

## Моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойной удлиненной пластины с наследственно упругим внутренним слоем

**В. М. Шишкин<sup>1</sup>, А. П. Левашов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-1237-2309.

E-mail: tism1@rambler.ru

<sup>2</sup> кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: 670094@rambler.ru

**Аннотация.** Разработана конечно-элементная методика моделирования статической реакции при изгибе трехслойной удлиненной пластины с идеально упругими несущими слоями и внутренним наследственно упругим слоем. Несущие слои работают в рамках гипотез Кирхгоффа – Лява, внутренний слой находится в состоянии чистого поперечного сдвига. Реологические свойства материала внутреннего слоя при сдвиге учитываются интегральным уравнением теории наследственной вязкоупругости с ядром релаксации Колтунова – Ржаницына. Получена система разрешающих уравнений для определения мгновенных и временных узловых перемещений пластины. Рассмотрен пример расчета трехслойной удлиненной пластины с несущими слоями из алюминиевого сплава Д16АТ и внутренним резиновым слоем, показывающий существенное увеличение прогиба пластины за сравнительно небольшой отрезок времени по сравнению с ее мгновенным прогибом, обусловленное кратковременной ползучестью резины при сдвиге.

**Ключевые слова:** трехслойная пластина; конечный элемент; интегральное уравнение; ядро релаксации.

Трехслойные конструкции находят широкое применение во многих отраслях, включая авиастроение, судостроение, строительство и др. Такие конструкции обычно состоят из двух высокопрочных несущих наружных слоев и расположенного между ними легкого заполнителя. Несущие слои предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Заполнитель, служащий для образования единой конструкции, обеспечивает перераспределение напряжений между несущими слоями. В качестве заполнителя широко используются различные полимерные материалы (пенопласт, полиуретан, резина), которые способны проявлять свойства ползучести при деформациях поперечного сдвига.

Рассматривается трехслойная удлиненная пластина, состоящая по толщине из двух несущих слоев и вязкоупругого внутреннего слоя, обладающего наследственно упругими свойствами. Считается, что внешние слои являются идеально упругими и работают в рамках классических гипотез Кирхгоффа – Лява, внутренний наследственно упругий слой находится в условиях поперечного сдвига. При моделировании напряженно-деформированного состояния пластины учитывается временной фактор, обусловленный ползучестью материала внутреннего слоя. Нормальные напряжения  $\sigma(t)$  в несущих слоях пластины связаны деформацией  $\varepsilon(t)$  линейной зависимостью (законом Гука)

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \quad (1)$$

где  $E$  – мгновенный модуль упругости материала при растяжении-сжатии. Связь касательных напряжений  $\tau(t)$  с углом поперечного сдвига  $\gamma(t)$  внутреннего слоя учитывается линейным уравнением теории наследственной вязкоупругости [3]:

$$\tau(t) = G \left[ \gamma(t) - \int_0^t R(t-v)\gamma(v) dv \right]. \quad (2)$$

Здесь  $t$  – время наблюдения,  $v$  – время, предшествующее моменту наблюдения,  $R(t-v)$  – функция влияния угла сдвига  $\gamma(v)$  на напряжение  $\tau(t)$  (ядро релаксации).

Деформации несущих слоев и угол поперечного сдвига внутреннего слоя элемента определяются геометрическими зависимостями

$$\varepsilon(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -0,5h_2\theta(t) - z_1 \frac{\partial w(t)}{\partial x} \right) = -0,5h_2\theta'(t) - z_1 w''(t),$$

$$\gamma(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial x} + \frac{\partial u(t)}{\partial z_2} = w'(t) - \theta(t). \tag{3}$$

Здесь  $w(t)$  – прогиб пластины,  $\theta(t)$  – угол поворота поперечного сечения внутреннего слоя.

Для построения геометрической модели пластины используется трехслойный конечный элемент (рис. 1). Узловыми перемещениями элемента являются прогибы  $w_1, w_2$ ; углы поворота  $\varphi_1, \varphi_2$  поперечных сечений несущих слоев и углы поворота  $\theta_1, \theta_2$  поперечных сечений внутреннего слоя. Отмеченные перемещения представляются вектором  $\{r^{(e)}(t)\} = \{w_1 \varphi_1 \theta_1 w_2 \varphi_2 \theta_2\}$ .

