

Вятский государственный университет

Advanced Science

Н а у ч н ы й ж у р н а л

№ 1

Киров
2018

ББК 74.48я52

A22

Главный редактор

Е. М. Вечтомов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ,
ORCID: 0000-0002-3490-2956

Заместитель главного редактора

Д. Е. Прозоров, доктор технических наук, доцент, профессор, ВятГУ, ORCID: 0000-0002-3577-8838

Ответственный секретарь

Е. Н. Лубягина, кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ, ORCID: 0000-0001-5071-6208

Состав редакционной коллегии:

Алешкин А. В., доктор технических наук, профессор, директор, ФГБНУ «ФАНЦ Северо-Востока» (г. Киров)

Варанкина В. И., кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0003-4166-1182

Губин И. В., кандидат технических наук, доцент, директор, Политехнический институт, ВятГУ (г. Киров)

Джиган В. И., доктор технических наук, доцент, главный научный сотрудник, Московский исследовательский центр ООО «Техкомпания Хуавэй» (г. Москва)

Калинин С. И., доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров)

Кожухов И. Б., доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва)

Котельников Е. В., кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

Красных А. А., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

Махнев А. А., доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий отделом, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург)

Непейвода Н. Н., доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт программных систем РАН (г. Переславль-Залесский)

Одинец В. П., доктор физико-математических наук, профессор, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар)

Окулов С. М., доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров)

Петров Е. П., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров),
ORCID: 0000-0002-0336-1341

Сидоров В. В., кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник, ВятГУ (г. Киров)

Страбыкин Д. А., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

Флегентов И. В., доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-6569-5654

Хлебов А. Г., кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

Частиков А. В., доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-1998-7787

Черепанов В. В., доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-5244-7061

Чермных В. В., доктор физико-математических наук, доцент, профессор, ВятГУ (г. Киров)

Чупраков Д. В., кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ (г. Киров)

Шатров А. В., доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

Научный журнал «Advanced science»

**как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС 77-67556 от 31 октября 2016 г.)**

Учредитель журнала ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Адрес издателя/редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Редактор **О. И. Коробкова**

Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**

Редактор выпускающий **А. Н. Петрова**

Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

© Вятский государственный университет (ВятГУ), 2018

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Абрамова И. В., Шилова З. В.</i> Аспект устранения одной из проблем построения эконометрической модели	4
<i>Калинин С. И.</i> О достаточных условиях гармонической выпуклости функции	9
<i>Лубягина Е. Н., Тимшина Л. В., Широков Д. В.</i> Визуализация правильных n -мерных многогранников.....	13
<i>Пушкарев И. А., Огородов А. В.</i> Разработка программного и методического обеспечения для проведения практических занятий по конструктивной теории машин тьюринга.....	21
<i>Рассадин А. Э., Степанов А. В., Фомин Л. А.</i> Новое явное решение уравнения Кардара – Паризи – Цванга и его применения.....	28

ФИЗИКА

<i>Кузьмин В. А., Заграй И. А., Маратканова Е. И., Шмакова Н. А.</i> Тепловое излучение факела модельного жидкостного ракетного двигателя	34
<i>Левашов А. П., Тимофеев Б. Л.</i> Конечно-элементное моделирование продольных колебаний упругого стержня при соударении его с неподвижной преградой	39
<i>Шишкин В. М., Левашов А. П.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойной удлиненной пластины с наследственно упругим внутренним слоем.....	43

ЭНЕРГЕТИКА

<i>Вихарев А. П., Репкина Н. Г.</i> Анализ потерь активной мощности в воздушных, кабельных (СПЭ) и газоизолированных ЛЭП высокого напряжения.....	49
<i>Репкина Н. Г., Репкин Д. А., Вихарев А. П.</i> Количественная оценка способов организации оперативной связи между энергообъектами	54

РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

<i>Наумович Т. В.</i> Транспонирование лестничных структур цифровых фильтров, основанных на разложении передаточной функции в цепную дробь.....	60
---	----

Аспект устранения одной из проблем построения эконометрической модели

И. В. Абрамова¹, З. В. Шилова²

¹ кандидат педагогических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин, Пермский государственный национальный исследовательский университет. Россия, г. Пермь.

E-mail: irena-leontio@mail.ru

² кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: zoya@soi.su

Аннотация. Центральной проблемой любого эконометрического исследования является построение эконометрической модели, этот аспект объясняется тем, что от качества модели зависит достоверность и обоснованность результатов анализа тенденций развития, прогнозов изучаемых явлений и процессов, а также достоверность выводов исследования. В эконометрических исследованиях предполагается, что закономерности моделируемого процесса складываются под влиянием других явлений, факторов. В данной статье рассматривается один из аспектов эффективного построения эконометрической модели – уравнения множественной регрессии. Авторами рассмотрены базовые понятия эконометрики: проблема мультиколлинеарности, мультиколлинеарные независимые переменные, коэффициенты корреляции, коэффициенты эластичности, стандартизованные коэффициенты регрессии. Выделены признаки, свидетельствующие о наличии мультиколлинеарности, достаточно подробно осуществлен обзор каждого признака, позволяющего выявить мультиколлинеарность множественной регрессии. В данной статье рассматривается один из аспектов эффективного построения эконометрической модели – уравнения множественной регрессии. Авторами рассмотрены базовые понятия эконометрики: проблема мультиколлинеарности, мультиколлинеарные независимые переменные, коэффициенты корреляции, коэффициенты эластичности, стандартизованные коэффициенты регрессии. Выделены признаки, свидетельствующие о наличии мультиколлинеарности, достаточно подробно осуществлен обзор каждого признака, позволяющего выявить мультиколлинеарность множественной регрессии. Отбор материала обусловлен необходимостью теоретического и практического обоснования его изучения студентами экономических направлений подготовки, а также будет полезен специалистам, занимающимся построением эконометрических моделей, пригодных для дальнейшего анализа и прогнозирования.

Ключевые слова: эконометрическая модель, мультиколлинеарность, коэффициенты корреляции, коэффициенты эластичности, стандартизованные коэффициенты регрессии.

Одним из основных препятствий эффективного построения эконометрической модели – уравнения множественной регрессии – является мультиколлинеарность независимых переменных.

Заметим, что включение в регрессионную модель мультиколлинеарных независимых переменных приводит к тому, что коэффициенты множественной регрессии теряют экономический смысл и их оценки ненадежны, они меняются с изменением объема наблюдений (не только по величине, но и по знаку), что делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

Выделим признаки, свидетельствующие о наличии мультиколлинеарности. Во-первых, коэффициенты регрессии имеют неправильные с точки зрения экономической теории знаки или неоправданно большие по модулю значения.

Во-вторых, наблюдается при незначительном изменении первоначальных статистических данных существенное изменение оценок коэффициентов регрессии, вплоть до изменения их знаков.

В-третьих, коэффициенты регрессии оказываются статистически незначимыми по t -критерию Стьюдента, при этом сама модель по F -критерию Фишера является статистически значимой.

В-четвертых, множественные коэффициенты детерминации одной из независимых переменных и некоторой группой других имеют значения более 0,6. В-пятых, определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между независимыми переменными равен нулю или его значение очень близко к нулю:

$$Det_r = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad Det_r \rightarrow 0$$

В-шестых, коэффициенты парной корреляции имеют по модулю значения большие 0,75.

В-седьмых, коэффициенты частной корреляции высоких порядков имеют по модулю большие значения.

$$r_{yxix1...xp} = \frac{r_{yxix1...x(p-1)} - r_{yxpx1...x(p-1)} \cdot r_{xixpx1...x(p-1)}}{\sqrt{(1-r_{yxpx1...x(p-1)}^2)(1-r_{xixpx1...x(p-1)}^2)}}$$

В-восьмых, выполняют следующие шаги:

1) под каждым столбцом матрицы парных коэффициентов корреляций вычисляют сумму по модулю, используя математическую функцию **ABS** табличного процессора MS Excel, каждое значение суммы соответствует определенной независимой (объясняющей) переменной;

2) из найденных сумм модулей элементов матрицы парных корреляций выбирают максимальную, она и выявит номер той независимой переменной, который наиболее коррелирует с остальными переменными (зависимость от остальных объясняющих переменных).

При обнаружении мультиколлинеарности необходимо подтвердить ее достоверность посредством проверки статистической гипотезы:

Нулевая гипотеза $H_0: Det_r = 1$, альтернативная гипотеза $H_1: Det_r = 0$.

$$Det_r = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Находим эмпирическое значение критерия $K_{эмп} = n - 1 - \frac{1}{6} \cdot (2p + 5) \cdot \lg(Det_r)$, имеющее распределение, приближенное к χ^2 .

Критическое значение критерия находим с помощью статистической функции **ХИ2.ОБР.ПХ** для уровня значимости α и степени свободы $k = \frac{p \cdot (p-1)}{2}$ посредством табличного процессора MS Excel.

Если $K_{эмп} \geq K_{крит}$, то гипотезу H_0 отклоняем и мультиколлинеарность считаем доказанной. Если $K_{эмп} < K_{крит}$, гипотезу H_0 принимаем и утверждаем, что мультиколлинеарность отсутствует.

В случае достоверного подтверждения мультиколлинеарности выделяем наиболее зависимую объясняющую переменную, для этого используем второй шаг восьмого пункта (см. выше) или сравниваем по модулю стандартизованные коэффициенты, коэффициенты эластичности.

Далее осуществляем устранение мультиколлинеарности: первый путь состоит в исключении из модели одного или нескольких независимых переменных; второй связан с преобразованием независимых переменных, при котором уменьшается корреляция между ними; третий представляет собой переход к уравнениям регрессии, отражающим как влияние независимых переменных, так и их взаимодействие.

Рассмотрим пример. Отметим, что данная задача приведена в классическом практикуме по эконометрике без решения [1, с. 96–97]. Пусть по данным, представленным в табл. 1, изучается зависимость индекса человеческого развития y от переменных:

x_1 – ВВП 1997 г., % к 1990 г.;

x_2 – расходы на конечное потребление в текущих ценах, % к ВВП;

x_3 – расходы домашних хозяйств, % к ВВП;

x_4 – валовое накопление, % к ВВП.

Таблица 1

y	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
0,904	115,0	75,5	56,1	25,2
0,922	123,0	78,5	61,8	21,8
0,763	74,0	78,4	59,1	25,7
0,923	111,0	77,7	63,3	17,8
0,918	113,0	84,4	64,1	15,9
0,906	110,0	75,9	57,0	22,4
0,905	119,0	76,0	50,7	20,6
0,545	146,0	67,5	57,1	25,2
0,894	113,0	78,2	62,0	20,7
0,900	108,0	78,1	61,8	17,5
0,932	113,0	78,6	58,6	19,7
0,740	71,0	84,0	71,7	18,5
0,701	210,0	59,2	48,0	42,4
0,744	94,0	90,2	63,9	23,0
0,921	118,0	72,8	59,1	20,2
0,927	130,0	67,7	47,5	25,2
0,802	127,0	82,6	65,3	22,4
0,747	61,0	74,4	53,2	22,7
0,927	117,0	83,3	67,9	18,1
0,721	46,0	83,7	61,7	20,1
0,913	107,0	73,8	52,9	17,3
0,918	110,0	79,2	59,9	16,8
0,833	99,2	71,5	51,5	29,9
0,914	101,0	75,3	61,2	20,3
0,923	105,0	79,0	53,1	14,1

Построим регрессионную модель:

$$y = 1,112 + 0,001 \cdot x_1 + 0,004 \cdot x_2 - 0,007 \cdot x_3 - 0,014 \cdot x_4.$$

С увеличением ВВП 1997 г. на 1% к 1990 г. при неизменных остальных независимых переменных индекс человеческого развития увеличится на 0,001%. С увеличением расходов на конечное потребление в текущих ценах на 1% к ВВП при неизменных остальных независимых переменных индекс человеческого развития увеличится на 0,004%. С уменьшением расходов домашних хозяйств на 1% к ВВП при неизменных остальных независимых переменных индекс человеческого развития уменьшится на 0,007%. С уменьшением валового накопления на 1% к ВВП при неизменных остальных независимых переменных индекс человеческого развития уменьшится на 0,014%. Уменьшение валового накопления идет большими темпами, чем увеличение ВВП и расходов на конечное потребление и уменьшение расходов домашних хозяйств.

Выполним сравнительную оценку силы связи независимых переменных с зависимой переменной с помощью средних (общих) коэффициентов эластичности и стандартизованных коэффициентов (табл. 2) [2].

$$\bar{\varepsilon}_{x_i} = \frac{b_i \cdot \bar{x}_i}{\bar{y}} \quad \varepsilon_{x_i} = b_i x_i / (a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4) \quad \beta_i = b_i \sigma(x_i) / \sigma(y).$$

Таблица 2

Независимые переменные	Эластичность		Стандартизованные коэффициенты	
	Э ₁	Э ₂	β ₁	β ₂
x ₁	Э ₁	0,172	β ₁	0,400
x ₂	Э ₂	0,340	β ₂	0,236
x ₃	Э ₃	-0,474	β ₃	-0,411
x ₄	Э ₄	-0,346	β ₄	-0,750

Стандартизованные коэффициенты (как и эластичность) позволили ранжировать влияние факторов на результат. Наименее весомый коэффициент – β₂. Наиболее – β₄. Если перейти к физической интерпретации, то наиболее весомым фактором является валовое накопление, а наименее весомым – расходы на конечное потребление.

Найдем парные коэффициенты корреляции и построим матрицу парных коэффициентов с помощью надстройки **Пакет анализа** табличного процессора MS Excel (см. табл. 3):

Таблица 3

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	-0,6290	-0,3651	0,5411
x_2	-0,6290	1	0,7650	-0,6671
x_3	-0,3651	0,7650	1	-0,4963
x_4	0,5411	-0,6671	-0,4963	1
сумма	2,5352	3,0611	2,6264	2,7045

Вычислим значение определителя, соответствующего матрице парных коэффициентов корреляции, подтвердим наличие мультиколлинеарности посредством проверки статистической гипотезы.

Аргументы функции

МОПРЕД

Массив: B28:E31 = {1;-0,629;-0,3651;0,5411;-0,629;1;0,765;-0,6671;-0,3651;0,765;1;-0,4963;0,5411;-0,6671;-0,4963;1}

= 0,125793558

Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

Массив: числовой массив с равным количеством строк и столбцов, диапазон ячеек или массив.

Значение: 0,125793558

[Справка по этой функции](#)

OK Отмена

$Det_r = 0,125794$. Эмпирическое значение критерия:

$$K_{эмп} = 25 - 1 - \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 4 + 5) \cdot \lg(0,125794) = 25,95074.$$

Критическое значение критерия находим с помощью статистической функции ХИ2.ОБР.ПХ для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и степени свободы $k = 6$, его значение равно 12,59158724, и, так как $K_{эмп} \geq K_{крит}$, то мультиколлинеарность считаем доказанной.

Из данной матрицы (см. табл. 3) наблюдаем, что две из четырех независимых переменных мультиколлинеарны ($r_{x_2, x_3} > 0,75$), – это x_2 и x_3 . Проведем дополнительные исследования. Из

найденных сумм модулей элементов матрицы парных корреляций выберем максимальную – это 3,0611, она соответствует независимой переменной x_2 . Также сравним стандартизованные коэффициенты, взятые по модулю, при переменных x_2 и x_3 , получаем, что можно отбросить x_2 без ущерба информативности модели, тогда новое уравнение регрессии будет выглядеть следующим образом:

$$y = 1,325 + 0,001 \cdot x_1 - 0,005 \cdot x_3 - 0,015 \cdot x_4.$$

Построим матрицу парных коэффициентов для новой регрессионной модели посредством надстройки **Пакет анализа** табличного процессора MS Excel (табл. 4).

Таблица 4

	y	x_1	x_3	x_4
y	1			
x_1	-0,00434	1		
x_3	-0,00433	-0,36511	1	
x_4	-0,48711	0,54107	-0,49626	1

В рассматриваемой части нового получившегося поля корреляции нет коэффициентов, больших 0,75. Это значит, что мы избавились от мультиколлинеарности путем упрощения модели (отбросили одну из независимых переменных). В нашем случае это расходы на конечное потребление в текущих ценах.

Найдем стандартизованные коэффициенты для вновь построенной модели (табл. 5).

Таблица 5

β_1	β_3	β_4
0,328	-0,284	-0,806

Вычислим коэффициент детерминации для вновь построенной регрессионной модели:

$$R^2 = \beta_1 \cdot r_{yx_1} + \beta_3 \cdot r_{yx_3} + \beta_4 \cdot r_{yx_4},$$

$R^2 = 0,328 \cdot (-0,00434) + (-0,284) \cdot (-0,00433) + (-0,806) \cdot (-0,48711) = 0,39$, что можно

интерпретировать как зависимость индекса человеческого развития на 40% от трех факторов: ВВП 1997 г., расходы домашних хозяйств, валовое накопление. На другие факторы, не учтенные в модели, приходится 60%. Отсюда следует, что модель не совсем адекватно описывает данные выборки. Здесь мы рекомендуем увеличить объем выборки, а также дополнительно исследовать регрессионную модель на гетероскедастичность и автокорреляцию.

Таким образом, если основная задача модели – прогноз будущих значений зависимой переменной, то при достаточно большом коэффициенте детерминации R^2 (больше 0,9) наличие мультиколлинеарности обычно не сказывается на прогнозных качествах модели, при условии, что и в будущем между коррелированными переменными сохраняются те же соотношения.

В свою очередь, если же целью исследования является определение степени влияния каждой из независимых переменных на зависимую переменную, то наличие мультиколлинеарности, скорее всего, исказит истинные зависимости между переменными, в этом случае наличие мультиколлинеарности является серьезной проблемой и требует устранения из регрессионной модели.

Список литературы

1. Елисеева И. И., Курышева С. В., Гордеенко Н. М. и др. Практикум по эконометрике : учеб. пособие. М. : Финансы и статистика, 2003. 192 с.
2. Шилова З. В. Эконометрика : учеб. пособие. Саратов : Ай Пи ар Букс, 2015. 148 с. URL: <http://www.iprbookshop.ru/33864>.

Aspect of solving one of the problems of constructing econometric model

I. V. Abramova¹, Z. V. Shilova²

¹ PhD of pedagogical sciences, associate professor of mathematical and natural sciences, Perm State National Research University. Russia, Perm. E-mail: irena-leontio@mail.ru

² PhD of pedagogical sciences, associate professor of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: zoya@soi.su

Abstract: The Central problem of any econometric study is the construction of econometric model, this aspect is due to the fact that the quality of the model depends on the reliability and validity of the results of the analysis of development trends, forecasts of phenomena and processes under study, as well as the reliability of the findings of the study. In econometric studies it is assumed that the regularities of the simulated process are influenced by other phenomena, factors. This article considers one of the aspects of efficient construction of econometric model – multiple regression equation. The authors consider the basic concepts of econometrics: the problem of multicollinearity, multicollinear independent variables, correlation coefficients, elasticity coefficients, standardized regression coefficients. The signs testifying to the presence of multicollinearity are allocated, the review of each sign allowing to reveal multicollinearity of multiple regression is carried out in sufficient detail. The selection of the material is due to the need for theoretical and practical justification of its study by students of economic areas of training, and will be useful to professionals engaged in the construction of econometric models suitable for further analysis and forecasting.

Keywords: econometric model, multicollinearity, correlation coefficients, elasticity coefficients, standardized regression coefficients.

References

1. Eliseeva I. I., Kurysheva S. V., Gordeenko N. M. and others. *Praktikum po ehkonometrike : ucheb. posobie* [Workshop on econometrics: tutorial]. M. Finance and statistics. 2003. 192 p.
2. SHilova Z. V. *EHkonometrika : ucheb. posobie* [Econometrics: tutorial]. Saratov. AI PI ar Books. 2015. 148 p. Available at: <http://www.iprbookshop.ru/33864>

О достаточных условиях гармонической выпуклости функции

С. И. Калинин

доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной и компьютерной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. В работе формулируются определения понятий гармонически выпуклой, строго гармонически выпуклой, гармонически вогнутой, строго гармонически вогнутой функций. Рассматривается геометрическая характеристика таких функций в терминах расположения точек графика функции под или над так называемой гиперболической дугой в зависимости от вида гармонической выпуклости. Приводятся примеры гармонически выпуклых (вогнутых) функций, в частности функций, являющихся разрывными на рассматриваемых промежутках. Главным результатом работы является вывод достаточных условий строгой и нестрогой гармонической выпуклости или вогнутости функции на промежутке в терминах ее производных первого и второго порядков. Получен своеобразный аналог классического утверждения основ анализа о достаточных условиях строгой выпуклости и строгой вогнутости гладкой функции в терминах знака ее второй производной.

Ключевые слова: гармонически выпуклая функция, гармонически вогнутая функция, гиперболическая дуга.

Воспроизведем определение понятия гармонически выпуклой функции (см., напр., [2; 3]).

Пусть $l \subset (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – произвольный промежуток числовой прямой Ox и $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ – функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1. Функцию f назовем *гармонически выпуклой* на l , если для любого отрезка $[a; b] \subset l$ и любого числа $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1} + (1 - \lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (1)$$

Если в условиях определения 1 для всех $\lambda \in (0; 1)$ будет выполняться неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1} + (1 - \lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \quad (2)$$

то функцию f условимся называть *строго гармонически выпуклой* на рассматриваемом промежутке l .

Ясно, что строго гармонически выпуклая функция является гармонически выпуклой.

Аналогично определяются *гармонически вогнутая* и *строго гармонически вогнутая* функции – для этого в определяющих их неравенствах типа (1)–(2) следует использовать знаки \geq и $>$ соответственно.

Приведем примеры гармонически выпуклых и гармонически вогнутых функций, рассмотренные нами ранее в работе [1].

Функция $f(x) = c + \frac{\gamma}{x}$, где c и γ – вещественные константы, является как гармонически

выпуклой, так и гармонически вогнутой на всяком промежутке $l \subset (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Это следует из того, что для данной функции соотношение (1) обращается в равенство.

