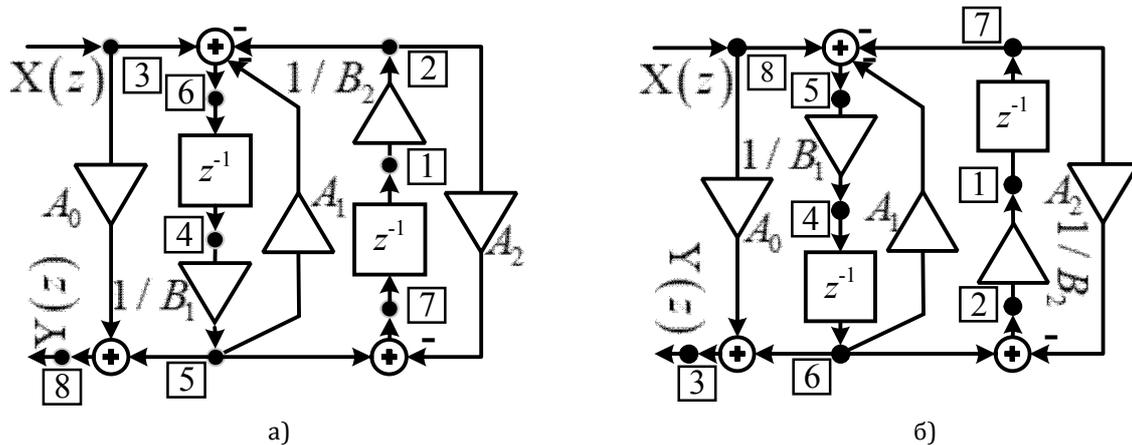


Рис. 5. Структура типа IIА

Его топологическая матрица равна

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Транспонируем матрицу:

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

и строим структурную схему рис. 5б.

Анализ полученных результатов показывает, что транспонирование лестничных фильтров практически не приводит к получению новых структур. Происходит просто тривиальное изменение порядка следования последовательно соединенных блоков умножения и задержки в ветвях структуры.

### Список литературы

1. Лесников В. А., Наумович Т. В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров : ВятГУ, 2006. 196 с.
2. Лесников В. А., Наумович Т. В., Частиков А. В. Анализ чувствительности цифровых фильтров, структура которых основана на разложении передаточной функции в непрерывную дробь // Наука и образование: новое время. 2017. № 6.

3. Лесников В. А., Наумович Т. В., Частиков А. В. Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2010 : сб. тр. / под общ. ред. А. Л. Стемповского. М. : ИПИМ РАН, 2010. С. 466–471. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf>
4. Crochier R. E., Oppenheim A. V. The analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. V. 63. № 4. P. 581–595. DOI: 10.1109/PROC.1975.9793. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1451723/>.
5. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. P. 282–285. DOI: 10.1109/EWDTs.2010.5742083. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742083/>.
6. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. P. 156–159. DOI: 10.1109/EWDTs.2010.5742051. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742051/>.
7. Mitra S. K., Sagar A. D. Additional canonic realization of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1974. Vol. CAS-21. Issue 1. P. 135–136. DOI: 10.1109/TCS.1974.1083795. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1083795/>.
8. Mitra S. K., Sherwood R. J. Canonic realizations of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. Vol. AU-20. Issue 3. P. 185–194. DOI: 10.1109/TAU.1972.1162375. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162375/>.
9. Mitra S. K., Sherwood R. J. Digital Ladder Networks // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. 1973. Vol AU-21. Issue 1. P. 30–36. DOI: 10.1109/TAU.1973.1162423. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162423/>.

## Transposition of ladder structures of digital filters based on decomposition of the transfer function into a chain fraction

**T. V. Naumovich**

senior lecturer of the Department of radio electronic means, Vyatka State University. Russia, Kirov.  
ORCID: 0000-0002-3659-2664. E-mail: [naumovich@vyatsu.ru](mailto:naumovich@vyatsu.ru)

**Abstract:** A digital filter with an infinite impulse response can be implemented in an infinitely large number of ways. Different structures have different sensitivity to the accuracy of the representation of the coefficients, a different level of rounding noise, in which the parasitic oscillations of the limit cycle can manifest themselves in different ways. One way to synthesize new structures is to transpose them. When transposed, the input node becomes the output node, and the output node becomes the input node, the nodes are replaced by the adder, and the adder is switched to nodes, the direction of all the transmissions is reversed. In this paper, transposed ladder structures, obtained by decomposition into a continued fraction of the transfer function. As a result of the transformations it was found out that the transposition of this class of digital filters practically does not lead to the formation of fundamentally new structures. There is a trivial change in the order of succession of the sequentially connected multiplication and delay blocks.

**Keywords:** IIR filter, transfer function, continued fraction, ladder structure, structure transposition, topological matrix.

### References

1. Lesnikov V. A., Naumovich T. V. *Strukturnyj sintez cifrovyyh fil'trov* [Structural synthesis of digital filters]. Kirov. VyatSU. 2006. 196 p.
2. Lesnikov V. A., Naumovich T. V., Chastikov A. V. *Analiz chuvstvitel'nosti cifrovyyh fil'trov, struktura kotoryh osnovana na razlozhenii peredatochnoj funkicii v nepreryvnyu drob'* [Sensitivity analysis of digital filters whose structure is based on a decomposition of the transfer function in continued fraction] // *Nauka i obrazovanie: novoe vremya* - Science and education: new time. 2017, No. 6.
3. Lesnikov V. A., Naumovich T. V., Chastikov A. V. *Novyj podhod k proektirovaniyu rekursivnyh cifrovyyh fil'trov* [New approach to the design of recursive digital filters] // *Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoehlektronnyh sistem – 2010 : sb. tr.* - Problems of development of perspective micro - and nanoelectronic systems – 2010 : coll. works / under the general ed. of A. L. Stempkovsky. M. IPPM RAS. 2010. Pp. 466–471. Available at: <http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf>
4. Crochier R. E., Oppenheim A. V. The analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. V. 63. № 4. P. 581–595. DOI: 10.1109/PROC.1975.9793. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1451723/>.
5. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. P. 282–285. DOI: 10.1109/EWDTs.2010.5742083. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742083/>.
6. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-

20 Sept. 2010. P. 156–159. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742051. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742051/>.

7. *Mitra S. K., Sagar A. D.* Additional canonic realization of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1974. Vol. CAS-21. Issue 1. P. 135–136. DOI: 10.1109/TCS.1974.1083795. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1083795/>.

8. *Mitra S. K., Sherwood R. J.* Canonic realizations of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. Vol. AU-20. Issue 3. P. 185–194. DOI: 10.1109/TAU.1972.1162375. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162375/>.

9. *Mitra S. K., Sherwood R. J.* Digital Ladder Networks // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. 1973. Vol AU-21. Issue 1. P. 30–36. DOI: 10.1109/TAU.1973.1162423. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162423/>