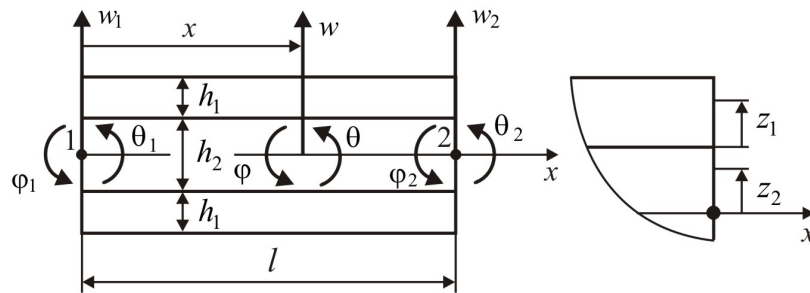


Рис. 1. Трехслойный конечный элемент

Прогиб  $w$  и угол поворота  $\theta$  в пределах элемента представляются независимыми аппроксимациями

$$w = \{N\}^T \{r^{(e)}(t)\}, \quad \theta = \{S\}^T \{r^{(e)}(t)\}, \tag{4}$$

где

$$\{N\} = \{N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \ 0\}, \quad \{S\} = \{0 \ 0 \ S_1 \ 0 \ 0 \ S_2\},$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3},$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad S_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad S_2 = \frac{x}{l}.$$

Подставляя данные аппроксимации в зависимости (1) и (2), получаем связь деформации  $\varepsilon(t)$  и угла сдвига  $\gamma(t)$  с узловыми перемещениями  $\{r^{(e)}(t)\}$  конечного элемента:

$$\varepsilon(t) = -(0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) \{r^{(e)}(t)\}; \tag{5}$$

$$\gamma(t) = (\{N'\}^T - \{S\}^T) \{r^{(e)}(t)\}. \tag{6}$$

С учетом (5) и (6) зависимости (1) и (2) принимают вид

$$\sigma(t) = -E(0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) \{r^{(e)}(t)\}. \tag{7}$$

$$\tau(t) = G(\{N'\}^T - \{S\}^T) [\{r^{(e)}(t)\} - \int_0^t R(t-v) \{r^{(e)}(v)\} dv]. \tag{8}$$

Для получения уравнений равновесия конечного элемента воспользуемся принципом Лагранжа

$$\delta A = \delta A_\sigma + \delta A_\tau + \delta A_P = 0. \tag{9}$$

Здесь  $\delta A_\sigma, \delta A_\tau$  – возможная работа напряжений  $\sigma(t)$  и  $\tau(t)$  в слоях элемента на соответствующих им возможных деформациях  $\delta\varepsilon$  и  $\delta\gamma$ ;  $\delta A_P$  – возможная работа внешних сил элемента. Величины  $\delta\varepsilon$  и  $\delta\gamma$  определяются как изохронные вариации зависимостей (5) и (6):

$$\delta\varepsilon = -(0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) \{\delta r^{(e)}(t)\}; \quad (10)$$

$$\delta\gamma = (\{N'\}^T - \{S\}^T) \{\delta r^{(e)}(t)\}. \quad (11)$$

Возможная работа напряжений  $\sigma(t)$  в несущих слоях элемента определяется выражением

$$\delta A_\sigma = -2b \int_0^l \int_0^{h_1} \delta\varepsilon \sigma(t) dz_1 dx.$$

Здесь  $b$  – ширина элемента. Внося сюда зависимости (7) и (10), получаем

$$\delta A_\sigma = -2bE \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \int_0^l \int_0^{h_1} (0,5h_2 \{S'\} + z_1 \{N''\}) (0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) dz_1 dx \{r^{(e)}(t)\}.$$

Полученному выражению можно придать вид

$$\delta A_\sigma = -\{\delta r^{(e)}(t)\}^T [K^{(e)}]_1 \{r^{(e)}(t)\}, \quad (12)$$

где

$$[K^{(e)}]_1 = 2bE \int_0^l \int_0^{h_1} (0,5h_2 \{S'\} + z_1 \{N''\}) (0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) dz_1 dx -$$

вклад несущих слоев в матрицу жесткости элемента.