Функция $f(x) = x$, $x > 0$, является строго гармонически выпуклой, так как для любых положительных чисел a и b ($a \neq b$) и любого $\lambda \in (0; 1)$ имеем:

$$\left(\lambda a^{-1} + (1 - \lambda)b^{-1}\right)^{-1} < \lambda a + (1 - \lambda)b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda)(a^2 - 2ab + b^2) > 0.$$

Аналогично устанавливается, что функция $g(x) = x$, $x < 0$ – строго гармонически вогнутая.

В работе [1] приводится геометрическая характеристика гармонически выпуклых функций. Она заключается в следующем.

Если $f(x)$ – гармонически выпуклая на промежутке l , $0 \notin l$, функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого x , $x \in (a; b)$, выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f будет находиться не выше точки гиперболической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x .

Если же $f(x)$ – строго гармонически выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого x , $x \in (a; b)$, выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит строго ниже точки гиперболической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ с той же абсциссой x .

Обращаясь к рассуждениям в [1], легко проследить то, что приводимые утверждения обратимы.

В данных утверждениях упоминаемая гиперболическая дуга, соединяющая точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, есть кривая

$$y = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} + \frac{f(a) - f(b)}{b - a} \frac{ab}{x}. \quad (3)$$

Заметим, уравнение (3) можно переписать в виде

$$y = \frac{a(b-x)}{x(b-a)} \cdot f(a) + \frac{b(x-a)}{x(b-a)} \cdot f(b). \quad (4)$$

Правую часть (4) условимся обозначать символом $\sigma_f^{(a,b)}(x)$, подчеркивающим связь (4) с функцией f и отрезком $[a; b]$. В терминах введенного символа условие гармонической выпуклости функции f можно сформулировать следующим образом.

Функция $f(x)$ гармонически выпукла на промежутке l , $0 \notin l$, тогда и только тогда, когда для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого x , $x \in (a; b)$, выполняется условие $f(x) \leq \sigma_f^{(a,b)}(x)$. На рассматриваемом промежутке функция $f(x)$ будет строго гармонически выпуклой тогда и только тогда, когда для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого x , $x \in (a; b)$, выполняется условие $f(x) < \sigma_f^{(a,b)}(x)$.

Ясно, что аналогичные утверждения можно сформулировать и для гармонически вогнутой (в строгом или нестрогом смысле) функции.

В данном месте построим примеры гармонически выпуклых на промежутке функций, не являющихся на данном промежутке непрерывными.

Рассмотрим функцию $h(x) = \begin{cases} 0, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ Она, очевидно, в точке $x = 1$ имеет разрыв пер-

вого рода. Поскольку для нее выполняется условие $h(x) < \sigma_h^{(1,b)}(x) = \frac{b-x}{(b-1)x}$, $1 < x < b \leq 2$;

$h(x) \leq \sigma_h^{(a,b)}(x) = 0$, $1 < a < x < b \leq 2$, то h – гармонически выпуклая на отрезке $[1; 2]$ функция.

Аналогично можно обосновать, что функция $\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ является гармонически

выпуклой на промежутке $(-\infty, 0]$ и гармонически вогнутой на промежутке $[0, +\infty)$.

Поставим сейчас перед собой цель вывести достаточные условия строгой гармонической выпуклости или вогнутости непрерывной на промежутке l , $0 \notin l$, и дважды дифференцируемой внутри данного промежутка функции. Справедлива

Теорема А. Пусть $f : l \rightarrow \mathbf{R}$ – функция, непрерывная на промежутке $l \subset (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ числовой прямой Ox , дважды дифференцируемая внутри данного промежутка. Если для внутренних точек x из l выполняется условие $2xf'(x) + x^2 f''(x) > 0$, то f – строго гармонически выпуклая на промежутке l функция. Если же для таких точек выполняется условие $2xf'(x) + x^2 f''(x) < 0$, то f – строго гармонически вогнутая на рассматриваемом промежутке функция.

Доказательство. Пусть $2xf'(x) + x^2 f''(x) > 0$ для любой внутренней точки x промежутка l . Покажем, что в данном предположении для любого отрезка $[a; b] \subset l$ будет выполняться неравенство $f(x) < \sigma_f^{(a,b)}(x)$, где x – произвольная точка из интервала $(a; b)$. Это будет означать, как отмечено выше, строгую гармоническую выпуклость функции f на промежутке l .

Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) &= \frac{a(b-x)}{x(b-a)} \cdot f(a) + \frac{b(x-a)}{x(b-a)} \cdot f(b) - f(x) = \\ &= \frac{a(b-x)}{x(b-a)} \cdot (f(a) - f(x)) + \frac{b(x-a)}{x(b-a)} \cdot (f(b) - f(x)) = \\ &= \frac{(b^{-1} - x^{-1})(x^{-1} - a^{-1})}{b^{-1} - a^{-1}} \left(\frac{f(a) - f(x)}{x^{-1} - a^{-1}} + \frac{f(b) - f(x)}{b^{-1} - x^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Замечаем, что в последнем произведении в силу неравенства $a < x < b$ дробь $K(a, x, b) = \frac{(b^{-1} - x^{-1})(x^{-1} - a^{-1})}{b^{-1} - a^{-1}}$ отрицательна, а дроби $\frac{f(a) - f(x)}{x^{-1} - a^{-1}}$, $\frac{f(b) - f(x)}{b^{-1} - x^{-1}}$ по теореме Коши можно представить в виде

$$\frac{f(a) - f(x)}{x^{-1} - a^{-1}} = -\frac{f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}, \quad \frac{f(b) - f(x)}{b^{-1} - x^{-1}} = \frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}},$$

где ξ и η – некоторые средние точки, удовлетворяющие условию $a < \xi < x < \eta < b$. Следовательно,

$$\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) = -K(a, x, b) \cdot (\eta^2 f'(\eta) - \xi^2 f'(\xi)).$$

Применяя теорему Лагранжа, отсюда получаем представление

$$\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) = -K(a, x, b) \cdot (2\zeta f'(\zeta) + \zeta^2 f''(\zeta))(\eta - \xi), \text{ где } \zeta - \text{некоторая точка,}$$

лежащая между точками ξ и η . Так как $2\zeta f'(\zeta) + \zeta^2 f''(\zeta) > 0$, то получаем $\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) > 0$. Нужно показано.

Ясно, что второе утверждение теоремы устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 1. Техника доказательства теоремы 1 позволяет сформулировать следующее утверждение.

Если в условиях теоремы А для внутренних точек x из l выполняется условие $2xf'(x) + x^2 f''(x) \geq 0$, то f – гармонически выпуклая на промежутке l функция; выполнение для таких точек неравенства $2xf'(x) + x^2 f''(x) \leq 0$ обеспечивает вывод о гармонической вогнутости функции f на рассматриваемом промежутке.

Замечание 2. Теорема А есть своеобразный аналог классического утверждения о достаточных условиях строгой выпуклости и строгой вогнутости гладкой функции в терминах второй производной данной функции.

Вернемся к рассмотренным выше примерам гармонически выпуклых и вогнутых функций.

Для функций $f(x) = x$, $x > 0$, и $g(x) = x$, $x < 0$, фигурирующая в условиях теоремы А величина $2xf'(x) + x^2f''(x)$ есть выражение $2x$. Следовательно, по данной теореме f – строго гармонически выпуклая функция, а g – строго гармонически вогнутая.

Для функции $f(x) = c + \frac{\gamma}{x}$ величина $2xf'(x) + x^2f''(x)$ тождественно равна нулю, следовательно, по приводимому замечанию данная функция и гармонически выпукла, и гармонически вогнута на всяком промежутке $I \subset (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Рассмотрим другие иллюстрации применения теоремы А.

Для функции $f(x) = e^x$ выражение $2xf'(x) + x^2f''(x)$ есть величина $x(2+x)e^x$, следовательно, она является строго гармонически выпуклой на всяком промежутке $I \subset (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ и строго гармонически вогнутой на интервале $(-2; 0)$.

Так как $2x(xe^x)' + x^2(xe^x)'' = x(2 + 4x + x^2)e^x$, то по теореме А функция $f(x) = xe^x$ есть строго гармонически выпуклая функция на интервалах $(-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2})$, $(0; +\infty)$ и строго гармонически вогнутая на интервалах $(-\infty; -2 - \sqrt{2})$, $(-2 + \sqrt{2}; 0)$.

Функция $\ln x$ – гармонически выпуклая функция, поскольку в ее области определения $2x(\ln x)' + x^2(\ln x)'' = 1 > 0$.

Список литературы

1. Калинин С. И. Геометрическая характеристика гармонически выпуклых функций // Актуальные проблемы физико-математического образования : материалы II Междунар. науч.-практ. конф. Наб. Челны : НГПУ, 2017. С. 24–27.
2. İşcan İ., Wu S. Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals. Applied Mathematics and Computation, 238 (2014). P. 237–244.
3. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some characterizations of harmonically log-convex functions, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 17 (2014), № 1. P. 51–61.

On sufficient conditions of the harmonic convexity of the function

S. I. Kalinin

Doctor of pedagogical sciences, professor of the Department of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Abstract: The definitions of the concepts of a harmonic convex, strictly harmonic convex, harmonically concave, strictly harmonically concave function are formulated in the paper. We consider the geometric characterization of these functions meaning the location of the points of the graph of a function under or over a so-called hyperbolic arc, depending on the form of the harmonic convexity. Examples of harmonically convex (concave) functions are given, in particular, functions that are discontinuous on the intervals considered. The main result of the work is the inference of sufficient conditions for a strict and non-strict harmonic convexity or concavity of a function on an interval in terms of its first and second order derivatives. An original analog of the classical statement about sufficient conditions for strict convexity and strict concavity of a smooth function in terms of the sign of its second derivative is obtained.

Keywords: harmonic convex function, harmonic concave function, hyperbolic arc.

References

1. Kalinin S. I. [Geometric characterization of harmonic convex functions. Actual problems of physical and mathematical education: materials of II Internat. scientific- pract. conf.] Nab. Chelny. NSPU. 2017. Pp. 24–27.
2. İşcan İ., Wu S. Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals. Applied Mathematics and Computation, 238 (2014). Pp. 237–244.
3. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some characterizations of harmonically log-convex functions, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 17 (2014), № 1. Pp. 51–61.

Визуализация правильных n -мерных многогранников

Е. Н. Лубягина¹, Л. В. Тимшина², Д. В. Широков³

¹ кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5071-6208.

E-mail: shishkina.en@mail.ru

² старший преподаватель кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259.

E-mail: larisatimshina@rambler.ru

³ кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-9465-4851.

E-mail: DimShirokov79@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается вопрос визуализации правильных n -мерных многогранников. Такая задача отлично подходит для приобщения старшеклассников и студентов к элементам исследовательской деятельности, способствует развитию пространственного и абстрактного мышления, помогает установлению межпредметных связей.

Как и для 3-мерного случая, n -мерные точки для их представления могут быть спроецированы в $(n-1)$ -мерное пространство и так далее до 3-мерного пространства с помощью центральной либо параллельной проекции. Авторы считают, что наиболее подходящим инструментом для визуализации n -мерных фигур является система динамических чертежей GeoGebra. Отметим такое достоинство динамических чертежей GeoGebra на полотне 3D, как возможность их свободных поворотов и сдвигов с помощью мыши.

Материал статьи может быть использован, например, при организации исследовательской деятельности на различных курсах и уровнях образования (школа, бакалавриат, магистратура) при изучении алгебры и геометрии. Материал статьи также может быть полезен при проведении лабораторных занятий по курсу «Аналитическая геометрия», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» и может послужить основой выпускной работы или индивидуального задания для бакалавров и магистрантов.

Ключевые слова: правильный многогранник, n -мерное пространство, GeoGebra.

Приведем основные определения и факты о n -мерных многогранниках. Необходимая информация о многомерных пространствах содержится в пособиях [4; 5; 6]. С теорией многомерных многогранников можно познакомиться в книгах [1; 6].

Множество точек n -мерного метрического аффинного пространства V , равноудаленных от центра O , назовем *сферой*. Пусть в пространстве V задана система координат с ортонормированным репером $R(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Тогда получаем следующее уравнение сферы S^{n-1} единичного радиуса с центром в точке O :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R \in S^{n-1} \Leftrightarrow |MO|=1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1. \quad (1)$$

Гиперплоскостью называется подпространство с размерностью, на единицу меньшей, чем объемлющее пространство. Пусть в некотором репере $R(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ пространства V точка M_0 гиперплоскости α имеет координаты $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})_R$, гиперплоскость α имеет базисные векторы $\mathbf{e}_1(e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n})_R, \dots, \mathbf{e}_{n-1}(e_{(n-1)1}, e_{(n-1)2}, \dots, e_{(n-1)n})_R$. Получаем общее уравнение гиперплоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n)_R \in \alpha \Leftrightarrow M_0 M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \text{ линейно зависимы} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & x_2 - x_{02} & \dots & x_n - x_{0n} \\ e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e_{(n-1)1} & e_{(n-1)2} & \dots & e_{(n-1)n} \end{vmatrix} = 0.$$

Любая гиперплоскость α определяет два *полупространства*, состоящие из точек, лежащих по одну сторону от гиперплоскости (так, что отрезок, соединяющий любые две из них, не пересекает α).

Выпуклым многогранником называется ограниченная фигура M , полученная как пересечение конечного числа полупространств в V . Размерностью многогранника M считается размерность наименьшего аффинного подпространства в V , содержащего M .

Правильные n -мерные многогранники определим по индукции [8]:

$n=2$. *Правильный многоугольник* – это выпуклый многоугольник, у которого все стороны между собой равны и все углы между смежными сторонами равны.

$n=3$. *Правильный многогранник (3-мерный)* – это выпуклый многогранник, все грани которого – равные правильные многоугольники с s сторонами ($s>2$), а концы всех ребер, исходящих из любой фиксированной вершины, образуют правильный k -угольник ($k>2$).

$n>3$. Пусть определены правильные $(n-1)$ -мерные многогранники.

Тогда *правильный n -мерный многогранник* – это выпуклый многогранник:

- 1) все грани которого – равные правильные $(n-1)$ -мерные многогранники;
- 2) концы всех смежных ребер (исходящих из любой фиксированной вершины) образуют правильные $(n-1)$ -мерные многогранники, причем все такие многогранники равны (но не обязательно совпадают с многогранниками из пункта 1)).

Таким образом, у правильного n -мерного многогранника имеются грани всех размерностей от 0 до $n-1$: вершины, ребра, многоугольники, трехмерные многогранники, ..., $(n-1)$ -мерные многогранники. Соотношения между ними можно найти в брошюрах [2; 7].

Каждому правильному многограннику можно взаимно однозначно сопоставить его *символ (Шлефли)*, определяющийся также по индукции как n -ка чисел $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$, где $(m_1, m_2, \dots, m_{n-2})$ – символ любой из $(n-1)$ -мерных граней многогранника, (m_2, \dots, m_{n-1}) – символ любого из $(n-1)$ -мерного многогранника с вершинами в концах смежных ребер.

Заметим, что для любого правильного многогранника можно естественным образом определить *двойственный ему многогранник*, соединив отрезками центры граней, имеющих общее ребро.

Другим важным свойством правильного n -мерного многогранника является возможность описать вокруг него сферу S^{n-1} , заданную в подходящем репере уравнением (1).

Отметим, что каждому 3-мерному правильному многограннику взаимно однозначно соответствует разбиение сферы S^2 : чтобы из правильного многогранника получить разбиение сферы, нужно на описанной вокруг него сфере соединить вершины многогранника дугами, а чтобы по разбиению сферы построить многогранник, вершины дуг разбиения соединяются обычными отрезками.

На рис. 1 приведен снимок динамического чертежа в GeoGebra, иллюстрирующего разбиение сферы, соответствующее кубу. Мы видим, что символ Шлефли куба (4, 3) (треугольники, собранные по пять в вершине), задает не только многогранник, но разбиение двумерной сферы. Это верно и в общем случае.

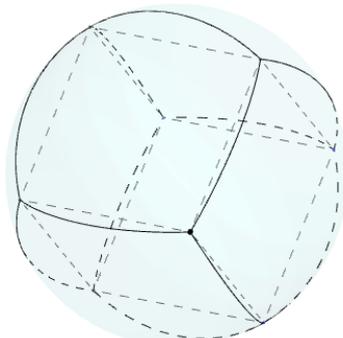


Рис. 1. Разбиение сферы (4, 3)

Подробнее с возможностями GeoGebra можно познакомиться в пособии [3].

Для 3-мерного пространства имеет место следующая теорема, иллюстрирующая связь геометрии и общей алгебры. Отметим, что под самосовмещением фигуры мы понимаем движение (то есть преобразование, сохраняющее расстояние между соответствующими точками), отображающее эту фигуру на себя. Пусть $R(S^2)$ – группа всех возможных поворотов относительно различных осей, проходящих через центр сферы S^2 .

Теорема 1. [8] *Любая конечная нетривиальная подгруппа G группы $R(S^3)$ изоморфна одной из следующих групп:*

- 1) группе Z_n , $n \geq 2$, поворотов вокруг одной и той же оси на углы $2k\pi/n$ для значений $k=0, 1, \dots, n-1$;
- 2) группе диэдра D_n , $n \geq 2$, самосовмещений правильного n -угольника;
- 3) группе самосовмещений правильного тетраэдра;
- 4) группе самосовмещений куба;
- 5) группе самосовмещений додекаэдра.

Так как при любом движении многогранника его вершины переходят в вершины, то группа поворотов правильного многогранника конечна и, значит, изоморфна одной из групп, перечисленных в теореме. Пункты 1) и 2) теоремы 1 не дают многогранников, пункт 3) позволяет получить правильный тетраэдр, пункт 4) – куб и двойственный ему октаэдр, пункт 5) – додекаэдр и двойственный ему икосаэдр. Получается

Теорема 2. Существует ровно 5 различных правильных трехмерных многогранников: (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5). Они соответствуют пяти разбиениям сферы S^2 .

Для пространств размерности $n > 3$ выполняется аналогичная трехмерному случаю теорема классификации правильных n -мерных многогранников:

Теорема 3. [6] Существует ровно 6 различных правильных 4-мерных многогранников: (3, 3, 3), (4, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (5, 3, 3), (3, 3, 5). При $n > 4$ существует ровно 3 различных правильных n -мерных многогранника: (3, 3, ..., 3, 3), (4, 3, ..., 3, 3), (3, 3, ..., 3, 4).

Далее рассмотрим примеры визуализации многомерных многогранников.

1. n -мерный куб

Многогранник с символом (4, 3, ..., 3) – это n -мерный куб с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ (см. [7]).

1. Вычислим координаты проекций вершин 4-мерного куба при центральном проецировании из точки S вне фигуры на гиперплоскость $h=0$.

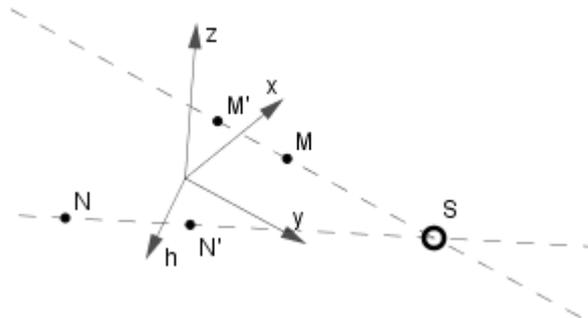


Рис. 2. Центральное проецирование

Пусть $M(x_0, y_0, z_0, h_0)$, $S(x_s, y_s, z_s, h_s)$ в системе координат $Oxyzh$. Найдем уравнение прямой SM :

$$M(x,y,z,h) \in SM \Leftrightarrow SM \parallel SM_0 \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow SM = tSM_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_s = t(x_0 - x_s) \\ y - y_s = t(y_0 - y_s) \\ z - z_s = t(z_0 - z_s) \\ h - h_s = t(h_0 - h_s) \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Образом M' точки M на гиперплоскость $h = 0$ будет пересечение этой гиперплоскости и прямой SM . Поэтому координаты M' удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} h = 0 \\ x - x_s = t(x_0 - x_s) \\ y - y_s = t(y_0 - y_s) \\ z - z_s = t(z_0 - z_s) \\ h - h_s = t(h_0 - h_s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ x - x_s = t(x_0 - x_s) \\ y - y_s = t(y_0 - y_s) \\ z - z_s = t(z_0 - z_s) \\ t = \frac{-h_s}{h_0 - h_s} \end{cases}$$

Значит, в гиперплоскости $h=0$ в системе координат $Oxyz$ точка M' будет иметь координаты $(\frac{-h_s}{h_0 - h_s}(x_0 - x_s) + x_s, \frac{-h_s}{h_0 - h_s}(y_0 - y_s) + y_s, \frac{-h_s}{h_0 - h_s}(z_0 - z_s) + z_s)$.

Для вычисления координат проекций вершин куба удобно использовать содержащуюся в GeoGebra электронную таблицу и отображать найденные точки на полотно 3D. Для изображения 3-мерных точек GeoGebra использует параллельное проецирование. На рис. 3, 4 приведена 3-мерная проекция 4-мерного куба с разных ракурсов при центральном проецировании.

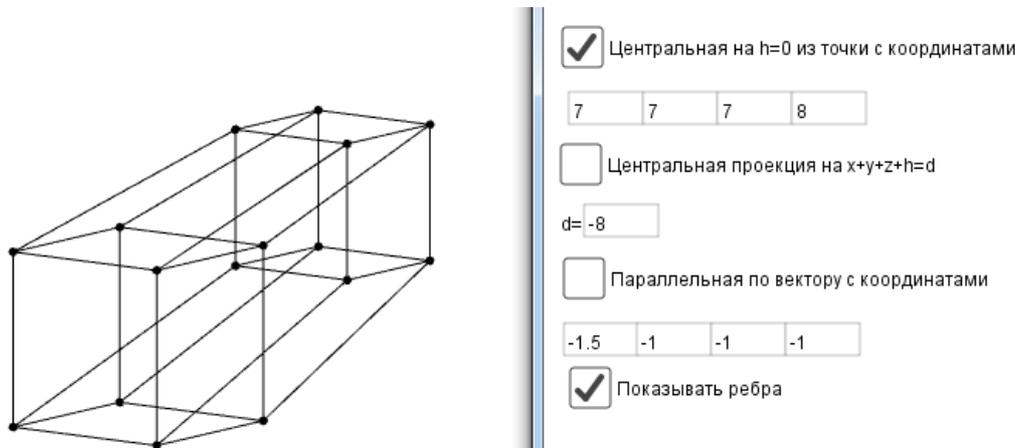


Рис. 3. Центральное проецирование на гиперплоскость $h=0$ из точки $(7, 7, 7, 8)$

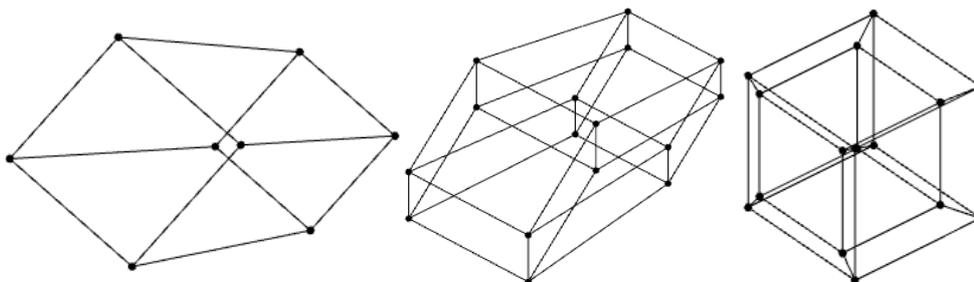


Рис. 4. Вид на проекцию (см. рис. 3) с других сторон

2. Найдем теперь координаты проекции 4-мерной точки при центральном проецировании из точки S на гиперплоскость $x+y+z+h=d$, где d – некоторое число.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0, h_0)$, $S(x_s, y_s, z_s, h_s)$ в системе координат $Oxyzh$.

Образ M' точки M на гиперплоскость $x+y+z+h=d$ равен пересечению этой гиперплоскости с прямой SM . Координаты M' являются решением системы

$$\begin{cases} x + y + z + h = d \\ x - x_s = t(x_0 - x_s) \\ y - y_s = t(y_0 - y_s) \\ z - z_s = t(z_0 - z_s) \\ h - h_s = t(h_0 - h_s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + h = d \\ x = t(x_0 - x_s) + x_s \\ y = t(y_0 - y_s) + y_s \\ z = t(z_0 - z_s) + z_s \\ t = \frac{d - (x_s + y_s + z_s + h_s)}{(x_0 + y_0 + z_0 + h_0) - (x_s + y_s + z_s + h_s)} \end{cases}$$

Обозначим найденные координаты точки M' как (x', y', z', h') .

Гиперплоскость $x+y+z+h=d$ проходит через точки $O(d/4, d/4, d/4, d/4)$, $E_1(d, 0, 0, 0)$, $E_2(0, d, 0, 0)$, $E_3(0, 0, d, 0)$. При этом векторы $e_1 = OE_1$, $e_2 = OE_2$, $e_3 = OE_3$ линейно независимы и могут быть выбраны в качестве базиса в $x+y+z+h=d$. Найдем координаты точки M' в репере (O, e_1, e_2, e_3) .

Во внешнем репере OM' имеет координаты $(x' - d/4, y' - d/4, z' - d/4, h' - d/4)$. Для поиска координат (x_m, y_m, z_m) вектора OM' в репере (O, e_1, e_2, e_3) достаточно решить векторное уравнение

$OM' = x_m e_1 + y_m e_2 + z_m e_3$, учитывая условие ограничения на гиперплоскость $x+y+z+h=d$. Получаем координаты точки M' на гиперплоскости: $(\frac{x'-h'}{d}, \frac{y'-h'}{d}, \frac{z'-h'}{d})$.

На рис. 5 приведена получившаяся 3-мерная проекция 4-мерного куба.

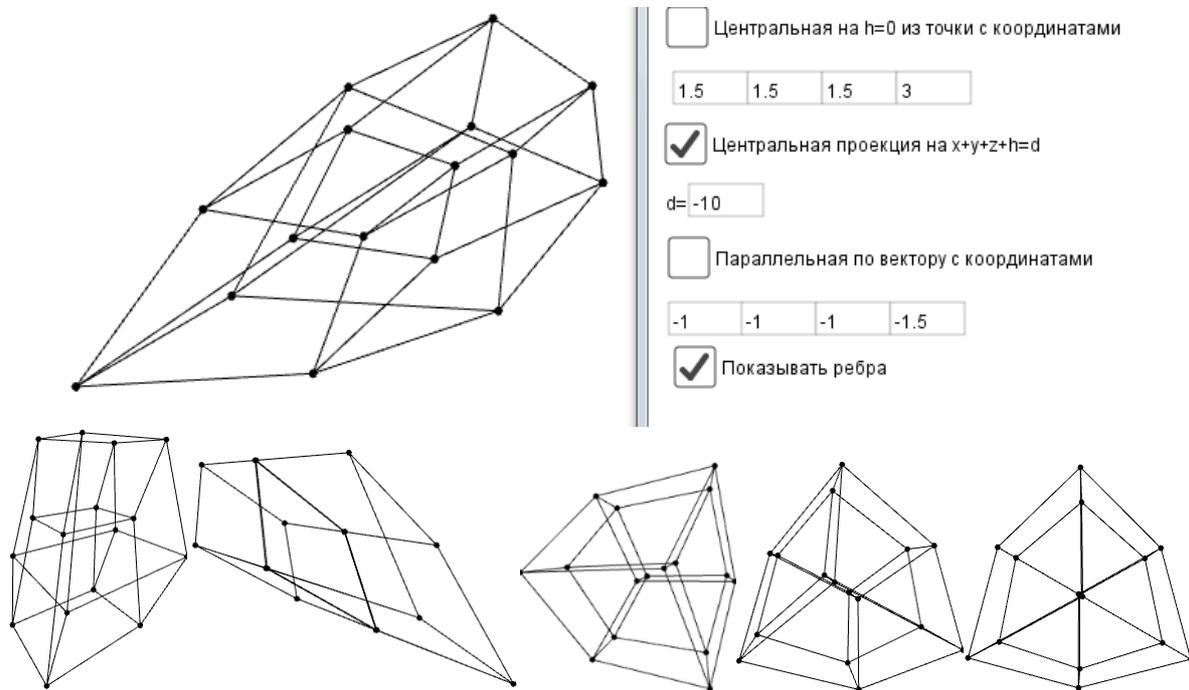
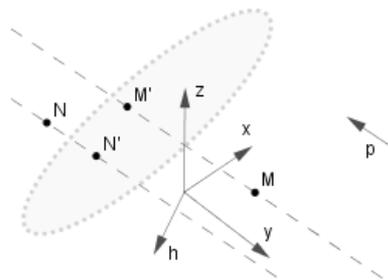


Рис. 5. Центральное проецирование на гиперплоскость $x+y+z+h=-10$ из точки $(1.5, 1.5, 1.5, 3)$

3. Вычислим координаты проекций 4-мерной точки при проецировании параллельно вектору p на гиперплоскость $x+y+z+h=d$, где d – некоторое число.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0, h_0)$, $p(x_p, y_p, z_p, h_p)$ заданы в системе координат $Oxyzh$:



Образ M' точки M при параллельном проецировании на гиперплоскость $x+y+z+h=d$ будет пересечением этой гиперплоскости и прямой, проведенной через M в направлении p . Значит, координаты M' являются решением системы

$$\begin{cases} x + y + z + h = d \\ x - x_0 = t x_p \\ y - y_0 = t y_p \\ z - z_0 = t z_p \\ h - h_0 = t h_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + h = d \\ x = t x_p + x_0 \\ y = t y_p + y_0 \\ z = t z_p + z_0 \\ t = \frac{d - (x_0 + y_0 + z_0 + h_0)}{x_p + y_p + z_p + h_p} \end{cases}$$

Обозначим найденные координаты точки M' во внешнем репере как (x', y', z', h') . По формуле из предыдущего пункта получаем координаты точки M' на гиперплоскости $x+y+z+h=d$ в репере (O, e_1, e_2, e_3) :

$$M' \left(\frac{x' - h'}{d}, \frac{y' - h'}{d}, \frac{z' - h'}{d} \right).$$

На рис. 6 приведена параллельная 3-мерная проекция 4-мерного куба, схожая с центральной проекцией при максимально удаленном центре проецирования.

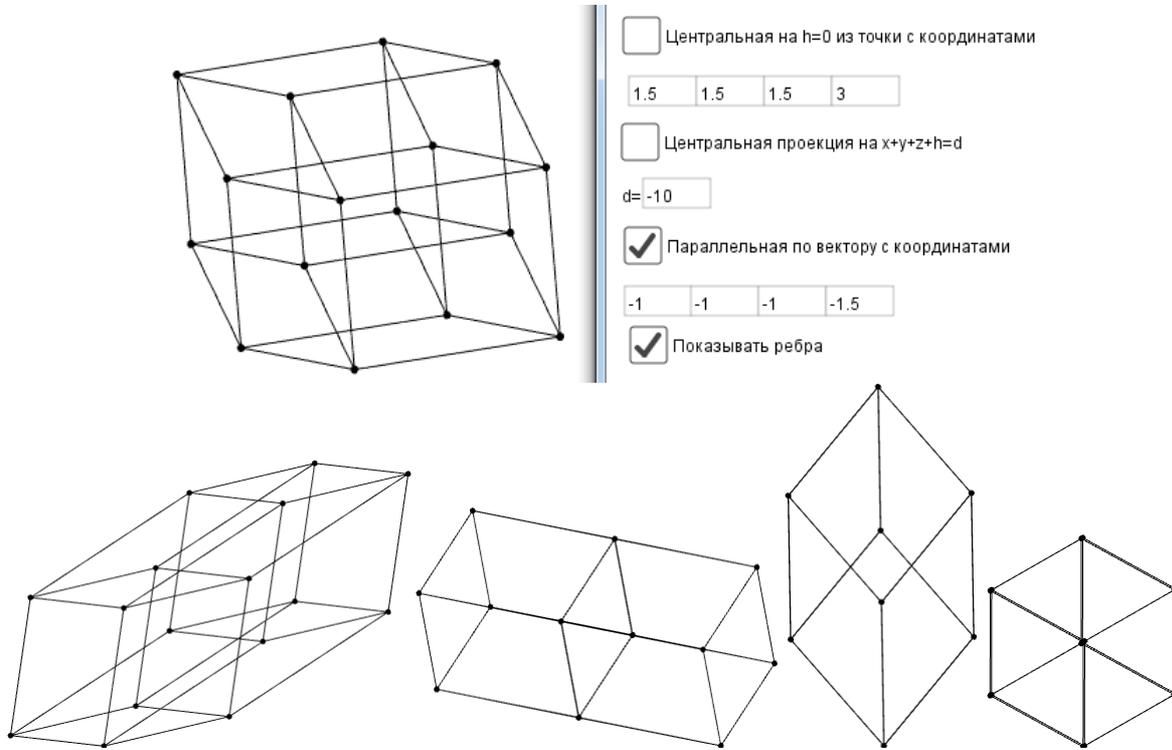


Рис. 6. Проецирование на гиперплоскость $x+y+z+h=-10$ параллельно вектору $(-1, -1, -1, -1.5)$

4. Построим изображение 5-мерного куба, дважды спроецировав его: сначала на 4-мерную гиперплоскость, затем – на 3-мерную. Применив два центральных проецирования, получим чертеж (рис. 7).

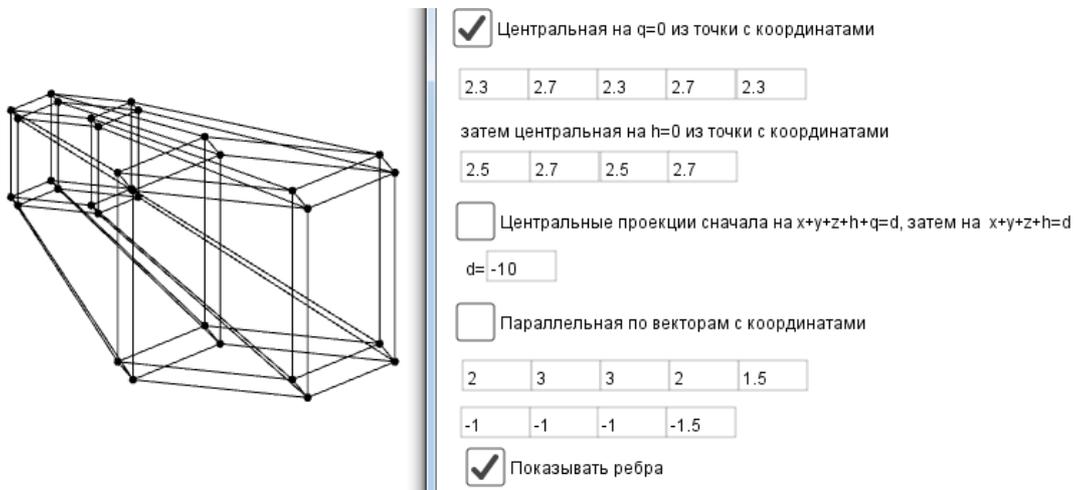


Рис. 7. Центральные проецирования на гиперплоскость $q=0$ из точки $(2.3, 2.7, 2.3, 2.7, 2.3)$, затем на гиперплоскость $h=0$ из точки $(2.5, 2.7, 2.5, 2.7)$

2. Симплекс

Общая формула вычисления координат вершин многогранника с символом $(3,3,\dots,3,3)$ приведена в [6]. Этот многогранник называется *n-мерным симплексом*.

В 4-мерном пространстве вершины симплекса имеют такие координаты: $(-\sqrt{10}, -\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1)$, $(\sqrt{10}, -\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1)$, $(0, 2\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1)$, $(0, 0, -\sqrt{15}, -1)$, $(0, 0, 0, 4)$. На рис. 8 приведены центральная и параллельная проекции 4-мерного симплекса.

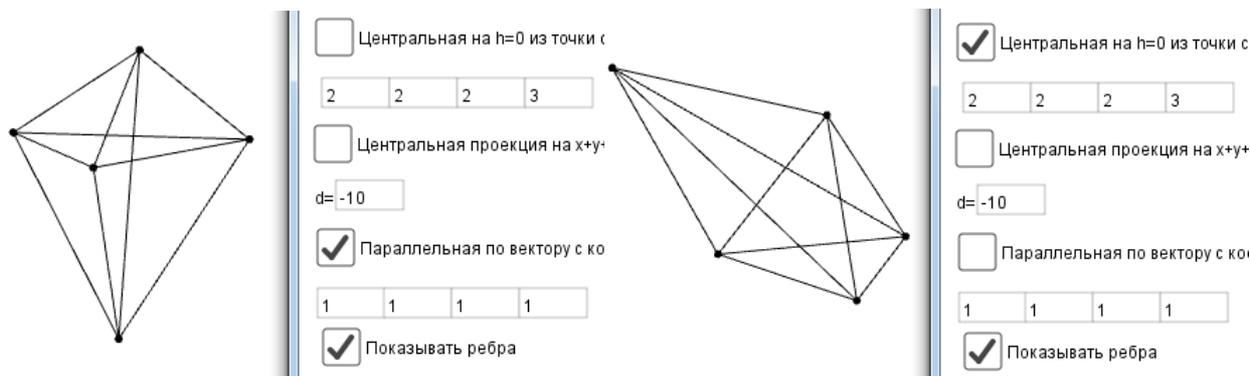


Рис. 8. Проекции симплекса

3. Кокуб

n-мерный кокуб – это многогранник с символом $(3, 3, \dots, 3, 4)$. Его вершинами будут точки $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ [7].

На рис. 9 приведена получившаяся 3-мерная проекция 4-мерного кокуба.

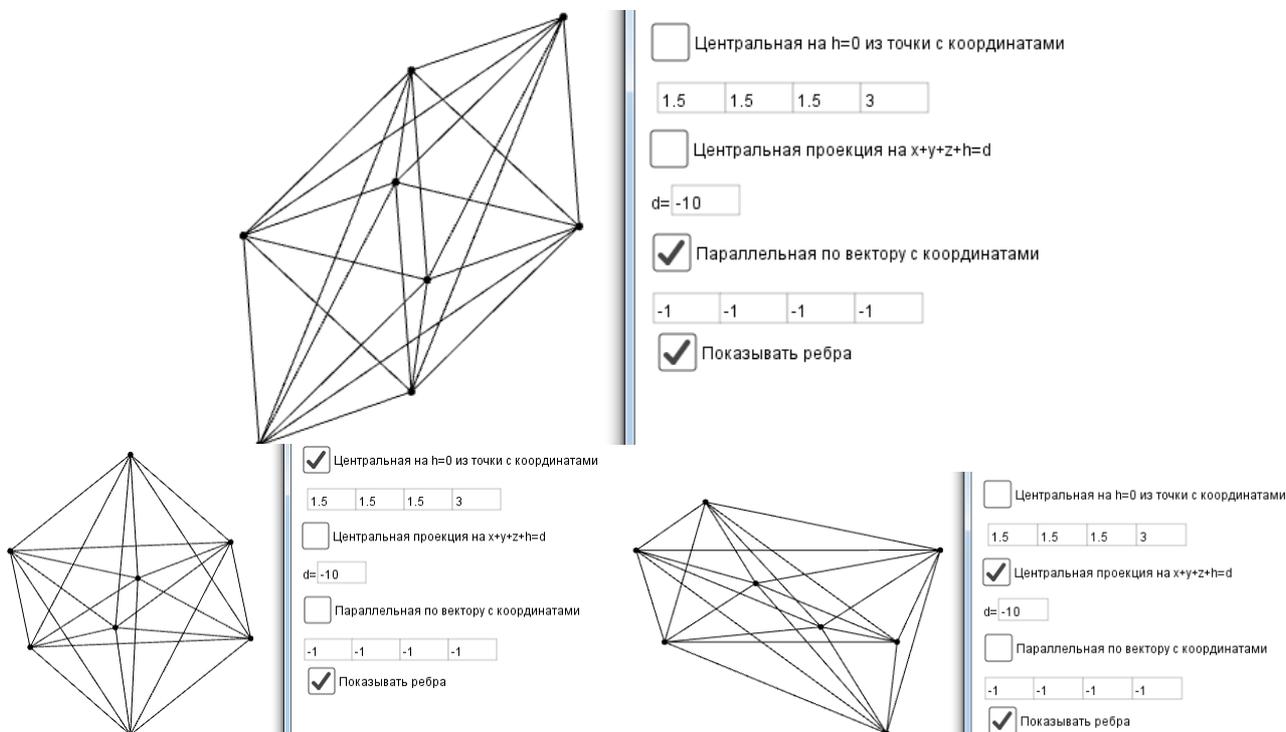


Рис. 9. Проекция кокуба

Аналогично строятся проекции других *n*-мерных многогранников. Изображения могут легко быть дополнены выделением $(n-1)$ -мерных граней, реализацией поворотов *n*-мерных многогранников и т. п. Такие упражнения послужат хорошей иллюстрацией при изучении свойств многомерных многогранников.

Список литературы

1. Берже М. Геометрия / пер. с фр. М. : Мир, 1984. Т. 1. 560 с.
2. Гальперин Г. А. Многомерный куб. М. : МЦНМО, 2015. 80 с.
3. Есаян А. Р., Добровольский Н. М., Седова Е. А., Якушин А. В. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra : учеб. пособие. Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. Ч. I. 417 с.
4. Игнатъев Ю. Г. Аналитическая геометрия. Ч. II. Аффинные и евклидовы пространства : учеб. пособие. II семестр. Казань : ТГГПУ, 2013. 188 с.
5. Игнатъев Ю. Г., Агафонов А. А. Проективная геометрия и методы изображений : учеб. пособие. Казань : Казан. ун-т, 2014. 179 с.
6. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 668 с.
7. Смирнов Е. Ю. Группы отражений и правильные многогранники. М. : МЦНМО, 2009. 48 с.
8. Сосинский А. Б. Геометрии / пер. с англ. Б. Р. Френкина. М. : МЦИНО, 2017. 263 с.

Visualization of regular n-dimensional polytopes

E. N. Lubyagina¹, L. V. Timshina², D. V. Shirokov³

¹ PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5071-6208.

E-mail: shishkina.en@mail.ru

² senior lecturer of the Department of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259.

E-mail: larisatimshina@rambler.ru

³ PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of fundamental and computer mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-9465-4851.

E-mail: DimShirokov79@mail.ru

Abstract: In this paper, we consider the question of visualization of regular n-dimensional polyhedra. Such a task is perfectly suitable for involving high school students and students in the elements of research activity, it promotes the development of spatial and abstract thinking and the establishment of intersubject communications.

As in the 3-dimensional case, points in n-dimensional space can be projected into an (n-1) -dimensional space and so on to 3-dimensional space by means of a central or parallel projection. We believe that GeoGebra's dynamic drawing system is the most suitable tool for such visualization. Note that GeoGebra drawings on the 3D canvas can be rotated and moved with the mouse.

The material of this article can, for example, be used in the formation of research activities at various courses and levels of education (school, bachelor, master) in the study algebra and geometry. The material of the article can be used for conducting laboratory studies on the course "Analytical Geometry", "Computer Geometry and Geometric Modeling" and can serve as the basis for the final work or individual task for bachelors and undergraduates.

Keywords: regular polyhedron, n-dimensional space, GeoGebra.

References

1. Berger M. *Geometriya* [Geometry] / transl. from Fr. M. Mir. 1984. Vol.1. 560 p.
2. Gal'perin G. A. *Mnogomernyj kub* [Multidimensional cube]. M. MCCME. 2015. 80 p.
3. Esayan A. R., Dobrovolskij N. M., Sedova E. A., Yakushin A. V. *Dinamicheskaya matematicheskaya obrazovatel'naya sreda GeoGebra : ucheb. posobie* [Dynamic mathematics learning environment GeoGebra : tutorial]. Tula. Publishing house of Tula State Ped. Un-ty n.a. L. N. Tolstoy. 2017. Part I. 417 p.
4. Ignat'ev YU. G. *Analiticheskaya geometriya. CH. II. Affinnye i evklidovy prostranstva : ucheb. posobie. II semestr* [Analytical geometry. Part II. Affine and Euclidean spaces: tutorial. II semester]. Kazan. TSHPU. 2013. 188 p.
5. Ignat'ev YU. G., Agafonov A. A. *Proektivnaya geometriya i metody izobrazhenij: ucheb. posobie* [Projective geometry and imaging methods: tutorial]. Kazan. Kazan Un-ty. 2014. 179 p.
6. B. A. Rosenfeld *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional spaces]. M. Nauka. 1966. 668 p.
7. Smirnov E. YU. *Gruppy otrazhenij i pravil'nye mnogogranniki* [Reflection groups and regular polytopes]. M. MCCME. 2009. 48 p.
8. Sosinskij A. B. *Geometrii* [Geometries] / transl. from English by B. R. Frenkin. M. MCCME. 2017. 263 p.