Возможная работа касательных напряжений  $\tau(t)$  в наследственно-упругом внутреннем слое определяется выражением

$$\delta A_\tau = -bh_2 \int_0^l \delta\gamma \tau(t) dx.$$

Подставляя сюда зависимости (8) и (11), получаем

$$\begin{aligned} \delta A_\tau = & -Gbh_2 \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \int_0^l (\{N'\} - \{S\}) (\{N'\}^T - \{S\}^T) dx \{r^{(e)}(t)\} + \\ & + Gbh_2 \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \int_0^l (\{N'\} - \{S\}) (\{N'\}^T - \{S\}^T) dx \int_0^t R(t-\nu) \{r^{(e)}(\nu)\} d\nu. \end{aligned}$$

Выражению для  $\delta A_\tau$  можно придать вид

$$\delta A_\tau = -\{\delta r^{(e)}(t)\}^T [K^{(e)}]_2 \{r^{(e)}(t)\} + \{\delta r^{(e)}(t)\}^T [K^{(e)}]_2 \int_0^t R(t-\nu) \{r^{(e)}(\nu)\} d\nu, \quad (13)$$

где

$$[K^{(e)}]_2 = Gbh_2 \int_0^l (\{N'\} - \{S\}) (\{N'\}^T - \{S\}^T) dx -$$

вклад внутреннего слоя в матрицу жесткости элемента.

При вычислении возможной работы  $\delta A_p$  считается, что внешние силы приведены к узлам элемента и представляются вектором  $\{P^{(e)}\}$ :

$$\delta A_p = \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \{P^{(e)}\}. \quad (14)$$

Подставляя (12), (13) и (14) в выражение (9) и учитывая независимость компонент вектора  $\{\delta r^{(e)}(t)\}$ , получаем систему уравнений

$$[K^{(e)}] \{r^{(e)}(t)\} = \{P^{(e)}\} + [K^{(e)}]_2 \int_0^t R(t-\nu) \{r^{(e)}(\nu)\} d\nu. \quad (15)$$

Здесь  $[K^{(e)}] = [K^{(e)}]_1 + [K^{(e)}]_2$  – полная матрица жесткости конечного элемента.

Объединяя уравнения (15) по направлениям общих для смежных элементов узловых перемещений, получаем уравнения равновесия конечно-элементной модели пластины:

$$[K]\{r(t)\} = \{P\} + [K]_2 \int_0^t R(t-v)\{r(v)\} dv, \quad (16)$$

где  $[K]$ ,  $[K]_2$  – соответственно полная матрица жесткости отмеченной модели и вклад в нее внутреннего наследственно упругого слоя;  $\{P\}$  – вектор внешних узловых сил;  $\{r(t)\}$ ,  $\{r(v)\}$  – векторы мгновенных узловых перемещений соответственно в моменты времени  $t$  и  $v \leq t$ . Решение системы (16) можно представить в виде

$$\{r(t)\} = \{r_m\} + \{r_p(t)\},$$

где

$$\{r_m\} = [K]^{-1}\{P\} -$$

мгновенные узловые перемещения пластины от нагрузки  $\{P\}$ ;

$$\{r_p(t)\} = [K]^{-1}[K]_2 \int_0^t R(t-v)\{r(v)\} dv - \quad (17)$$

вектор, учитывающий ползучесть среднего слоя пластины. Для практического получения зависимости  $\{r_p(t)\}$  в некотором временном интервале  $[0; t_n]$  данный интервал необходимо разделить на несколько шагов  $\Delta t$  и построить решение (17) для каждого момента времени  $t_k$ , входящего в этот интервал:

$$\{r_p(t_k)\} = [K]^{-1}[K]_2 \int_0^{t_k} R(t_k-v)\{r(v)\} dv. \quad (20)$$

Будем считать, что произведение  $R(t_k-v)\{r(v)\}$  на каждом временном шаге  $\Delta t$  диапазона  $[0; t_k]$  постоянно и равно его значению в середине шага. Тогда вместо (20) можно записать приближенное выражение

$$\{r_p(t_k)\} = [K]^{-1}[K]_2 \Delta t \sum_{j=1}^k R(t_k-v_j)\{r(v_j)\}. \quad (21)$$