Разработка программного и методического обеспечения для проведения практических занятий по конструктивной теории машин Тьюринга

И. А. Пушкарев¹, А. В. Огородов²

¹ кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и прикладной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: god_sha@mail.ru

² магистрант, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: tepmi@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые специальные аспекты конструктивной теории машин Тьюринга в рамках преподавания математической логики и теории алгоритмов. В частности, преподавание этой части дисциплины требует использования соответствующего специально разработанного программного обеспечения. В данной работе эта проблема анализируется с позиций накопленного опыта преподавания теории алгоритмов студентам специальности «Прикладная математика и информатика» на основе подхода, основанного на рассмотрении «диаграмм Тьюринга», разработанного немецкими учеными под руководством профессора К. Якобса. На предыдущей стадии преподавания для верификации корректности работы построенных диаграмм также использовалось специально разработанное программное обеспечение. В данной работе предлагается программное обеспечение следующего поколения. Выявляются как недостатки программного обеспечения, использованного ранее, так и пожелания и требования к новому программному продукту, который должен в перспективе занять место старого. Статья содержит идеологическое описание нового программного обеспечения, важные подробности технической реализации и интерфейса и описание новых возможностей разработанного продукта, касающихся, в частности, рассмотрения вопросов моделирования многопроцессорных систем и параллельного программирования.

Ключевые слова: библиотека qt, имитатор, верификация, машина Тьюринга, кроссплатформенность, многопроцессорные системы.

Введение

Основная проблема в преподавании раздела теории алгоритмов, посвященного изучению конструктивной теории машин Тьюринга (или любого другого определения алгоритма), состоит в создании возможностей верификации правильности машин Тьюринга, построенных учащимися. Именно конструктивная разработка машин Тьюринга студентами, по существу, является разработкой ими собственного языка программирования, начиная с небольшого набора простейших команд – языка, предназначенного для работы с *воображаемым* устройством. Программирование на сколько-нибудь приличном уровне немислимо без тестирования: правдоподобно выглядящая машина Тьюринга в действительности может оказаться неочевидно неработоспособной в силу наличия малозаметного конструктивного дефекта. При этом тестирование работы на воображаемом устройстве либо является очень трудоемкой задачей, требующей нереального объема ручной работы, либо требует реализации того самого воображаемого устройства в вид компьютерной модели.

Задача построения таковой модели, подходящей для реализации машин Тьюринга в синтаксисе так называемых диаграмм Тьюринга (см. напр., [2]), была в свое время решена А. Б. Белицем (рис. 1).

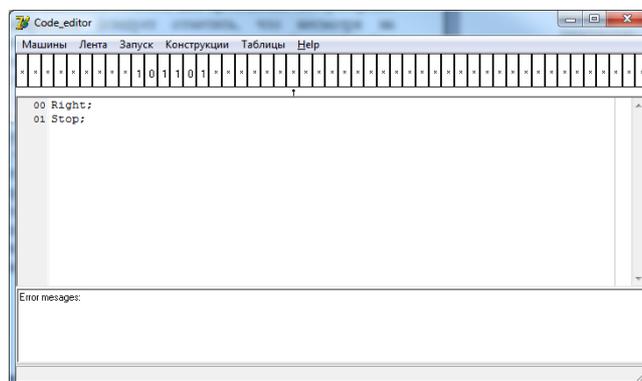


Рис. 1. Основная экранная форма имитатора А. Б. Белица

Имитатор, разработанный А. Б. Белицем, служил надежной основой для проведения лабораторных работ по теории алгоритмов (несмотря на «компьютерное» название, теория алгоритмов является наукой чрезвычайно малопрактичной и неприспособленной для проведения лабораторных работ и даже большого количества практических занятий – за пределами обсуждаемой области).

Следует отметить, что программа, разработанная А. Б. Белицем, не является одной из многочисленных, во множестве выложенных в Интернет примитивных имитаторов, предназначенных для имитации только очень простых машин, записанных в виде «квадратной» таблицы. Она обладает развитым функционалом, позволяющим имитировать работу большого числа постоянно усложняющихся машин, разработанных последовательно, а не как разовые иллюстрационные анимации, притом – разработанных различными пользователями. Однако с ее эксплуатацией, начиная с некоторого момента, возникли определенные проблемы. У имитатора обнаружился целый ряд недостатков, в частности он оказался недостаточно кроссплатформенным.

Тем самым, приобрела известную актуальность задача написания нового имитатора, обладающего свойством кроссплатформенности и, возможно, некоторыми другими полезными для учебного процесса свойствами.

В качестве основы предлагалось переписать имитатор практически с тем же функционалом на основе элегантного способа представления диаграмм Тьюринга (которые сами по себе являются вершинно-помеченными орграфами) в виде некоторого исходного языка программирования, сразу имея в виду по окончании первого этапа работы перейти к расширению и усовершенствованию функционала. Кроме того, предполагалось снабдить разработанную программу методическим обеспечением, облегчающим проведение занятий.

Перечень дополнительных возможностей

В качестве расширения функционала программы предлагаются следующие усовершенствования.

1. Предполагается уменьшить (в идеале – устранить) зависимость работы программы от кодировки символов, замеченную при замене инвентаря дисплейного класса и тем самым существенно повысить кроссплатформенность программы.

2. Существенным недостатком программы А. Б. Белица был ураганный рост длин имен состояний модели машины Тьюринга, получающейся при интерпретации введенной диаграммы. Напомним, что при построении каждой следующей, более сложной, машины Тьюринга, допустимо использование всех уже построенных машин как отдельных операторов, возможно – по несколько экземпляров. При этом состояния построенных машин уже имели довольно длинные названия, к которым теперь приходилось добавлять идентификатор машины и идентификатор номера машины в новой диаграмме. В некоторый момент длины имен переставали помещаться в размер отведенной для них памяти, и корректная компиляция диаграммы становилась невозможна.

Предложить простое автоматическое решение этой проблемы оказалось крайне проблематичным, и был предложен комплекс частичных решений. Именно:

(а) предлагается рассмотреть возможность предоставления пользователю полномочий при необходимости использовать возможность ручного переименования состояний с трансляцией новых имен во все последующие машины;

(б) предложено реализовать два режима имитации машин: условно говоря, «честный» – с буквальным превращением машины Тьюринга в таблицу и пошаговым исполнением с выделением текущей команды (для простых машин) и, напротив «быстрый», когда работа машины имитируется только на экране (для ситуаций, когда на первый план выходит проверка корректности работы).

3. Программа А. Б. Белица работала не с бесконечной в обе стороны, а с закольцованной лентой с переменным количеством ячеек, но (почему-то) с постоянной длиной, поэтому при увеличении длины ленты (которое при необходимости производилось при помощи ручной команды) ячейки становились очень узкими (рис. 2), что было не совсем удобно.

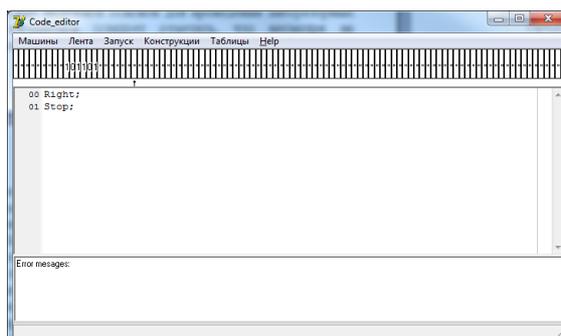


Рис. 2. Эффект сжатия ячеек

4. Разрабатываемая программа является учебно-методической и должна помогать учебному процессу, предлагая иногда (так называемые) «фишки», облегчающие обучение. Например, для понимания того, как работает так называемый «копировщик» (см. далее) достаточно реализовать его для алфавита из двух букв (не считая пробела). Однако в дальнейшем предполагается написание более сложных машин, для которых необходимы копировщики, работающие над более сложными алфавитами. Заставлять учащегося писать отдельно эти копировщики контрпродуктивно, поэтому в программе предусмотрена возможность автоматического создания (с последующим использованием) таких «многобуквенных» копировщиков.

5. Кроме того, программа А. Б. Белица не предоставляла возможностей изучения машин Тьюринга с разными вариантами многопроцессорности (многоленточность, наличие нескольких кареток на одной ленте и другие), не составляющего большой трудности в реализации и очень уместное в силу (случившегося позднее) определения профиля магистратуры как ориентированного на параллельное и многопроцессорное программирование.

Дополнительное методическое обеспечение

1. Естественным образом, в методическое обеспечение проведения занятий входит разработка функционала справочника, встроенного в программу, содержащего исчерпывающее описание синтаксиса, снабженное примерами.

2. В качестве второй дополнительной цели работы естественным образом возникла задача унификации и разумного упорядочения списка задач, предлагаемых учащимся. В ходе проведения занятий учащимся предлагалось большое количество задач, связанных с комбинаторикой слов и вычислениями в унарной, двоичной и троичной позиционных системах счисления.

Задачи эти выдавались учащимся далеко не в случайном порядке, однако поиск оптимального порядка расположения задач как таковой не проводился, и это тоже оказалось задачей, заслуживающей внимания.

Кроме того, естественной задачей представлялась выдача примеров требуемых машин Тьюринга учащимся не сразу, в готовом виде, а после выполнения ими некоторого «норматива», однако от этой идеи «умного» электронного учебника пришлось отказаться в силу трудноформализуемости этого самого «норматива» как условия того, что учащийся самостоятельно попробовал построить машину и она у него «почти заработала» или просто заработала, а «ручное» сообщение преподавателем пароля при демонстрации работающей машины представилось неоправданно сложной и чрезмерно криптографической процедурой.

Основные заметки о программном обеспечении

Основная структура программного обеспечения схожа с предыдущим интерпретатором. Имеется возможность исполнения машины по шагам с подсветкой текущей строки либо же мгновенное исполнение. Также этап запуска разделен на две части: сборка и исполнение.

Ошибка на любом из этапов приводит к невозможности запуска машины. При возникновении какой-либо ошибки информация о ней выводится пользователю, что значительно упрощает процесс создания и отладки.

Для обеспечения переносимости между основными операционными системами (Microsoft Windows и Linux) было принято решение использовать библиотеку Qt, что позволяет, помимо переносимости итоговой программы, разработать полностью адаптивный пользовательский интерфейс. Основной графический интерфейс представлен на рис. 3.

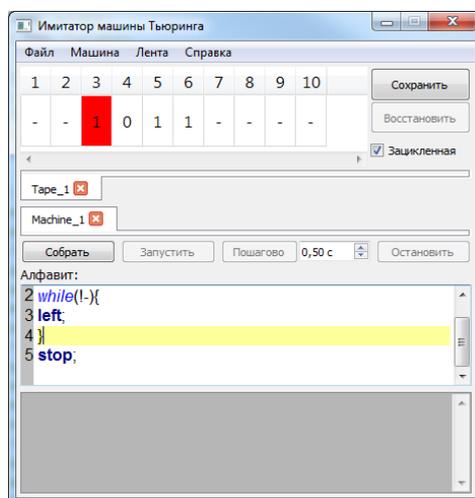


Рис. 3. Адаптивный графический интерфейс

Текущее положение печатающей головки на ленте отображается посредством цветовой подсветки соответствующей ячейки ленты красным цветом. Лента может быть как зацикленной, так и конечной. При достижении границы ленты любая машина будет остановлена с ошибкой, информация о которой будет выведена в нижнюю область интерфейса. Также в качестве дополнительной возможности реализован механизм запоминания текущей ленты и в случае необходимости восстановления ее состояния из ранее запомненного.

Для обеспечения наглядности также введена подсветка ключевых слов и выражений псевдо-языка.

Приложение позволяет выполнять машину как мгновенно, так и с устанавливаемым периодическим шагом по времени. При использовании пошагового выполнения текущая строка подсвечивается в редакторе, что делает процесс более наглядным.

Рассмотрим работу программы на примере машины «Копировщик». Задача данной машины – скопировать последовательность символов правее ее текущего положения.

Диаграмма копировщика представлена на рис. 4.

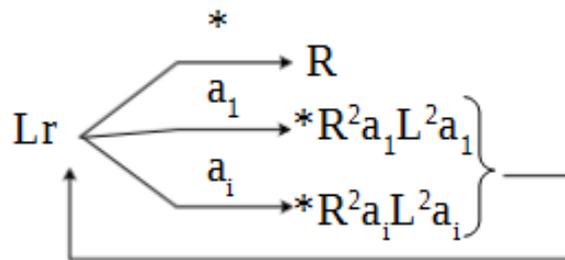


Рис. 4. Диаграмма копировщика

Фрагмент последовательностей команд, требуемых для реализации копировщика на символах '*012', представлен в таблице ниже.

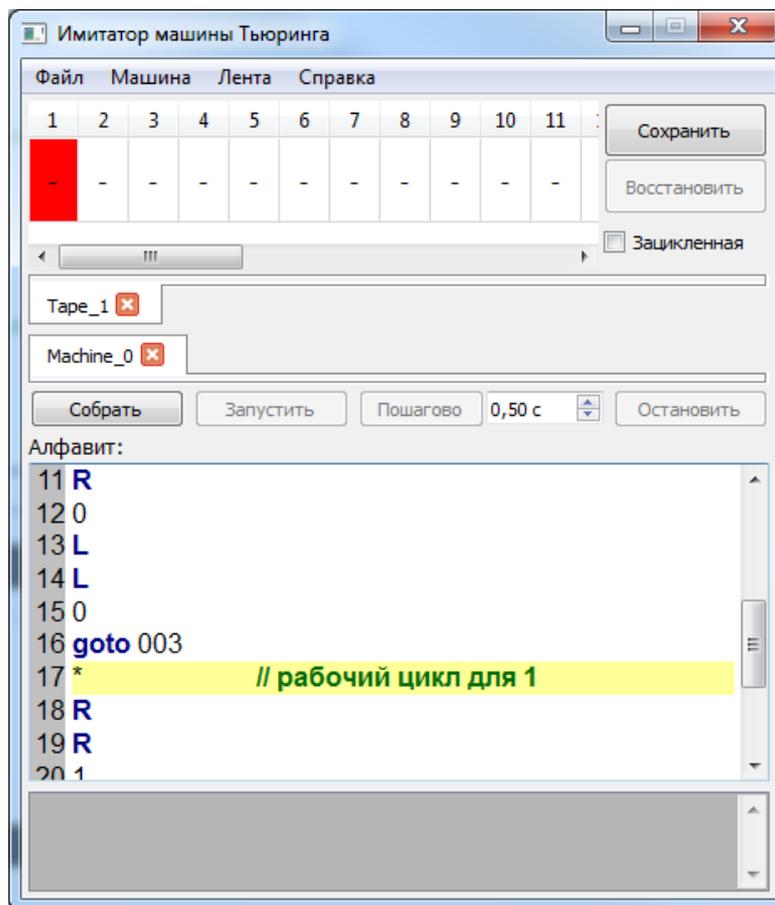


Рис. 5. Реализация машины «копировщик»

000	Stop
001	L
002	r
003	case * goto 004 0 goto 005 1 goto 2 goto
004	R % выход
005	* % рабочий цикл для 0
006	R
007	R
008	0
009	L
010	L
011	0
012	goto 003
013	* % рабочий цикл для 1
014	R
015	R
016	1
017	L
018	L
019	1
020	Goto 003

Результат работы копировщика в двух режимах интерпретации представлен на рис. 6.

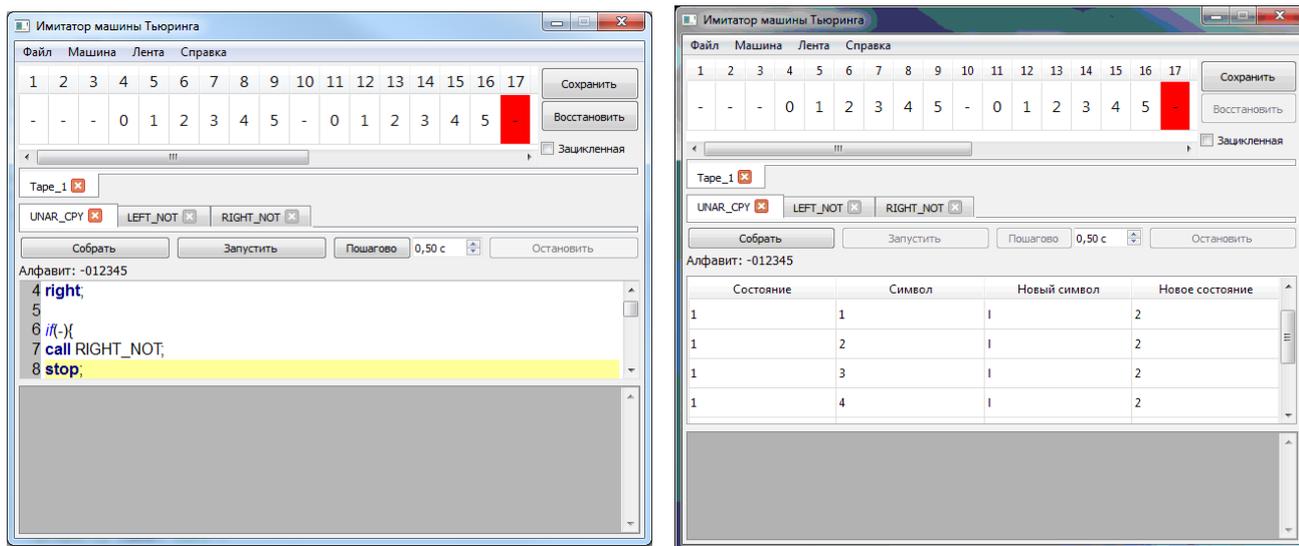


Рис. 6. Результат работы копировщика на алфавите '-012345'

В результате работы встроенного компилятора программа, соответствующая диаграмме (при работе в режиме «честной» имитации), конвертируется в таблицу состояний машины. Соответствующая экранная форма изображена на рис. 7.

Состояние	Символ	Новый символ	Следующее состояние
1	1		2
1	2		2
1	3		2
1	4		2
1	5		2
2	*	*	3
2	0	0	1
2	1	1	1
2	2	2	1

Рис. 7. Таблица состояний машины

Экранная форма автоматического построения и использования копировщика, работающего над другими алфавитами, представлена на рис. 8.

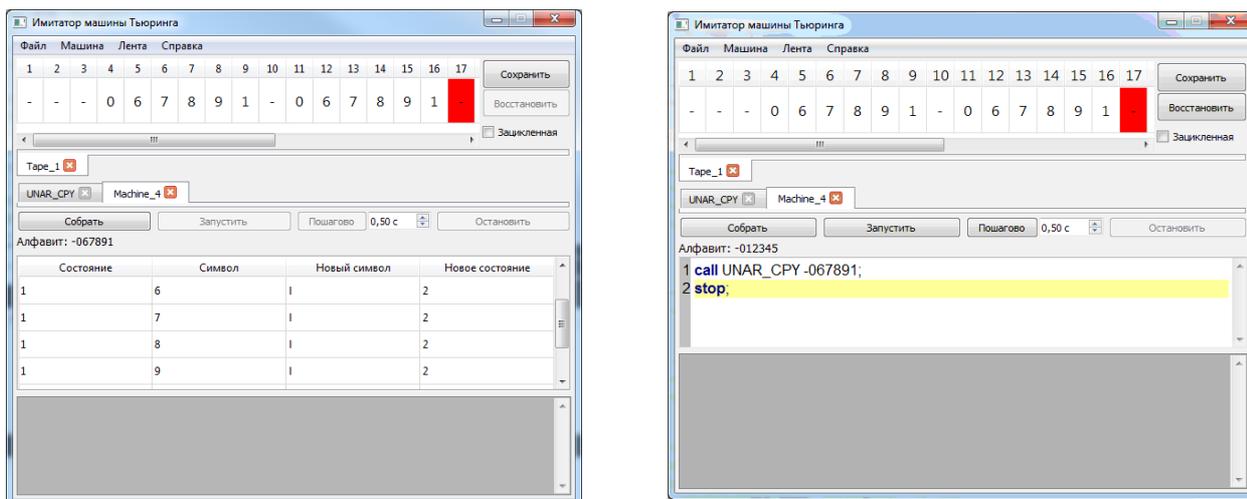


Рис. 8. Результат работы копировщика с переопределенным алфавитом

Многопроцессорные режимы

В заключение проиллюстрируем возможности имитации работы одноленточной многокаре- точной (рис. 9) и многоленточной (рис. 10) машин.

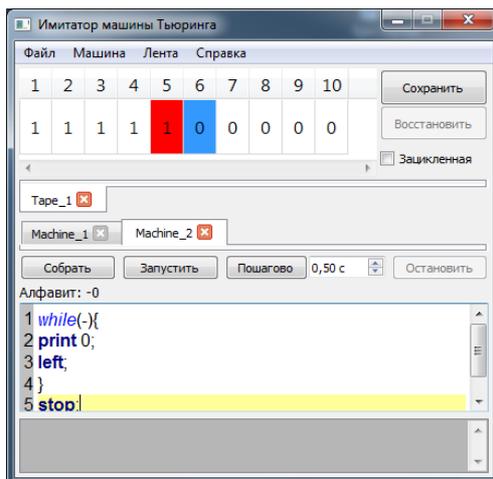


Рис. 9. Результат работы машины с двумя каретками на одной ленте

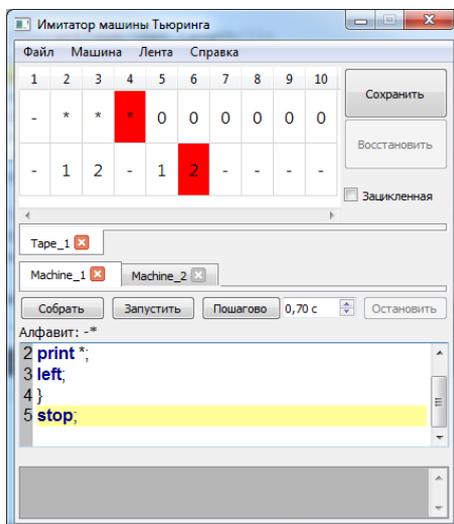


Рис. 10. Машина, работающая на двух различных лентах

Список литературы

1. Павловская Т. А. C/C++. Программирование на языке высокого уровня. СПб. : Питер, 2003. 461 с.
2. Эббингауз Г.-Д. Машины Тьюринга и рекурсивные функции. М. : «Мир», 1972.
3. Qt Documentation. URL: <http://doc.qt.io/> (дата обращения: 14.07.2017).

Development of software and methodological support for practical training on the constructive theory of Turing machines

I. A. Pushkarev¹, A. V. Ogorodov²

¹ PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of fundamental Informatics and applied mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: god_sha@mail.ru

² master's degree, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: tepmi@yandex.ru

Abstract. The article deals with some special aspects of the constructive theory of Turing machines in the framework of teaching mathematical logic and theory of algorithms. In particular, the teaching of this part of the discipline requires the use of appropriate specially developed software. In this paper, this problem is analyzed from the standpoint of the accumulated experience of teaching the theory of algorithms to students of the specialty "Applied mathematics and Informatics" on the basis of the approach based on the consideration of "Turing diagrams" developed by German scientists under the guidance of Professor K. Jacobs. At the previous stage of teaching, specially developed software was also used to verify the correctness of the diagrams. In this work, a software of the next generation is proposed. The article reveals both the shortcomings of the software used earlier, and the wishes and requirements for a new software product, which should in the future take the place of the old one. The article contains an ideological description of the new software, important details of technical implementation and interface and description of new features of the developed product, in particular, concerning the consideration of issues of modeling of multiprocessor systems and parallel programming.

Keywords: qt library, simulator, verification, Turing machine, cross-platform, multiprocessor systems.

References

1. Pavlovskaya T. A. C/C++. *Programmirovanie na yazyke vysokogo urovnya* [C/C++. Programming in a high-level language]. SPb. Piter. 2003. 461 p.
2. Ebbinghouse G.-D. *Mashiny T'yuringa i rekursivnye funktsii* [Turing Machines and recursive functions]. М. "Mir". 1972.
3. Qt Documentation. Available at: <http://doc.qt.io/> (accessed: 14.07.2017).

Новое явное решение уравнения Кардара – Паризи – Цванга и его применения*

А. Э. Рассадин¹, А. В. Степанов², Л. А. Фомин³

¹ член Правления, Нижегородское математическое общество. Россия, г. Нижний Новгород.

ORCID: 0000-0002-7396-0112. E-mail: brat_ras@list.ru

² кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики, физики и информационных технологий инженерного факультета, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия.

Россия, г. Чебоксары. ORCID: 0000-0003-4306-1199. E-mail: for.antonstep@gmail.com

³ кандидат физико-математических наук, научный сотрудник,

Институт проблем технологий микроэлектроники и обособленных материалов РАН.

Россия, г. Черноголовка. E-mail: fomin@iptm.ru

Аннотация. В настоящее время во всем мире проявляется значительный интерес к методам исследования нано- и микроповерхностей, применимым для проектирования нано- и микроматериалов с наперед заданными физическими и физико-химическими свойствами. Практическая реализация такой наноинженерии настоятельно требует осуществления междисциплинарной стыковки теоретических подходов к описанию роста нано- и микроструктур и методов экспериментального изучения последних, в первую очередь с помощью атомной силовой микроскопии, с современным уровнем развития методов вычислительной математики и информационных технологий. В данной работе проведено теоретическое исследование одной модели эпитаксиальной технологии, учитывающей как прилипание осаждающихся частиц вещества к поверхности твердого тела, так и их перемещение по ней при ее росте. На основе этой модели предложен новый численно-аналитический метод определения формы шероховатого интерфейса, пригодный в том числе и для описания пространственно-временной эволюции его фрактальных начальных неоднородностей.

Ключевые слова: разделение переменных, ряд Фурье, сеточная функция, поверхность с цилиндрической образующей, регуляризованный фрактальный профиль.

Введение

Хорошо известно, что одним из основных факторов, определяющих качество элементной базы радиоэлектроники, являются интерфейсные характеристики микроэлектронных материалов, поэтому большое прикладное значение имеет изучение различных моделей роста поверхности твердого тела.

К числу первых моделей такого сорта относится феноменологическая модель Кардара – Паризи – Цванга (КПЦ) [5], которая, несмотря на свою видимую простоту, и по сей день остается объектом интенсивных исследований [4]. В частности, в докладе [2] было описано явное решение для (1+1)D-поверхности, т. е. поверхности с цилиндрической образующей, для косинусоидального начального профиля.

Данная работа имеет следующую структуру: в части 1 представлено построение нового явного решения уравнения КПЦ для периодического начального профиля (1+1)D-поверхности. В части 2 на основе этого решения получено точное решение уравнения КПЦ для 2D-поверхности, а также развита теория возмущений для двумерного уравнения КПЦ на фоне этого решения и предложен численный метод для решения уравнения первого приближения этой теории. В Заключение суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

1. Явное решение уравнения КПЦ для (1+1)D-поверхности

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения КПЦ в малоугловом приближении [5]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \nu \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad h(x,0) = h_0(x), \quad x \in R. \quad (1)$$

В уравнении (1) c – скорость роста поверхности в направлении ее локальной нормали, ν характеризует темп поверхностной диффузии вещества, а функция $h(x,t)$ связана с высотой z соотношением: $z = c \cdot t + h(x,t)$. Отсутствие зависимости от переменной y обусловлено предположением о трансляционной инвариантности процесса роста относительно этой оси, т. е. наличием у растущей поверхности цилиндрической образующей.

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 18-08-01356-а.
© Рассадин А. Э., Степанов А. В., Фомин Л. А., 2018

Далее, поскольку твердое тело обладает кристаллической структурой, то в задаче Коши (1) естественно рассматривать периодические начальные условия с пространственным периодом a , совпадающим с постоянной решетки материала подложки:

$$h_0(x+a) = h_0(x), \quad (2)$$

поэтому решение уравнения (1) можно искать в виде ряда Фурье:

$$h(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n(t) \cdot \exp(i \cdot k_0 \cdot n \cdot x), \quad h_{-n}(t) = h_n^*(t), \quad k_0 = \frac{2 \cdot \pi}{a}. \quad (3)$$

Подставляя разложение (3) в исходное уравнение КПЦ (1), получим следующую бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\frac{dh_n(t)}{dt} = -v \cdot n^2 \cdot k_0^2 \cdot h_n(t) - \frac{c \cdot k_0^2}{2} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} l \cdot (n-l) \cdot h_l(t) \cdot h_{n-l}(t), \quad (4)$$

начальными условиями для которой служат коэффициенты разложения в ряд Фурье начального профиля (2):

$$h_n(0) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a h_0(x) \cdot \exp(-i \cdot k_0 \cdot n \cdot x) \cdot dx. \quad (5)$$

Система уравнений (4) нелинейна и потому очень сложна. Тем не менее можно указать такой бесконечномерный вектор ее начальных условий (5), при котором она решится точно, а именно, рассмотрим следующее начальное условие для исходного уравнения (1):

$$h_0(x) = \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln[1 + m_0 \cdot \cos(k_0 \cdot x)], \quad 0 < m_0 < 1. \quad (6)$$

Выбор такого начального условия продиктован как требованием (2) его периодичности, так и видом подстановки [4, 5]:

$$h(x,t) = \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln \varphi(x,t), \quad (7)$$

которая приводит нелинейное уравнение КПЦ (1) к линейному уравнению диффузии-теплопроводности:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Из формул (6) и (7) вытекает, что начальное условие для уравнения (8) есть:

$$\varphi_0(x) = 1 + m_0 \cdot \cos(k_0 \cdot x). \quad (9)$$

Легко убедиться в том, что решение задачи Коши (8)–(9) имеет вид:

$$\varphi(x,t) = 1 + m(t) \cdot \cos(k_0 \cdot x), \quad (10)$$

где

$$m(t) = m_0 \cdot \exp(-v \cdot k_0^2 \cdot t). \quad (11)$$

Отсюда следует, что решение уравнения КПЦ (1) с начальным условием (6) запишется следующим образом:

$$h(x,t) = \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln[1 + m(t) \cdot \cos(k_0 \cdot x)]. \quad (12)$$

Графики зависимости безразмерной высоты поверхности $c \cdot h/v$ от безразмерной координаты x/a в различные моменты безразмерного времени $v \cdot k_0^2 \cdot t$ представлены на рис. 1. Они соответствуют значению «глубины модуляции» m_0 начального условия (6), равному 0,7.

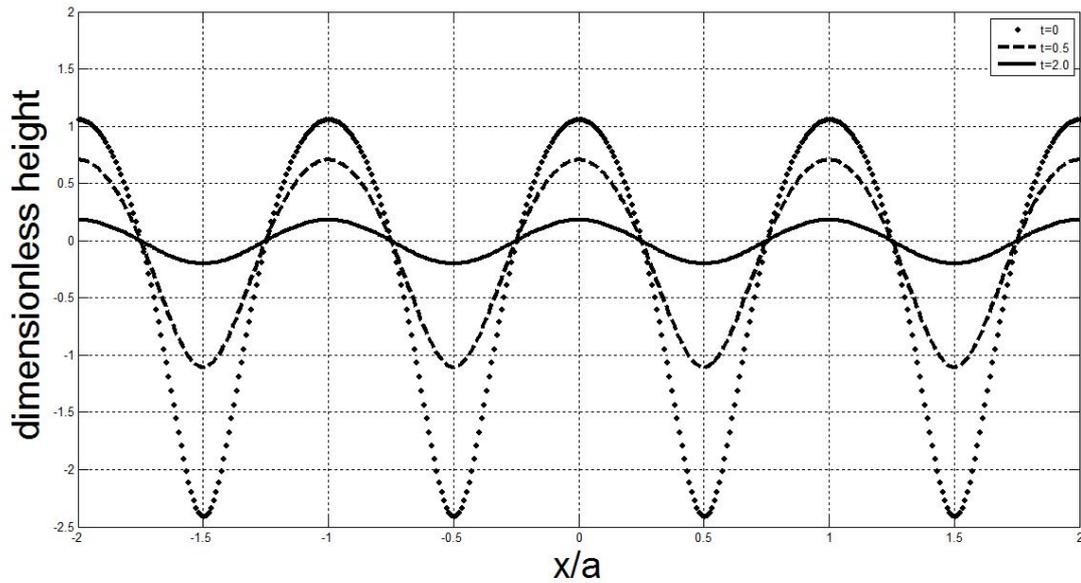


Рис. 1. Временная эволюция высоты (1+1)D-поверхности

Из формулы (12) видно, что $h(x + a, t) = h(x, t)$, поэтому для найденного нами явного решения уравнения КПЦ (1) должно быть справедливо разложение (3). Для того чтобы установить его коэффициенты, вспомним известный [1] ряд Фурье:

$$\ln(1 + r^2 + 2 \cdot r \cdot \cos\theta) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{r^n}{n} \cdot \cos(n \cdot \theta), \quad |r| < 1. \quad (13)$$

Таким образом, сравнивая формулы (12) и (13), найдем, что функция (12) раскладывается в ряд Фурье (3) со следующими коэффициентами:

$$h_0(t) = -\frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln[1 + r^2(t)], \quad h_n(t) = \frac{2 \cdot v}{c} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{r^n(t)}{n}, \quad n \in N, \quad (14)$$

где $r(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - m^2(t)}}{m(t)}$ – решение квадратного уравнения $\frac{2 \cdot r(t)}{1 + r^2(t)} = m(t)$, меньшее единицы.

Функции времени (14), очевидно, являются точными решениями бесконечномерной системы ОДУ (4). Графики зависимостей первых трех безразмерных коэффициентов $c \cdot h_n / v$ разложения (3) от безразмерного времени (при $m_0 = 0,7$) приведены на рис. 2.

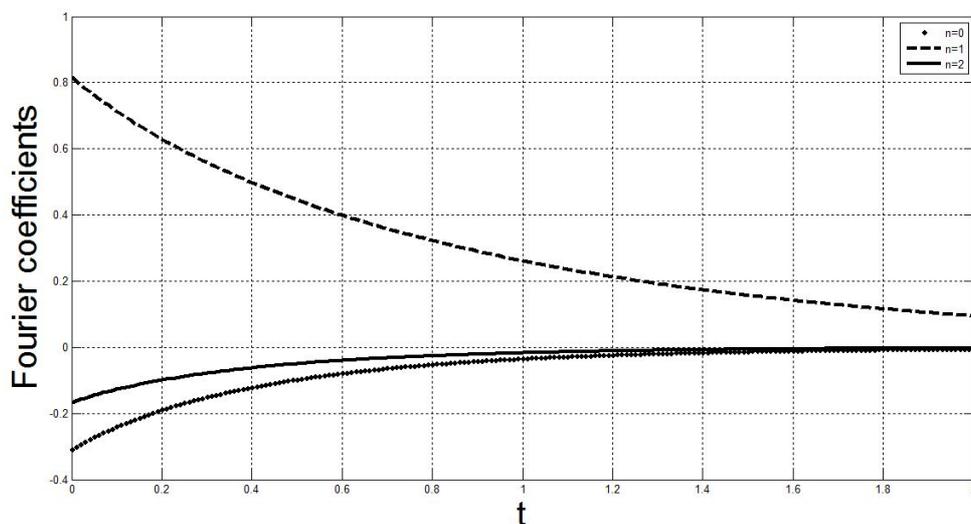


Рис. 2. Временная эволюция коэффициентов ряда Фурье для одномерного уравнения КПЦ

При $t \gg (v \cdot k_0^2)^{-1}$ величина (11) становится очень малой, поэтому логарифм в формуле (12) можно разложить в ряд Тейлора, т. е.:

$$h(x, t) \approx \frac{2 \cdot v}{c} \cdot m(t) \cdot \cos(k_0 \cdot x). \quad (15)$$

Выражение (15) означает, что на больших временах все неоднородности поверхности сглаживаются.

2. Явное решение уравнения КПЦ для 2D-поверхности и его применения

Очевидно, что на практике гораздо более реалистичной является ситуация, когда начальный профиль поверхности твердого тела является не поверхностью с цилиндрической образующей, а поверхностью общего положения. В этом случае рост поверхности описывается двумерным вариантом уравнения КПЦ [5; 6]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] + v \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right). \quad (16)$$

Выберем для уравнения (16) следующее начальное условие:

$$H_0(x, y) = \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln[1 + m_0 \cdot \cos(k_0 \cdot x)] + \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln[1 + m_0 \cdot \cos(k_0 \cdot y)]. \quad (17)$$

График этой функции при $m_0 = 0,7$ приведен на рис. 3.

Как указано в докладе [2], в таких случаях, несмотря на нелинейность уравнения КПЦ (16), для него справедлив специфический вариант метода разделения переменных, а именно, его точное решение, соответствующее начальному условию (17), есть:

$$H(x, y, t) = \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln[1 + m(t) \cdot \cos(k_0 \cdot x)] + \frac{2 \cdot v}{c} \cdot \ln[1 + m(t) \cdot \cos(k_0 \cdot y)]. \quad (18)$$

Это явное решение можно трактовать как поверхность кристалла кубической симметрии, растущую в направлении одного из ребер кристаллической ячейки. Более того, на основе этого решения можно продвинуться в решении следующей задачи.

Учтем при описании роста такой поверхности находящийся вблизи нее дополнительный источник частиц $\mu \cdot F(x, y, t)$ [5]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] + v \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \mu \cdot F(x, y, t) \quad (19)$$

и зададим начальное условие к уравнению КПЦ (19) в виде:

$$h_0(x, y) = H_0(x, y) + \mu \cdot u_0(x, y). \quad (20)$$

Далее, будем считать, что μ – малый параметр: $0 < \mu \ll 1$, а $H_0(x, y)$ – профиль (17). Таким образом, начальное условие (20) есть «испорченный» малой добавкой $\mu \cdot u_0(x, y)$ профиль, представленный на рис. 3.

В этом случае решение уравнения КПЦ (19) целесообразно искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра μ :

$$h(x, y, t) = H(x, y, t) + \mu \cdot u(x, y, t) + \dots, \quad (21)$$

в котором в качестве нулевого приближения взято выражение (18).

Тогда первое приближение $u(x, y, t)$ будет подчиняться следующему линейному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + V(y, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = v \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t) \quad (22)$$

с начальным условием:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (23)$$

где функция

$$V(x, t) = -c \cdot \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \equiv \frac{2 \cdot v \cdot k_0 \cdot m(t) \cdot \sin(k_0 \cdot x)}{1 + m(t) \cdot \cos(k_0 \cdot x)}. \quad (24)$$

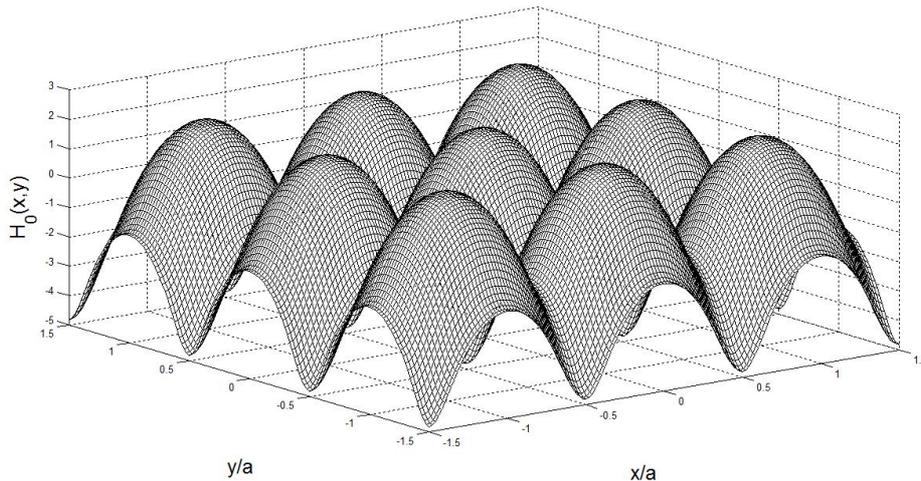


Рис. 3. Начальное условие для двумерного уравнения КПЦ

Задача Коши (22)–(24) из-за переменности ее коэффициентов (24) может быть решена только численно.

Выберем натуральное число L и рассмотрим замкнутый квадрат $\bar{\Pi} = [-L \cdot a, L \cdot a] \times [-L \cdot a, L \cdot a]$. При $L \gg 1$ он содержит много элементарных ячеек кубической кристаллической решетки. Зададим в этом квадрате сетку с шагом Δ : $x_k = k \cdot \Delta$, $y_m = m \cdot \Delta$, введем разбиение по времени $t_j = j \cdot \tau$ с шагом τ и определим сеточные функции $u_{km}^j \equiv u(x_k, y_m, t_j)$, $F_{km}^j \equiv F(x_k, y_m, t_j)$ и $v_k^j \equiv v(x_k, t_j)$, тогда решение уравнения (22) может быть найдено с помощью обобщения метода дробных шагов [3]:

$$\frac{u_{km}^{j+\frac{1}{2}} - u_{km}^j}{\tau/2} + \hat{\Lambda}_x u_{km}^{j+\frac{1}{2}} + \hat{\Lambda}_y u_{km}^j = F_{km}^j, \quad \frac{u_{km}^{j+1} - u_{km}^{j+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \hat{\Lambda}_x u_{km}^{j+\frac{1}{2}} + \hat{\Lambda}_y u_{km}^{j+1} = F_{km}^{j+\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

где разностные операторы $\hat{\Lambda}_x$ и $\hat{\Lambda}_y$ есть:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_x u_{km}^j &\equiv v_k^j \cdot \frac{u_{k+1,m}^j - u_{k-1,m}^j}{2 \cdot \Delta} - v \cdot \frac{u_{k+1,m}^j - 2 \cdot u_{km}^j + u_{k-1,m}^j}{\Delta^2}, \\ \hat{\Lambda}_y u_{km}^j &\equiv v_m^j \cdot \frac{u_{k,m+1}^j - u_{k,m-1}^j}{2 \cdot \Delta} - v \cdot \frac{u_{k,m+1}^j - 2 \cdot u_{km}^j + u_{k,m-1}^j}{\Delta^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Системы линейных уравнений в (25) решаются методом прогонки [3].

Заключение

В представленной работе получены явные решения одномерного и двумерного уравнений КПЦ. При условии определения способа задания граничного условия $u(x, y, t)|_{\text{от}}$ к уравнению (22) эти решения с помощью разностной схемы (25)–(26) могут быть положены в основу численно-аналитического метода исследования роста шероховатой поверхности твердого тела.

Сведение уравнения КПЦ (1) к бесконечномерной системе ОДУ (4) также представляет значительный интерес для изучения растущей поверхности с цилиндрической образующей, а именно, если начальный профиль такой поверхности задается тригонометрическим полиномом порядка N , то бесконечномерная система (4) редуцируется к конечномерной системе ОДУ с размерностью фазового пространства, равной $2 \cdot N + 1$. Очевидно, что в эту схему вкладываются и усеченные лакунарные тригонометрические ряды, которыми задаются регуляризованные фрактальные профили поверхности [6]. Однако необходимо отметить, что повышение точности приближения фрактала таким рядом ведет к повышению порядка тригонометрического полинома N , т. е. размерности фазового пространства, и для численного исследования конечномерной системы ОДУ в этой ситуации нужно будет использовать параллельные вычисления на суперЭВМ.