В качестве примера рассматривается трехслойная консольно закрепленная удлиненная пластина с геометрическими параметрами:  $L = 500$  мм;  $b = 30$  мм;  $h_1 = 0,9$  мм;  $h_2 = 2$  мм (рис. 2). Материал несущих слоев – алюминиевый сплав Д16АТ:  $E = 7,2 \cdot 10^{10}$  Па. Материал внутреннего слоя – техническая резина:  $G = 1,65 \cdot 10^6$  Па. На свободном конце пластины действует постоянная сила  $P = 3,91$  Н в течение времени  $t_p = 120$  с. Пластина разделена в продольном направлении на 20 элементов одинаковой длины. Наследственно-упругие свойства резины при сдвиге определяются уравнением (2). В качестве ядра релаксации  $R(t-v)$  выбрано ядро Колтунова –Ржаницына с тремя реологическими параметрами [1; 2]:

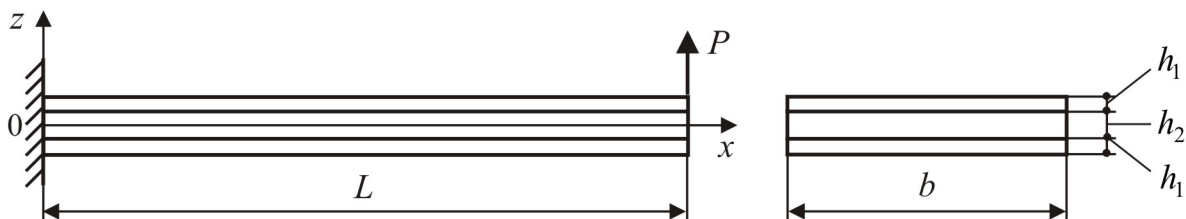


Рис. 2. Расчетная схема трехслойной пластины

$$R(t-v) = C(t-v)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-v)} \quad (C > 0, 0 < \alpha < 1, \beta > 0).$$

Здесь  $C$  – параметр вязкости,  $\alpha$  – параметр сингулярности,  $\beta$  – параметр затухания, имеющие значения:  $C = 0,046$ ;  $\alpha = 0,278$ ;  $\beta = 0,034$ .

На рис. 3 приведены мгновенный и временной прогибы свободного конца пластины. Наблюдается постепенный рост временного прогиба, обусловленный кратковременной ползучестью резины при сдвиге, с дальнейшей стабилизацией его по мере возрастания времени  $t$ , что объясняется сдерживающим действием несущих слоев пластины. На рис. 4 приведены мгновенные и временные касательные напряжения в среднем слое пластины. На рис. 5 приведены мгновенные и временные поперечные силы в одном несущем слое пластины. Релаксация (временное уменьшение) касательных напряжений при сдвиге, как и следовало ожидать, приводит к увеличению поперечных сил в несущих слоях пластины при неизменной суммарной по слоям поперечной силе.

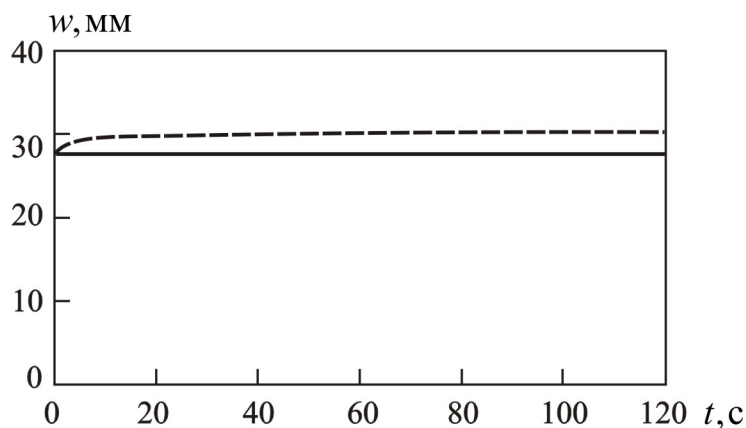


Рис. 3. Мгновенный (сплошная линия) и временной (пунктирная линия) прогибы свободного конца пластины