Результаты применения этих методов к анализу реальных поверхностей перспективных материалов микроэлектроники могут быть проверены экспериментально с помощью атомной сило-

вой микроскопии [6], а внедрение описанных в данной статье подходов в отечественное микроэлектронное производство приведет к заметному улучшению качества элементной базы отечественной радиоэлектроники.

Список литературы

1. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. для студ. ун-тов и вузов : в 3 т. Т. 3. М. : Высш. шк., 1989. 352 с.
2. Рассадин А. Э. О рассеянии электромагнитных волн на динамических подстилающих поверхностях // Всероссийская ежегодная научно-техническая конференция «Общество, наука, инновации» (НТК-2012) : сб. материалов: Общеуниверситетская секция, БФ, ГФ, ФЭМ, ФАВТ, ФАМ, ФПМТ, ФСА, ХФ, ЭТФ / отв. ред. С. Г. Литвинец. Киров : ВятГУ, 2012. С. 1362–1366.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск : Наука, 1967. 197 с.
4. Gubinelli M., Perkowski N. KPZ Reloaded // Communications in Mathematical Physics. 2017. V. 349. № 1. P. 165–269.
5. Kardar M., Parisi G., Zhang Y. C. Dynamical scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 889–892.
6. Rassadin A. E. et al. Model for growth of fractal solid state surface and possibility of its verification by means of atomic force microscopy // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2017. V. 256. № 012026. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/256/1/012026>. 10 p. (дата обращения: 11.02.2018).

New explicit solution of the Kardar – Parisi – Zhang equation and its application

A. E. Rassadin¹, A. V. Stepanov², L. A. Fomin³

¹ member of the Board of Nizhny Novgorod mathematical society. Russia, Nizhny Novgorod.

ORCID: 0000-0002-7396-0112. E-mail: brat_ras@list.ru

² PhD of physical and mathematical sciences, senior lecturer of the Department of mathematics, physics and information technology, faculty of engineering, Chuvash State Agricultural Academy. Russia, Cheboksary.

ORCID: 0000-0003-4306-1199. E-mail: for.antonstep@gmail.com

³ PhD of physical and mathematical sciences, researcher, Institute of problems of microelectronics technology and high purity materials of Russian Academy of Sciences. Russia, Chernogolovka. E-mail: fomin@iptm.ru

Abstract: At present all over the world considerable interest is shown in methods of investigation of nano- and microspheres applicable to design of nano- and micromaterials with preassigned physical and physicochemical properties. Putting such nanoengineering into practice insistently requires realization of interdisciplinary joining of theoretical approaches to description of growth of nano- and microstructures and methods of its experimental research at first by means of atomic force microscopy with contemporary level of development of computational mathematics and information technologies. In the work presented theoretical investigation of one model of epitaxial technology is carried out. This model takes into account both adhesion of particles of falling out substance to surface of solid state and their transfer along the surface under its growth. On the basis of the model new numerically-analytical method for determination of shape of rough interface has been proposed. The method is also admissible for description of spatially-temporal evolution of fractal initial inhomogeneities of the interface.

Keywords: separation of variables, Fourier series, mesh function, surface with cylindrical generatrix, regularized fractal shape.

References

1. Kudryavcev L. D. Kurs matematicheskogo analiza : ucheb. dlya stud. un-ov i vuzov : v 3 t. T. 3 [Course of mathematical analysis : textbook for students of universities and high schools: in 3 vol. Vol. 3]. M. Vyssh. shk. 1989. 352 p.
2. Rassadin A. E. O rasseyanii elektromagnitnykh voln na dinamicheskikh podstilyayushchih poverhnostyakh [On the scattering electromagnetic waves on the dynamic of the underlying surfaces] // Vserossiyskaya ezhegodnaya nauchno-tehnicheskaya konferenciya «Obshchestvo, nauka, innovacii» (NTK-2012) : sb. materialov: Obshcheuniversitetskaya sekcija, BF, GF, FEHM, FAVT, FAM, FPMT, FSA, HF, EHTF - All-Russian annual scientific and technical conference "Society, science, innovation" (ITC-2012): materials: the All-University section, BF, GF, FEM, FACT, FAM, FAMT, FBA, ChF, ETF / resp. ed. S. G. Litvinets. Kirov. VyatSU. 2012. Pp. 1362–1366.
3. Yanenko N. N. Metod drobnnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki [The method of fractional steps for solving multidimensional problems of mathematical physics]. Novosibirsk. Nauka. 1967. 197 p.
4. Gubinelli M., Perkowski N. KPZ Reloaded // Communications in Mathematical Physics. 2017. V. 349. № 1. P. 165–269.
5. Kardar M., Parisi G., Zhang Y. C. Dynamical scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 889–892.
6. Rassadin A. E. et al. Model for growth of fractal solid state surface and possibility of its verification by means of atomic force microscopy // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2017. V. 256. № 012026. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/256/1/012026>. 10 p. (date accessed: 11.02.2018).

Тепловое излучение факела модельного жидкостного ракетного двигателя*

В. А. Кузьмин¹, И. А. Заграй², Е. И. Маратканова³, Н. А. Шмакова⁴

¹ доктор технических наук, профессор кафедры инженерной физики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: kuzmin@vyatsu.ru

² кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной физики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: Zagray@vyatsu.ru

³ кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной физики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: e.maratkanova@mail.ru

⁴ аспирант кафедры инженерной физики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: usr09554@vyatsu.ru

Аннотация. В работе с помощью разработанной нами комплексной методики проведены вычислительные исследования теплового излучения факела модельного жидкостного ракетного двигателя (ЖРД). Модельный двигатель, являясь уменьшенной в 45 раз копией ЖРД F-1, работал на кислороде и этилене в соотношении компонентов 2,25. Получены спектральные интенсивности излучения и степени черноты в зависимости от состава продуктов сгорания. Установлено, что газовая фаза в продуктах сгорания придает ярко выраженный селективный характер инфракрасному излучению факела ракетного двигателя и что наибольшая степень черноты продуктов сгорания наблюдается в полосе поглощения CO₂. Эта полоса наиболее интересна для измерения температуры продуктов сгорания ракетных двигателей на срезе сопла и в факеле. Удовлетворительное согласие расчетных результатов с экспериментом при горении газообразного топлива дает основание использовать расчетную методику при исследовании характеристик излучения (интенсивностей, спектральных и интегральных плотностей потоков и степеней черноты) топочных газов при использовании в топках природного газа.

Ключевые слова: вычислительный эксперимент, тепловое излучение, факел, модельный жидкостный ракетный двигатель, интенсивность излучения, степень черноты.

Исследование теплового излучения факела ракетных двигателей представляет практический интерес при решении проблем организации радиосвязи с летательными аппаратами (ЛА), проблем обнаружения и распознавания (селекции) ЛА, проблем наведения зенитных управляемых ракет по тепловому излучению факела ЛА, проблем защиты ЛА ложными тепловыми целями, проблем теплозащиты элементов конструкций донной части ракет, при моделировании и диагностике плазменных струй. Решение указанных проблем представляет собой дорогостоящий и трудноосуществимый натурный эксперимент в реальных полетных условиях. Поэтому для отладки методик моделирования и решения указанных проблем проводятся наземные эксперименты на моделях с использованием вакуумных камер [2; 6].

С развитием вычислительной техники наряду с экспериментальными исследованиями стал бурно развиваться и нашел широкое распространение математический эксперимент, применяемый для моделирования различных процессов. Существуют работы, посвященные численному моделированию газодинамики [1; 3] и ИК-излучения факелов ракетных двигателей [4; 5; 7].

В данной работе с помощью разработанной нами комплексной методики расчета и моделирования теплового излучения факела ракетного двигателя [9; 10] проводятся вычислительные исследования и сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными теплового излучения факела модельного жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) [8].

Реальный ЖРД F-1 работает на жидком кислороде и керосине RP-1 с соотношением компонентов 2,27. Высота двигателя – 5,79 м, диаметр – 3,76 м, степень расширения сопла – 16:1, давление в камере сгорания – 7 МПа.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-01145 а.
© Кузьмин В. А., Заграй И. А., Маратканова Е. И., Шмакова Н. А., 2018

Модельный двигатель, являясь уменьшенной в 45 раз копией ЖРД F-1, работал на кислороде и этилене (C_2H_4) в соотношении компонентов 2,25. Истечение струи факела происходило в вакуумную камеру с давлениями, имитирующими полет ракеты на высотах от 10 до 67 км.

Ценность эксперимента на модельном двигателе при реальных условиях в широком интервале длин волн 1,5...5 мкм с помощью двух спектрометров с приемниками излучения на гетероструктурах заключается в том, что на нем можно апробировать расчетные методики.

При расчетных исследованиях принимались следующие исходные данные: диаметр струи факела на срезе сопла $L = 8,22$ см, давление продуктов сгорания на срезе сопла $p = 0,29 \cdot 10^5$ Па, температура продуктов сгорания на срезе сопла $T = 1660$ К. ИК-излучение факела определялось газами CO_2 и H_2O с массовыми долями 0,725 и 0,275 соответственно. Спектральный коэффициент поглощения газовой фазы $\alpha_{г\lambda}$ (рис. 1) вычислялся с использованием информационной системы Spectra (<http://spectra.iao.ru>).

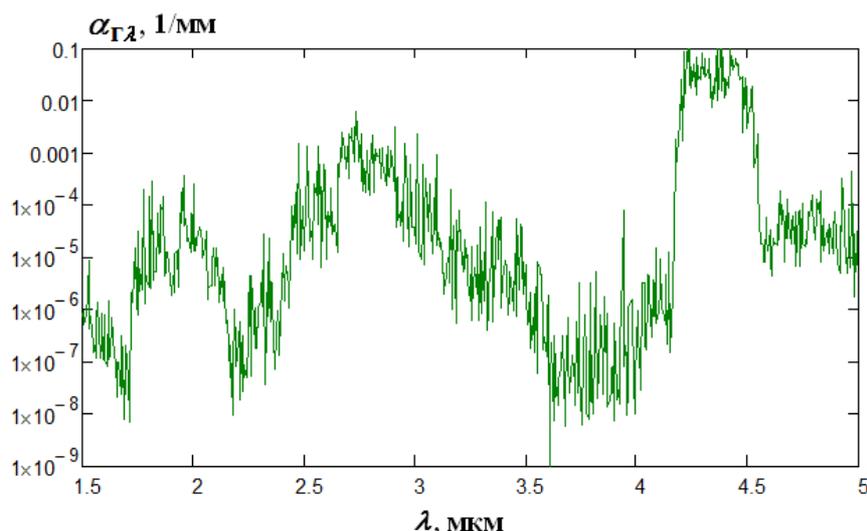


Рис. 1. Спектральный коэффициент поглощения газовой фазы

Перенос энергии излучения в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде описывается интегрально-дифференциальным уравнением вида

$$(\Omega \nabla) I_{\lambda}(r, \Omega) + \kappa_{\lambda} I_{\lambda}(r, \Omega) = \beta_{\lambda} \int I_{\lambda}(r', \Omega') \gamma_{\lambda}(r, r', \Omega, \Omega') d\omega' + \alpha_{\lambda} I_{0\lambda}(r), \quad (4\pi)$$

где Ω – направление, I_{λ} – спектральная интенсивность излучения, r – координата, ω – телесный угол, $I_{0\lambda}$ – спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела (АЧТ).

При рассмотрении радиационных характеристик единичного объема суммарный коэффициент поглощения конденсированной фазы и газовой фазы определяется по формуле: $\alpha_{\lambda} = \alpha_{z\lambda} + \alpha_{г\lambda}$. В случае гомогенных продуктов сгорания (только газовая фаза) $\alpha_{\lambda} = \alpha_{г\lambda}$. Коэффициент ослабления единичного объема продуктов сгорания (без учета рассеяния, $\beta_{\lambda} = 0$): $\kappa_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$.

Для решения уравнения переноса энергии излучения использовался метод сферических гармоник в P_3 -приближении для условий одномерной геометрии. Рассматривалось изотермическое диаметрально сечение факела вблизи среза сопла. Расчеты характеристик излучения (интенсивностей и степеней черноты) проведены по комплексной программе «Спектр», созданной для определения теплового излучения гомогенных и гетерогенных продуктов сгорания энергетических установок [9; 10].

На рис. 2 и 3 представлены спектральная интенсивность излучения и степень черноты в зависимости от длины волны. Экспериментальный спектр в диапазоне длин волн 1,6...5,0 мкм был получен стыковкой двух спектров, замеренных спектрометрами в двух диапазонах 1,6...3,2 мкм и 3,0...5,0 мкм с разрешением по спектру 0,04 мкм и эквивалентной высотой полета ракеты 41 км [8]. В первом спектральном диапазоне использовался спектрометр с детектором из кристалла арсенида индия, охлаждаемый сухим льдом, а для второго диапазона использовался спектрометр с детектором из кристалла антимонида индия, охлаждаемый жидким азотом.

Проведенное сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными показало, что присутствие газовой фазы в продуктах сгорания придает селективный характер ИК-излучению факела ракетного двигателя.

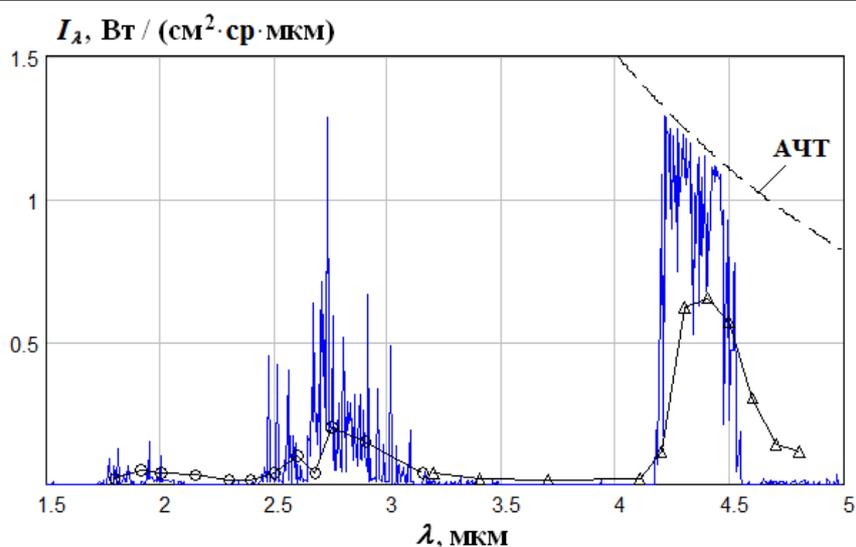


Рис. 2. Спектральная интенсивность излучения факела вблизи среза сопла:
 ———— расчет по методике данной работы;
 ○ — эксперимент (развертка в диапазоне коротких волн);
 △ — эксперимент (развертка в диапазоне длинных волн).

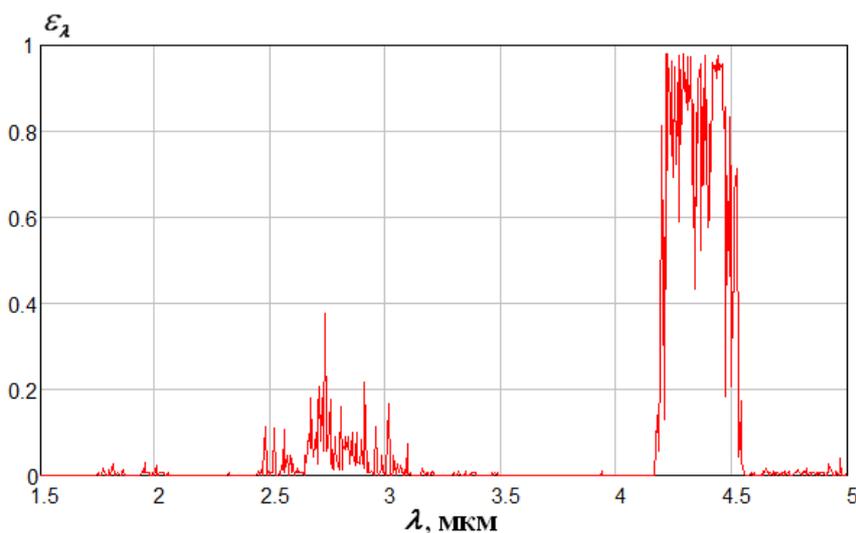


Рис. 3. Спектральная степень черноты факела вблизи среза сопла

Из полученного экспериментального спектра следует, что максимальная спектральная интенсивность излучения участка факела вблизи среза сопла наблюдается для полосы поглощения CO_2 при длине волны 4,4 мкм и равна 0,67 Вт/(см²·мкм·ср), что соответствует наибольшей спектральной степени черноты, равной 0,81. Эта полоса наиболее интересна для измерения температуры продуктов сгорания ракетных двигателей на срезе сопла и в факеле.

Проведенное расчетное исследование по разработанной методике позволило определить спектральную интенсивность излучения и степень черноты продуктов сгорания факела вблизи среза сопла для условий работы модельного ЖРД на этилене и кислороде. Удовлетворительное согласие расчетных результатов с экспериментальными данными Клейна и Пензиаса [8] в спектральном интервале 1,5...5 мкм дает основание использовать расчетную методику для определения характеристик излучения (интенсивностей, спектральных и интегральных плотностей потоков и степеней черноты) для факелов котельных агрегатов при использовании в топках природного газа и других энергетических установок, работающих не только с гетерогенными, но и с гомогенными продуктами сгорания.

Список литературы

1. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П., Худяков В. А. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания : справочник : в 10 т. / под ред. В. П. Глушко. М. : АН СССР-ВИНИТИ, 1971. Т. 1. 266 с.
2. Андреев Е. П., Завелевич Ф. С., Макаров И. П. Сравнение результатов расчета ИК-излучения факела с экспериментальными данными, полученными в вакуумной камере // Оптический журнал. 1998. Т. 65. № 11. С. 34–36.

3. Димитриенко Ю. И., Коряков М. Н., Захаров А. А. Численное моделирование газодинамики факела ракетных двигателей // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 9 (21). URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/flammable/1115.html> (дата обращения: 22.01.2018).

4. Нельсон Х. Ф. Влияние частиц на ИК-излучение выхлопных струй тактической ракеты // Аэрокосмическая техника. 1986. № 1. С. 119–127.

5. Тиранов А. Д., Филиппов В. Л. Расчет спектральной плотности силы излучения факелов ракетных двигателей на твердом топливе // Оптический журнал. 2012. 79, 3. С. 77–83.

6. Травников Р. И., Попов Н. А. Метод и аппаратура оптической диагностики факела ракетного двигателя при стендовых испытаниях // Труды МАИ : электрон. журн. 2012. Вып. 51. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29136> (дата обращения: 22.01.2018).

7. Guobiao C., Dingqiang Z., Xiaoying Z. Numerical simulation of the infrared radiative signatures of liquid and solid rocket plumes // Aerospace Science and Technology. 2007. Vol. 11. P. 473–480.

8. Klein L., Penzias G. J. Spectral radiances of model rocket exhaust gases at simulated altitude measured with a rapid-scanning spectrometer // AIAA Journal. 1967. Vol. 5. № 9. P. 1690–1692.

9. Kuzmin V. A., Zagrai I. A., Shmakova N. A. Modeling of thermal radiation of combustion products in the gas generator // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). 2017.

10. Kuzmin V. A., Maratkanova E. I., Zagrai I. A. Modeling of thermal radiation of heterogeneous combustion products in the model solid rocket engine plume // Procedia Engineering. 2017. Vol. 206. P. 1801–1807.

Thermal radiation of the torch of model liquid rocket engine

V. A. Kuzmin¹, I. A. Zagray², E. I. Maratkanova³, N. A. Shmakova⁴

¹ Doctor of technical sciences, professor of the Department of engineering physics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: kuzmin@vyatsu.ru

² PhD of technical sciences, associate professor of engineering physics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: Zagray@vyatsu.ru

³ PhD of technical sciences, associate Professor of engineering physics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: e.maratkanova@mail.ru

⁴ post-graduate student of the Department of engineering physics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr09554@vyatsu.ru

Abstract. Computational studies of thermal radiation of the model liquid rocket engine (LRE) torch were carried out in the work with the help of the complex technique developed by us. The model engine, being reduced by 45 times a copy of LRE F-1, worked on oxygen and ethylene in a ratio of 2.25 components. The spectral intensities of radiation and the degree of blackness depending on the composition of the combustion products are obtained. It was found that the gas phase in the combustion products gives a pronounced selective character to the infrared radiation of the rocket engine torch and that the greatest degree of blackness of the combustion products is observed in the absorption band of CO₂. This strip is most interesting for measuring the temperature of the combustion products of rocket engines on the nozzle cut and in the torch. The satisfactory agreement of the calculated results with the experiment in combustion of gaseous fuel gives grounds to use the calculation method in the study of the radiation characteristics (intensities, spectral and integral densities of flows and degrees of blackness) of flue gases when used in natural gas furnaces.

Keywords: computational experiment, thermal radiation, torch, model liquid rocket engine, radiation intensity, blackness.

References

1. Alemasov V. E., Dregalin A. F., Tishin A. P., Hudyakov V. A. *Termodinamicheskie i teplofizicheskie svojstva produktov sgoraniya : spravochnik : v 10 t.* [Thermodynamic and thermophysical properties of combustion products: reference: in 10 vol. / under the editorship of V. P. Glushko. M. USSR Academy of Sciences-All-Russia Institute of Scientific and Technical Information. 1971. Vol.1. 266 p.

2. Andreev E. P., Zavelevich F. S., Makarov I. P. *Sravnenie rezul'tatov rascheta IK-izlucheniya fakela s ehksperimental'nymi dannymi, poluchennymi v vakuumnoj kamere* [Comparison of the results of calculation of the infrared radiation of the torch with experimental data obtained in a vacuum chamber] // *Opticheskij zhurnal* – Optical journal. 1998, vol. 65, No. 11, pp. 34–36.

3. Dimitrienko YU. I., Koryakov M. N., Zaharov A. A. *CHislennoe modelirovanie gazodinamiki fakela raketnyh dvigatelej* [Numerical simulation of gas dynamics torch rocket engines] // *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii* – Engineering journal: science and innovation. 2013, issue. 9 (21). Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/flammable/1115.html> (date accessed: 22.01.2018).

4. Nel'son H. F. *Vliyanie chastic na IK-izluchenie vykhlopnnyh struj takticheskoy rakety* [Effect of particles on IR radiation exhaust jets of the tactical missiles] // *Aehrokosmicheskaya tekhnika* - Aerospace engineering. 1986, No. 1, pp. 119–127.

5. Tiranov A. D., Filippov V. L. *Raschet spektral'noj plotnosti sily izlucheniya fakelov raketnyh dvigatelej na tverdom toplive* [Calculation of the spectral density of power of radiation of torches, rocket engines solid fuel] // *Opticheskij zhurnal* – Optical journal. 2012, 79, 3, pp. 77–83.

6. *Travnikov R. I., Popov N. A. Metod i apparatura opticheskoy diagnostiki fakela raketnogo dvigatelya pri stendovyh ispytaniyah* [Method and equipment of optical diagnostics of rocket engine torch at bench tests] // *Trudy MAI : ehlektron. zhurn.* – Proceedings of MAI: electron. journ. 2012. Issue. 51. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29136> (date accessed: 22.01.2018).

7. *Guobiao C., Dingqiang Z., Xiaoying Z.* Numerical simulation of the infrared radiative signatures of liquid and solid rocket plumes // *Aerospace Science and Technology.* 2007. Vol. 11. P. 473–480.

8. *Klein L., Penzias G. J.* Spectral radiances of model rocket exhaust gases at simulated altitude measured with a rapid-scanning spectrometer // *AIAA Journal.* 1967. Vol. 5. № 9. P. 1690–1692.

9. *Kuzmin V. A., Zagrai I. A., Shmakova N. A.* Modeling of thermal radiation of combustion products in the gas generator // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). 2017.

10. *Kuzmin V. A., Maratkanova E. I., Zagrai I. A.* Modeling of thermal radiation of heterogeneous combustion products in the model solid rocket engine plume // *Procedia Engineering.* 2017. Vol. 206. P. 1801–1807.

Конечно-элементное моделирование продольных колебаний упругого стержня при соударении его с неподвижной преградой

А. П. Левашов¹, Б. Л. Тимофеев²

¹ кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: 670094@rambler.ru

² кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00461@vyatsu.ru

Аннотация. Моделируется прохождение упругих волн в кумулятивной струе при столкновении ее с неподвижной преградой. Кумулятивная струя представлена в виде упругого стержня, имеющего коэффициент вязкости. Построена конечно-элементная модель вязкоупругого стержня на стадии столкновения с неподвижной преградой. Выбран конечный элемент для моделирования кумулятивной струи. Записаны перемещения произвольной точки конечного элемента. Составлены матрицы масс и демпфирования конечного элемента вязкоупругого стержня. Получено уравнение движения конечного элемента и дифференциальное уравнение конечно-элементной модели. Проведены численные эксперименты на примере высокоскоростной газо-кумулятивной струи. По результатам численных экспериментов построена диаграмма развития затухающих колебаний кумулятивной струи. Показано, что метод конечных элементов пригоден для моделирования высокоскоростных газо-кумулятивных струй.

Ключевые слова: кумулятивная струя; математическая модель; взрывчатые вещества; детонационная волна; конечный элемент; уравнение движения конечного элемента; матрица масс; матрица демпфирования; коэффициент динамичности.

Изучение газокумулятивных зарядов ведется давно ввиду их широкого применения во многих областях науки и техники. Но до сих пор многие особенности протекающих процессов остаются до конца не исследованными. Ранее эти исследования большей частью проводились с помощью аналитических и экспериментальных методов. Однако, несмотря на то что экспериментальные исследования играют основную роль в изучении импульсных устройств и технологий, использующих в своей основе взрывчатые вещества, без глубокого теоретического анализа, как правило, не удается достичь требуемого результата [1]. Помимо всего этого современные условия требуют необходимости сокращения количества испытаний по причине их дороговизны. Поэтому большое значение и практическую ценность приобрели исследования, проводимые на основе численных методов механики сплошной среды, которые, в свою очередь, предъявляют повышенные требования не только к качеству физико-математических моделей, но и уровню разработанных на их основе алгоритмов расчета [3].

Современные численные методы позволяют решать такие сложные задачи, включающие генерацию и распространение ударных и детонационных волн в упругих телах и газах с возможными фазовыми переходами твердой фазы в газ и последующим ударно-волновым нагружением [1]. Возможности математических моделей достаточно широки и зависят от полноты используемых свойств моделируемых процессов. И здесь, по мнению автора, очень удобен метод конечных элементов, который является универсальным методом, широко применяемым для решения задач прикладной физики. В статье на основе метода конечных элементов разработана математическая модель высокоскоростной кумулятивной струи при столкновении ее с неподвижной преградой.

Конструкция заряда состоит из бризантного взрывчатого вещества с осевой симметрией и клиновидной кумулятивной выемки с одного конца, имеющей металлическую облицовку, выполненную из металла (чаще медь или ее сплавы), с углом раствора, достигающего 90 градусов (рис. 1.) Кумулятивная струя образуется в результате детонации взрывчатого вещества, и тогда образующиеся продукты детонации, воздействующие на кумулятивную облицовку, приводят к ее схлопыванию и формированию металлической струи из внутреннего слоя облицовки.

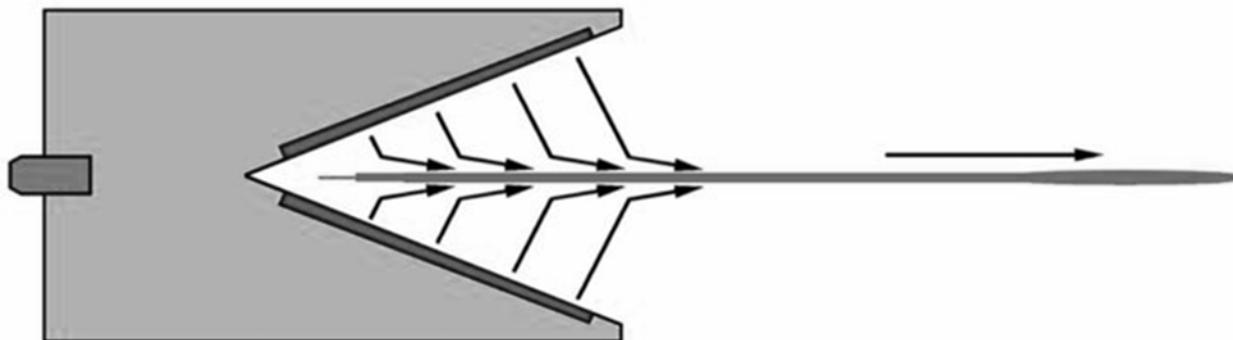


Рис. 1. Заряд с образующейся кумулятивной струей

Кумулятивная струя, аккумулирующая в себе энергию взрывчатого вещества, может достигать скорости до 10 км/с. Металл облицовки в формирующейся высокоскоростной кумулятивной струе представлен в виде критического состояния, находящегося между твердым веществом и жидкостью, когда ее структура еще не отличается от структуры твердого вещества. Это представление не противоречит теореме Гельмгольца, согласно которой движение частиц или газа представлено как движение, состоящее из квазитвердого и деформационного, что подобно вязкоупругому телу модели Фойхта – Кельвина. Кумулятивная струя, выдавливаемая из обжатого вкладыша, формируется в виде стержня переменного сечения, находящегося перед преградой. Для упрощения рассмотрения процесса примем, что стержень имеет постоянное сечение, а также однороден по длине. Процесс взаимодействия стержня с преградой будет рассматриваться на стадии соударения с ней. В момент, когда стержень сталкивается с неподвижной преградой, от плоскости контакта ударник-мишень в противоположные стороны отражается ударная волна и в стержне-ударнике развивается процесс продольных колебаний. При контакте с преградой малый элемент (лидирующая часть) струи под воздействием тепла от продуктов детонации заряда переходит в жидкое состояние, условно названное гидродинамической жидкостью Покровского – Биркгоффа [2], которую можно считать вязкоупругой жидкостью, подчиняющейся модели Максвелла. Колебания стержня, обусловленные одновременным действием квазиупругой силы и силой трения (которая пропорциональна мгновенной скорости), являются затухающими колебаниями. Уравнение собственных колебаний стержня, описывающее процесс прохождения упругих волн, запишется в виде:

$$M \ddot{r} + C \dot{r} + K r = 0$$

Для получения уравнений движения конечно-элементной модели стержня взят стержневой конечный элемент при одноосном однородном напряженном состоянии (рис. 2).

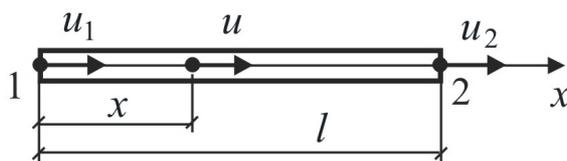


Рис. 2. Стержневой конечный элемент

Уравнение, описывающее движение i-го конечного элемента стержня, имеет вид:

$$M_i^e \ddot{r}_i^e + C_i^e \dot{r}_i^e + K_i^e r_i^e = 0$$

Перемещение $u(x)$ произвольной точки конечного элемента вдоль оси X можно выразить через узловые перемещения u_1 и u_2 так, чтобы выполнялись условия $u(0) = u_1, u(l) = u_2$. $u(x) = u_1 (1 - x/l) + u_2 x/l = u_1 N_1 + u_2 N_2$. Отсюда следуют функции распределения

$N_1 = 1 - x/l$, $N_2 = x/l$. Данные функции удовлетворяют условиям: в узле 1
 $N_1 = 1$, $N_2 = 0$; в узле 2 $N_1 = 0$, $N_2 = 1$.

Дифференциальные уравнения движения конечно-элементной модели имеют вид:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = 0$$

$[M]$, $[C]$, $[K]$, $\{r\}$ – соответственно матрица масс, матрица демпфирования, матрица жесткости и вектор узловых перемещений отмеченной модели;

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad [K] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M] = \rho F h \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \frac{K\delta}{\pi\omega}$$

Матрицы $[M]$, $[C]$, $[K]$ собираются методом прямой жесткости [4] из соответствующих матриц $\mathbf{M}^{(e)}$, $\mathbf{C}^{(e)}$, $\mathbf{K}^{(e)}$ конечных элементов.

Численный эксперимент

Для проведения численных экспериментов рассматривается вязкоупругий стержень длиной $L=1,6$ м и площадью поперечного сечения $F=0,0048$ м². Модуль упругости стержня $E=1,28e5$. Коэффициент демпфирования берется постоянным. Плотность стержня $\rho=8900$ кг/м³. Скорость соударения стержня с преградой берется равной $V=4000$ м/с. Для моделирования методом конечных элементов стержень разбивается на двадцать конечных элементов с длиной одного элемента, равной l . По результатам расчета построена диаграмма затухающих колебаний (рис. 3). На диаграмме показано, как происходят затухания кумулятивной струи при столкновении ее с неподвижной преградой, что вполне хорошо совпадает с аналитическими решениями, описывающими затухающие колебания. Это говорит о том, что на стадии соударения кумулятивной струи с неподвижной преградой ее моделирование методом конечных элементов возможно.

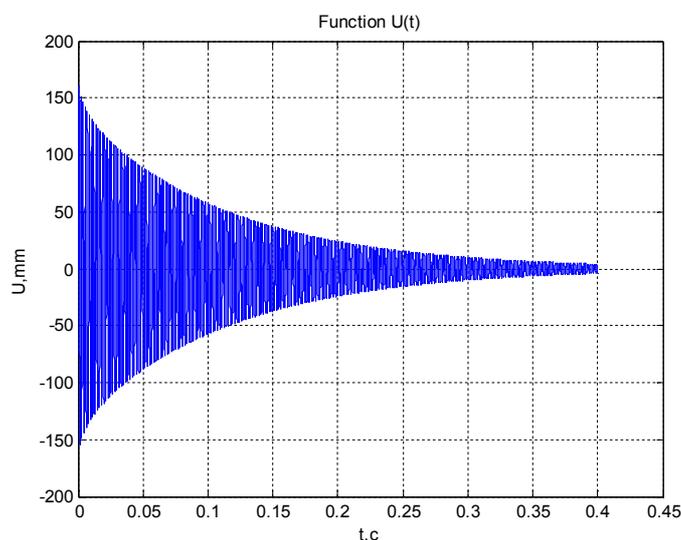


Рис. 3. Диаграмма затухания колебаний кумулятивной струи

Результаты расчета показывают, что кумулятивная струя, представленная в виде вязкоупругого стержня, хорошо моделируется методом конечных элементов. Это позволит проводить дальнейшие исследования поведения кумулятивной струи на стадии соударения с преградой, включая ее пробивную способность.

Численные эксперименты проведены с использованием лицензионного математического пакета MATLAB R2012b.

Список литературы

1. Абузяров М. Х. Численное моделирование детонации и воздействия газокумулятивных зарядов на преграды / М. Х. Абузяров, А. В. Кочетков, С. В. Крылов, Е. В. Цветкова // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1. № 2. С. 5–165.
2. Головатенко В. Д., Головатенко А. В. Процесс взаимодействия кумулятивной струи с преградой // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. «Машиностроение». 2012. № 19. С. 13–22.
3. Колпаков В. И. Математическое моделирование взрывных устройств // Наука и образование : электрон. науч.-техническое изд. 2012. 02 февр. С. 1.
4. Postnov V. A., Harhurim I. Ya. Metod konechnykh elementov v raschetah sudovyykh konstruktsiy. L. : Sudostroenie, 1974. 344 s.
5. Sterne Th. E. A Note on Collapsing Cylindrical Shells // Journ. of the Appl. Phys. 1950. Vol. 21. № 2. P. 73–74.

Finite-element modeling of longitudinal vibrations of an elastic rod at its collision with a fixed barrier

A. P. Levashov¹, B. L. Timofeev²

¹ PhD of technical sciences, associate professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: 670094@rambler.ru

² PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr00461@vyatsu.ru

Abstract: Simulated the passage of elastic waves in the shaped-charge jet when its collision with a stationary obstacle. The jet stream is presented in the form of elastic rod having a coefficient of *vyazkosti*. The finite element model of viscoelastic rod under impact against a fixed obstacle. The selected finite element for the simulation of a cumulative jet. The recorded movement of an arbitrary point of a finite element. Composed of mass matrix and damping finite element viscoelastic rod. The resulting equation of motion finite element and differential equation finite element model. Numerical experiments on the example of high-speed gas jet. According to the results of numerical experiments the diagram of the development of the damped oscillations of the cumulative jet. It is shown that the finite elements are suitable for modeling high-speed gas-cumulative jets.

Keywords: cumulative jet; mathematical model; explosives; detonation wave; finite element; equation of motion of the finite element; mass matrix; damping matrix; dynamic coefficient.

References

1. Abuzyarov M. H. *Chislennoe modelirovanie detonacii i vozdejstviya gazokumulyativnykh zaryadov na pregrady* [Numerical simulation of detonation and impact gas-cumulative charges at the barrier] / M. H. Abuzyarov, A. V. Kochetkov, S. V. Krylov, E. V. Tsvetkova // *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* - Computational mechanics of continuum. 2008, vol.1, No. 2, pp. 5–165.
2. Golovatenko V. D., Golovatenko A. V. *Process vzaimodejstviya kumulyativnoj strui s pregradoj* [Process of interaction of the jet with the obstacle] // *Vestnik YUzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. «Mashinostroenie»* – Herald of the South Ural State University. Ser. «Engineering». 2012, No. 19, pp. 13–22.
3. Kolpakov V. I. *Matematicheskoe modelirovanie vzryvnykh ustrojstv* [Mathematical modeling of explosive devices] // *Nauka i obrazovanie: ehlektron. nauch.-tekhnicheskoe izd.* - Science and education: electron. scientific- technical publication. 2012, 02 February, p. 1.
4. Postnov V. A., Harhurim I. Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetah sudovyykh konstruktsiy*. L. : Sudostroenie, 1974. 344 p.
5. Sterne Th. E. A Note on Collapsing Cylindrical Shells // *Journ. of the Appl. Phys.* 1950. Vol. 21. № 2. Pp. 73–74.

Моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойной удлиненной пластины с наследственно упругим внутренним слоем

В. М. Шишкин¹, А. П. Левашов²

¹ доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-1237-2309.

E-mail: tism1@rambler.ru

² кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: 670094@rambler.ru

Аннотация. Разработана конечно-элементная методика моделирования статической реакции при изгибе трехслойной удлиненной пластины с идеально упругими несущими слоями и внутренним наследственно упругим слоем. Несущие слои работают в рамках гипотез Кирхгоффа – Лява, внутренний слой находится в состоянии чистого поперечного сдвига. Реологические свойства материала внутреннего слоя при сдвиге учитываются интегральным уравнением теории наследственной вязкоупругости с ядром релаксации Колтунова – Ржаницына. Получена система разрешающих уравнений для определения мгновенных и временных узловых перемещений пластины. Рассмотрен пример расчета трехслойной удлиненной пластины с несущими слоями из алюминиевого сплава Д16АТ и внутренним резиновым слоем, показывающий существенное увеличение прогиба пластины за сравнительно небольшой отрезок времени по сравнению с ее мгновенным прогибом, обусловленное кратковременной ползучестью резины при сдвиге.

Ключевые слова: трехслойная пластина; конечный элемент; интегральное уравнение; ядро релаксации.

Трехслойные конструкции находят широкое применение во многих отраслях, включая авиастроение, судостроение, строительство и др. Такие конструкции обычно состоят из двух высокопрочных несущих наружных слоев и расположенного между ними легкого заполнителя. Несущие слои предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Заполнитель, служащий для образования единой конструкции, обеспечивает перераспределение напряжений между несущими слоями. В качестве заполнителя широко используются различные полимерные материалы (пенопласт, полиуретан, резина), которые способны проявлять свойства ползучести при деформациях поперечного сдвига.

Рассматривается трехслойная удлиненная пластина, состоящая по толщине из двух несущих слоев и вязкоупругого внутреннего слоя, обладающего наследственно упругими свойствами. Считается, что внешние слои являются идеально упругими и работают в рамках классических гипотез Кирхгоффа – Лява, внутренний наследственно упругий слой находится в условиях поперечного сдвига. При моделировании напряженно-деформированного состояния пластины учитывается временной фактор, обусловленный ползучестью материала внутреннего слоя. Нормальные напряжения $\sigma(t)$ в несущих слоях пластины связаны деформацией $\varepsilon(t)$ линейной зависимостью (законом Гука)

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \quad (1)$$

где E – мгновенный модуль упругости материала при растяжении-сжатии. Связь касательных напряжений $\tau(t)$ с углом поперечного сдвига $\gamma(t)$ внутреннего слоя учитывается линейным уравнением теории наследственной вязкоупругости [3]:

$$\tau(t) = G \left[\gamma(t) - \int_0^t R(t-v)\gamma(v) dv \right]. \quad (2)$$

Здесь t – время наблюдения, v – время, предшествующее моменту наблюдения, $R(t-v)$ – функция влияния угла сдвига $\gamma(v)$ на напряжение $\tau(t)$ (ядро релаксации).

Деформации несущих слоев и угол поперечного сдвига внутреннего слоя элемента определяются геометрическими зависимостями

$$\varepsilon(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-0,5h_2\theta(t) - z_1 \frac{\partial w(t)}{\partial x} \right) = -0,5h_2\theta'(t) - z_1 w''(t),$$

$$\gamma(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial x} + \frac{\partial u(t)}{\partial z_2} = w'(t) - \theta(t). \tag{3}$$

Здесь $w(t)$ – прогиб пластины, $\theta(t)$ – угол поворота поперечного сечения внутреннего слоя.

Для построения геометрической модели пластины используется трехслойный конечный элемент (рис. 1). Узловыми перемещениями элемента являются прогибы w_1, w_2 ; углы поворота φ_1, φ_2 поперечных сечений несущих слоев и углы поворота θ_1, θ_2 поперечных сечений внутреннего слоя. Отмеченные перемещения представляются вектором $\{r^{(e)}(t)\} = \{w_1 \varphi_1 \theta_1 w_2 \varphi_2 \theta_2\}$.

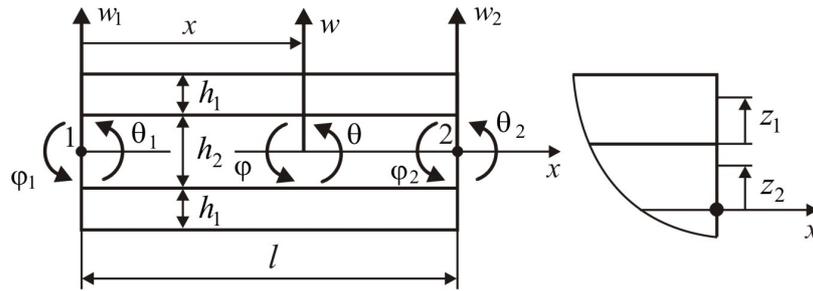


Рис. 1. Трехслойный конечный элемент

Прогиб w и угол поворота θ в пределах элемента представляются независимыми аппроксимациями

$$w = \{N\}^T \{r^{(e)}(t)\}, \quad \theta = \{S\}^T \{r^{(e)}(t)\}, \tag{4}$$

где

$$\{N\} = \{N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \ 0\}, \quad \{S\} = \{0 \ 0 \ S_1 \ 0 \ 0 \ S_2\},$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3},$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad S_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad S_2 = \frac{x}{l}.$$

Подставляя данные аппроксимации в зависимости (1) и (2), получаем связь деформации $\varepsilon(t)$ и угла сдвига $\gamma(t)$ с узловыми перемещениями $\{r^{(e)}(t)\}$ конечного элемента:

$$\varepsilon(t) = -(0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) \{r^{(e)}(t)\}; \tag{5}$$

$$\gamma(t) = (\{N'\}^T - \{S\}^T) \{r^{(e)}(t)\}. \tag{6}$$

С учетом (5) и (6) зависимости (1) и (2) принимают вид

$$\sigma(t) = -E(0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) \{r^{(e)}(t)\}. \tag{7}$$

$$\tau(t) = G(\{N'\}^T - \{S\}^T) [\{r^{(e)}(t)\} - \int_0^t R(t-v) \{r^{(e)}(v)\} dv]. \tag{8}$$

Для получения уравнений равновесия конечного элемента воспользуемся принципом Лагранжа

$$\delta A = \delta A_\sigma + \delta A_\tau + \delta A_P = 0. \tag{9}$$

Здесь $\delta A_\sigma, \delta A_\tau$ – возможная работа напряжений $\sigma(t)$ и $\tau(t)$ в слоях элемента на соответствующих им возможных деформациях $\delta\varepsilon$ и $\delta\gamma$; δA_P – возможная работа внешних сил элемента. Величины $\delta\varepsilon$ и $\delta\gamma$ определяются как изохронные вариации зависимостей (5) и (6):

$$\delta\varepsilon = -(0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) \{\delta r^{(e)}(t)\}; \quad (10)$$

$$\delta\gamma = (\{N'\}^T - \{S\}^T) \{\delta r^{(e)}(t)\}. \quad (11)$$

Возможная работа напряжений $\sigma(t)$ в несущих слоях элемента определяется выражением

$$\delta A_\sigma = -2b \int_0^l \int_0^{h_1} \delta\varepsilon \sigma(t) dz_1 dx.$$

Здесь b – ширина элемента. Внося сюда зависимости (7) и (10), получаем

$$\delta A_\sigma = -2bE \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \int_0^l \int_0^{h_1} (0,5h_2 \{S'\} + z_1 \{N''\}) (0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) dz_1 dx \{r^{(e)}(t)\}.$$

Полученному выражению можно придать вид

$$\delta A_\sigma = -\{\delta r^{(e)}(t)\}^T [K^{(e)}]_1 \{r^{(e)}(t)\}, \quad (12)$$

где

$$[K^{(e)}]_1 = 2bE \int_0^l \int_0^{h_1} (0,5h_2 \{S'\} + z_1 \{N''\}) (0,5h_2 \{S'\}^T + z_1 \{N''\}^T) dz_1 dx -$$

вклад несущих слоев в матрицу жесткости элемента.