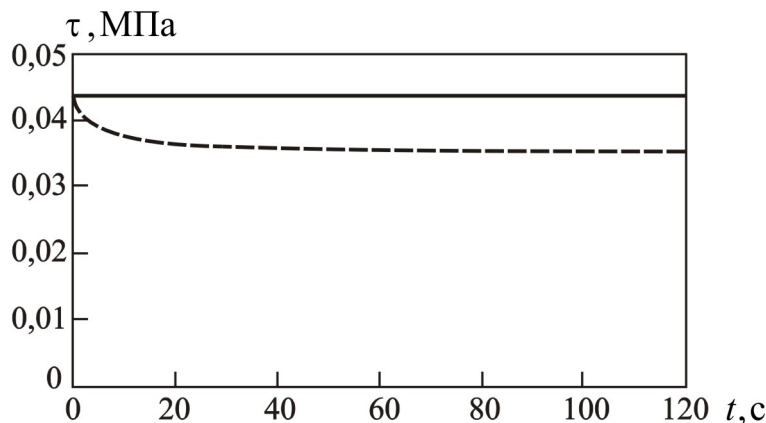


Рис. 4. Мгновенные (сплошная линия) и временные (пунктирная линия) касательные напряжения в среднем слое пластины

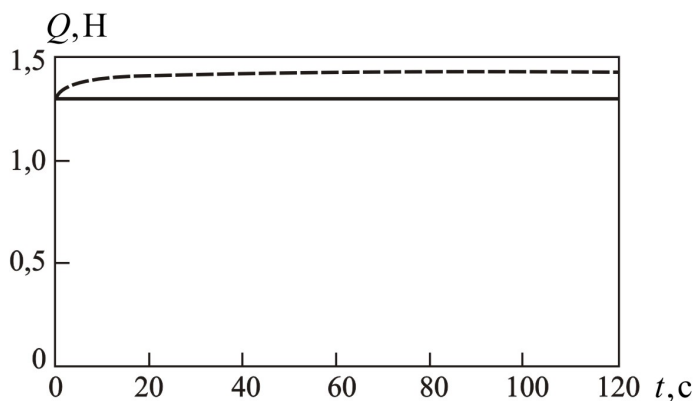


Рис. 5. Мгновенная (сплошная линия) и временная (пунктирная линия) поперечные силы в одном несущем слое пластины

### Список литературы

1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М. : Высш. шк., 1976. 277 с.
2. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / М. А. Колтунов и др. М. : Машиностроение, 1983. 239 с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.

## Stress-strain state modeling of three-layer elongated plate with inherently elastic inner layer

V. M. Shishkin<sup>1</sup>, A. P. Levashov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Doctor of technical sciences, professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-1237-2309. E-mail: tism1@rambler.ru

<sup>2</sup> PhD of technical sciences, associate professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: 670094@rambler.ru

**Abstract:** a finite-element technique for simulating a static reaction is developed for the bending of a three-layer elongated plate with ideally elastic support layers and an internal hereditarily elastic layer. Bearing layers work within the framework of Kirchhoff-Love hypotheses, the inner layer is in a state of pure transverse shear. The rheological properties of the material of the inner layer under shear are taken into account by the integral equation of the theory of hereditary viscoelasticity with the Koltunov-Rzhanitsyn relaxation kernel. A system of resolving equations is obtained to determine the instantaneous and temporal nodal displacements of the plate. An example is considered of calculating a three-layer elongated plate with supporting layers of aluminum alloy D16AT and an inner rubber layer showing a substantial increase in the deflection of the plate in a relatively short time period compared to its instantaneous deflection due to short-term creep of the rubber under shear.

**Keywords:** three-layer plate; the final element; integral equation; the core of relaxation.

### References

1. Koltunov M. A. *Polzuchest' i relaksaciya* [Creep and relaxation]. M. Vyssh. shk. 1976. 277 p.
2. *Prochnostnye raschety izdelij iz polimernyh materialov* – Strength calculations of polymer materials products / M. A. Koltunov et al. M. Mechanical engineering. 1983. 239 p.
3. *Rabotnov YU. N. Polzuchest' ehlementov konstrukcij* [Creep of structural elements]. M. Nauka. 1966. 752 p.