Возможная работа касательных напряжений $\tau(t)$ в наследственно-упругом внутреннем слое определяется выражением

$$\delta A_\tau = -bh_2 \int_0^l \delta\gamma \tau(t) dx.$$

Подставляя сюда зависимости (8) и (11), получаем

$$\begin{aligned} \delta A_\tau = & -Gbh_2 \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \int_0^l (\{N'\} - \{S\}) (\{N'\}^T - \{S\}^T) dx \{r^{(e)}(t)\} + \\ & + Gbh_2 \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \int_0^l (\{N'\} - \{S\}) (\{N'\}^T - \{S\}^T) dx \int_0^t R(t-v) \{r^{(e)}(v)\} dv. \end{aligned}$$

Выражению для δA_τ можно придать вид

$$\delta A_\tau = -\{\delta r^{(e)}(t)\}^T [K^{(e)}]_2 \{r^{(e)}(t)\} + \{\delta r^{(e)}(t)\}^T [K^{(e)}]_2 \int_0^t R(t-v) \{r^{(e)}(v)\} dv, \quad (13)$$

где

$$[K^{(e)}]_2 = Gbh_2 \int_0^l (\{N'\} - \{S\}) (\{N'\}^T - \{S\}^T) dx -$$

вклад внутреннего слоя в матрицу жесткости элемента.

При вычислении возможной работы δA_p считается, что внешние силы приведены к узлам элемента и представляются вектором $\{P^{(e)}\}$:

$$\delta A_p = \{\delta r^{(e)}(t)\}^T \{P^{(e)}\}. \quad (14)$$

Подставляя (12), (13) и (14) в выражение (9) и учитывая независимость компонент вектора $\{\delta r^{(e)}(t)\}$, получаем систему уравнений

$$[K^{(e)}] \{r^{(e)}(t)\} = \{P^{(e)}\} + [K^{(e)}]_2 \int_0^t R(t-v) \{r^{(e)}(v)\} dv. \quad (15)$$

Здесь $[K^{(e)}] = [K^{(e)}]_1 + [K^{(e)}]_2$ – полная матрица жесткости конечного элемента.

Объединяя уравнения (15) по направлениям общих для смежных элементов узловых перемещений, получаем уравнения равновесия конечно-элементной модели пластины:

$$[K]\{r(t)\} = \{P\} + [K]_2 \int_0^t R(t-v)\{r(v)\} dv, \quad (16)$$

где $[K]$, $[K]_2$ – соответственно полная матрица жесткости отмеченной модели и вклад в нее внутреннего наследственно упругого слоя; $\{P\}$ – вектор внешних узловых сил; $\{r(t)\}$, $\{r(v)\}$ – векторы мгновенных узловых перемещений соответственно в моменты времени t и $v \leq t$. Решение системы (16) можно представить в виде

$$\{r(t)\} = \{r_m\} + \{r_p(t)\},$$

где

$$\{r_m\} = [K]^{-1}\{P\} -$$

мгновенные узловые перемещения пластины от нагрузки $\{P\}$;

$$\{r_p(t)\} = [K]^{-1}[K]_2 \int_0^t R(t-v)\{r(v)\} dv - \quad (17)$$

вектор, учитывающий ползучесть среднего слоя пластины. Для практического получения зависимости $\{r_p(t)\}$ в некотором временном интервале $[0; t_n]$ данный интервал необходимо разделить на несколько шагов Δt и построить решение (17) для каждого момента времени t_k , входящего в этот интервал:

$$\{r_p(t_k)\} = [K]^{-1}[K]_2 \int_0^{t_k} R(t_k-v)\{r(v)\} dv. \quad (20)$$

Будем считать, что произведение $R(t_k-v)\{r(v)\}$ на каждом временном шаге Δt диапазона $[0; t_k]$ постоянно и равно его значению в середине шага. Тогда вместо (20) можно записать приближенное выражение

$$\{r_p(t_k)\} = [K]^{-1}[K]_2 \Delta t \sum_{j=1}^k R(t_k-v_j)\{r(v_j)\}. \quad (21)$$

В качестве примера рассматривается трехслойная консольно закрепленная удлиненная пластина с геометрическими параметрами: $L = 500$ мм; $b = 30$ мм; $h_1 = 0,9$ мм; $h_2 = 2$ мм (рис. 2). Материал несущих слоев – алюминиевый сплав Д16АТ: $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Па. Материал внутреннего слоя – техническая резина: $G = 1,65 \cdot 10^6$ Па. На свободном конце пластины действует постоянная сила $P = 3,91$ Н в течение времени $t_p = 120$ с. Пластина разделена в продольном направлении на 20 элементов одинаковой длины. Наследственно-упругие свойства резины при сдвиге определяются уравнением (2). В качестве ядра релаксации $R(t-v)$ выбрано ядро Колтунова –Ржаницына с тремя реологическими параметрами [1; 2]:

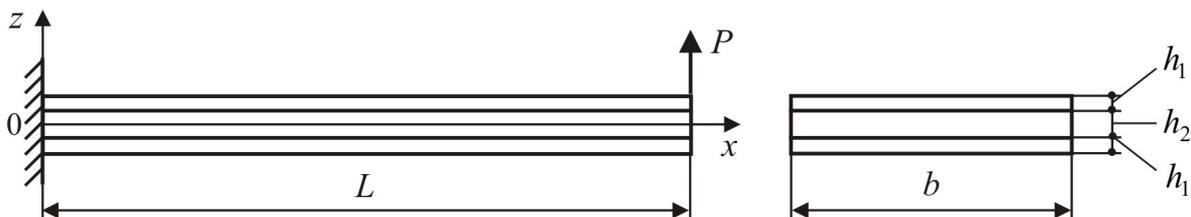


Рис. 2. Расчетная схема трехслойной пластины

$$R(t-v) = C(t-v)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-v)} \quad (C > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0).$$

Здесь C – параметр вязкости, α – параметр сингулярности, β – параметр затухания, имеющие значения: $C = 0,046$; $\alpha = 0,278$; $\beta = 0,034$.

На рис. 3 приведены мгновенный и временной прогибы свободного конца пластины. Наблюдается постепенный рост временного прогиба, обусловленный кратковременной ползучестью резины при сдвиге, с дальнейшей стабилизацией его по мере возрастания времени t , что объясняется сдерживающим действием несущих слоев пластины. На рис. 4 приведены мгновенные и временные касательные напряжения в среднем слое пластины. На рис. 5 приведены мгновенные и временные поперечные силы в одном несущем слое пластины. Релаксация (временное уменьшение) касательных напряжений при сдвиге, как и следовало ожидать, приводит к увеличению поперечных сил в несущих слоях пластины при неизменной суммарной по слоям поперечной силе.

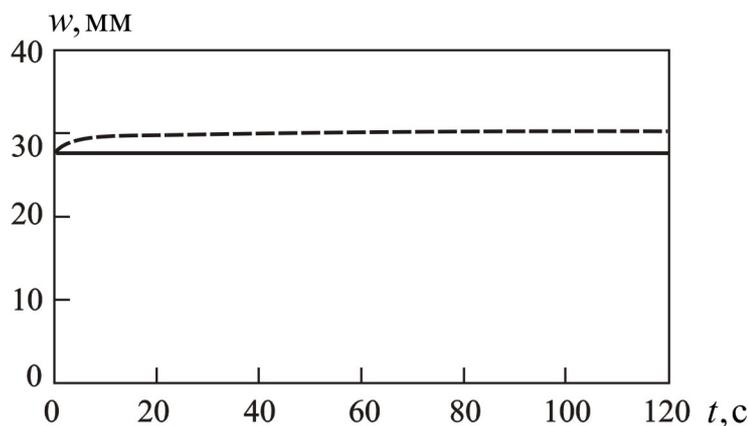


Рис. 3. Мгновенный (сплошная линия) и временной (пунктирная линия) прогибы свободного конца пластины

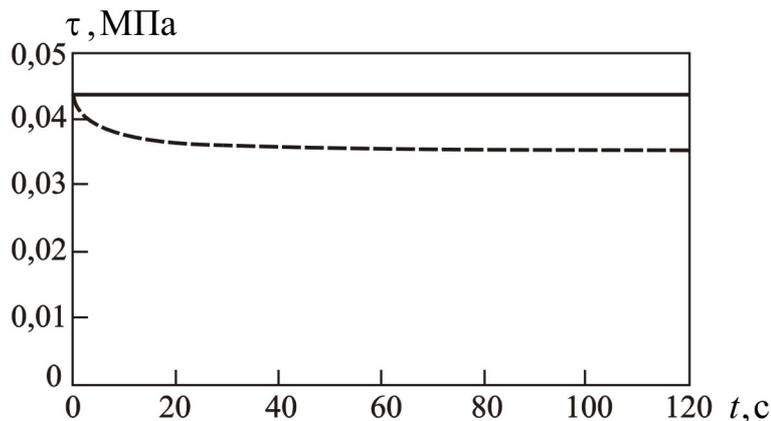


Рис. 4. Мгновенные (сплошная линия) и временные (пунктирная линия) касательные напряжения в среднем слое пластины

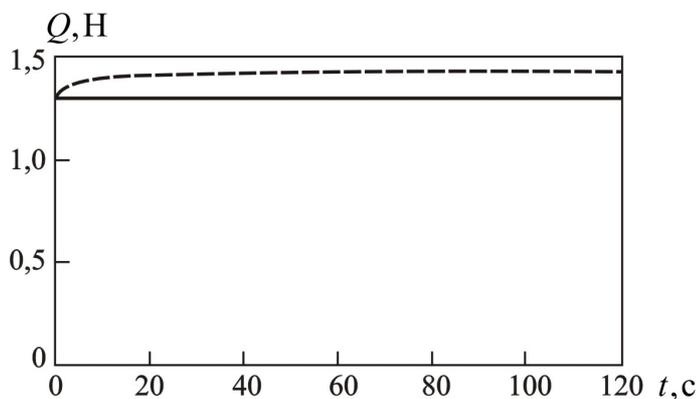


Рис. 5. Мгновенная (сплошная линия) и временная (пунктирная линия) поперечные силы в одном несущем слое пластины

Список литературы

1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М. : Высш. шк., 1976. 277 с.
2. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / М. А. Колтунов и др. М. : Машиностроение, 1983. 239 с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.

Stress-strain state modeling of three-layer elongated plate with inherently elastic inner layer

V. M. Shishkin¹, A. P. Levashov²

¹ Doctor of technical sciences, professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-1237-2309. E-mail: tism1@rambler.ru

² PhD of technical sciences, associate professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: 670094@rambler.ru

Abstract: a finite-element technique for simulating a static reaction is developed for the bending of a three-layer elongated plate with ideally elastic support layers and an internal hereditarily elastic layer. Bearing layers work within the framework of Kirchhoff-Love hypotheses, the inner layer is in a state of pure transverse shear. The rheological properties of the material of the inner layer under shear are taken into account by the integral equation of the theory of hereditary viscoelasticity with the Koltunov-Rzhanitsyn relaxation kernel. A system of resolving equations is obtained to determine the instantaneous and temporal nodal displacements of the plate. An example is considered of calculating a three-layer elongated plate with supporting layers of aluminum alloy D16AT and an inner rubber layer showing a substantial increase in the deflection of the plate in a relatively short time period compared to its instantaneous deflection due to short-term creep of the rubber under shear.

Keywords: three-layer plate; the final element; integral equation; the core of relaxation.

References

1. Koltunov M. A. *Polzuchest' i relaksaciya* [Creep and relaxation]. M. Vyssh. shk. 1976. 277 p.
2. *Prochnostnye raschety izdelij iz polimernyh materialov* – Strength calculations of polymer materials products / M. A. Koltunov et al. M. Mechanical engineering. 1983. 239 p.
3. *Rabotnov YU. N. Polzuchest' ehlementov konstrukcij* [Creep of structural elements]. M. Nauka. 1966. 752 p.

Анализ потерь активной мощности в воздушных, кабельных (СПЭ) и газоизолированных ЛЭП высокого напряжения

А. П. Вихарев¹, Н. Г. Репкина²

¹ кандидат технических наук, доцент кафедры электроэнергетических систем, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00061@vyatsu.ru

² кандидат технических наук, доцент кафедры электроэнергетических систем, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00353@vyatsu.ru

Аннотация. Актуальность исследования обусловлена тем, что технические потери активной мощности являются одним из важнейших технико-экономических показателей, которые необходимо учитывать при проектировании линии электропередачи. Они имеют место в течение всего времени эксплуатации линий электропередачи, а их стоимость постоянно растет. Поэтому целью исследования является сравнительный анализ потерь активной мощности в воздушных, кабельных (с изоляцией из сшитого полиэтилена) и газоизолированных линиях электропередачи. Ведущим методом исследования является аналитический метод, с помощью которого выполнены расчеты потерь мощности. Материалы статьи могут быть использованы при проектировании и реконструкции электрических сетей высокого напряжения.

Ключевые слова: воздушные ЛЭП, кабельные ЛЭП, газоизолированные ЛЭП, потери активной мощности.

В современных крупных городах, несмотря на экономический кризис, высокими темпами растет потребление электроэнергии. Для удовлетворения потребностей в электроэнергии сетевым компаниям приходится реконструировать существующие сети высокого напряжения, увеличивая пропускную способность линий электропередачи (ЛЭП). Для этого могут использоваться воздушные, кабельные или газоизолированные ЛЭП. При выборе того или иного средства передачи электрической энергии необходимо учитывать целый ряд технических и экономических показателей. Одним из важнейших технико-экономических показателей являются технические потери активной мощности и энергии. Они имеют место в течение всего времени эксплуатации ЛЭП, а их стоимость постоянно растет. Поэтому актуальной является задача сравнения потерь активной мощности указанных средств передачи электроэнергии. Наиболее объективное сравнение ЛЭП возможно при следующих условиях: при одинаковой передаваемой мощности; при одинаковых напряжениях; при одинаковых сечениях токоведущих частей.

Воздушные ЛЭП. Потери активной мощности в воздушной ЛЭП можно определить по формуле

$$\Delta P_{\text{в.л}} = \Delta P_{\text{эл}} + \Delta P_{\text{ут}} + \Delta P_{\text{кор}}, \quad (1)$$

где $\Delta P_{\text{эл}}$ – потери активной мощности, обусловленные нагревом проводов от электрического тока;

$\Delta P_{\text{ут}}$ – потери активной мощности, обусловленные токами утечки через изоляцию проводов;

$\Delta P_{\text{кор}}$ – потери активной мощности, обусловленные коронным разрядом на проводах.

Потери активной мощности в проводах можно определить по следующим формулам:

$$\Delta P_{\text{эл}} = 3 \cdot I_{\text{л}}^2 \cdot R_{\text{л}}; \quad R_{\text{л}} = k_{\text{ст}} \cdot k_{\text{п}} \cdot R_{20} \cdot (1 + a(t_{\text{пр}} - 20)), \quad (2)$$

где $I_{\text{л}}$ – электрический ток в проводах ЛЭП; $R_{\text{л}}$ – активное сопротивление провода; $k_{\text{п}}$ – коэффициент, учитывающий поверхностный эффект в проводах; $k_{\text{ст}}$ – коэффициент, учитывающий потери активной мощности в стальном сердечнике провода; R_{20} – сопротивление провода постоянно-му току при температуре +20 °С; a – температурный коэффициент сопротивления (для алюминия $a = 0,00403 \text{ 1/}^\circ\text{C}$); $t_{\text{пр}}$ – температура провода.

Коэффициент, учитывающий поверхностный эффект для переменного тока, зависит от конструкции провода и соотношения сечений стального сердечника и алюминиевой части. Согласно

отраслевому стандарту [6] указанный коэффициент может быть принят равным 1,05. Коэффициент, учитывающий потери в стальном сердечнике, зависит от числа повивов алюминиевых проволок. Магнитные потери максимальны для проводов с одним повивом и минимальны при четном числе повивов. Это происходит потому, что вследствие противоположного направления скрутки смежных повивов магнитные потоки, создаваемые токами повивов, взаимно компенсируются. В отраслевом стандарте [6] рекомендуется принимать следующие значения коэффициента: $k_{ст} = 1,15$ – для проводов с одним повивом алюминиевых проволок; $k_{ст} = 1,04$ – для проводов с двумя повивами алюминиевых проволок; $k_{ст} = 1,1$ – для проводов с тремя повивами алюминиевых проволок.

Потери активной мощности от токов утечки через изоляцию проводов весьма малы, поэтому в расчетах не учитываются.

Потери активной мощности, обусловленные коронным разрядом на проводах ЛЭП высокого напряжения, можно рассчитать по методике, приведенной в руководящих указаниях Минэнерго СССР [5]. Согласно этой методике оценка потерь на корону производится на основе экспериментально полученных характеристик для разных погодных условий, при различных начальной и максимальной напряженностях электрического поля на поверхности проводов. Выделяют четыре группы погодных условий: хорошая погода; сухой снег; дождь; изморозь. Учитывается продолжительность и вероятность различных групп погоды за год. Затем определяются потери мощности на корону для каждой группы погоды по обобщенным характеристикам потерь на корону θ_i [5]

$$\theta_i = \frac{P_i}{n \cdot r_0^2}, \quad (3)$$

где P_i – потери мощности на корону при i -й группе погоды.

Расчет среднегодового значения потерь мощности на корону для трехфазной линии осуществляется путем суммирования потерь по фазным проводам для каждой группы погоды

$$P_{cp} = r_0^2 (3\theta_{х.п.} \cdot \psi_{х.п.} + 3\theta_{с.с.} \cdot \psi_{с.с.} + 3\theta_{д} \cdot \psi_{д} + 3\theta_{из} \cdot \psi_{из}), \text{ Вт/м}, \quad (4)$$

где $\theta_{х.п.}$; $\theta_{с.с.}$; $\theta_{д}$; $\theta_{из}$ – значения обобщенных потерь на корону для разных групп погоды; $\psi_{х.п.}$; $\psi_{с.с.}$; $\psi_{д}$; $\psi_{из}$ – вероятности разных групп погоды за год.

Расчет потерь активной мощности выполнен для воздушной ЛЭП напряжением 220 кВ с проводами АС-400/93. Параметры проводов приняты следующие [1; 3]: $R_{20} = 0,071$ Ом/км; $d_{np} = 29,1$ мм; $I_{дон} = 1473$ А при $t_{в} = -20$ °С; число повивов – 2; $k_{cm} = 1,04$; $k_n = 1,05$; $t_{дон} = 90$ °С. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчетов потерь активной мощности для воздушной ЛЭП

Лл, А	100	300	500	700	900	1100	1300	1500
$\Delta P_{эл}$, Вт/м	2,3	21,8	62,9	128,0	219,0	339,0	489,0	672,0
$\Delta P_{кор}$, Вт/м	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6
$\Delta P_{вл}$, Вт/м	3,9	23,4	64,5	129,6	220,6	340,6	490,6	673,6

Кабельные ЛЭП. Современная кабельная линия (КЛ) выполняется из трех одножильных кабелей с изоляцией из сшитого полиэтилена. Каждый кабель состоит из изолированных друг от друга токоведущей жилы и экрана, а также внешней оболочки экрана. Жилы выполняются из алюминиевых или медных проволок, а экраны – из медных проволок. Потери активной мощности в кабельной ЛЭП могут быть определены по формуле

$$\Delta P_{кл} = \Delta P_{ж} + \Delta P_{э} + \Delta P_{из}, \quad (5)$$

где $\Delta P_{ж}$ – потери активной мощности в токоведущей жиле кабеля; $\Delta P_{э}$ – потери активной мощности в металлическом экране кабеля; $\Delta P_{из}$ – потери активной мощности в изоляции кабеля.

Потери активной мощности в токоведущих жилах кабеля можно определить по формулам

$$\Delta P_{ж} = 3 \cdot I_{ж}^2 \cdot R_{ж}; \quad R_{ж} = k_{п} \cdot R_{ж,20} \cdot (1 + a_{ж}(t_{ж} - 20)). \quad (6)$$

Потери активной мощности в металлических экранах кабелей зависят от способа их заземления. При эксплуатации КЛ используют три способа заземления экранов: заземление одновременно

с обоих концов линии; заземление с одного конца линии; транспозиция экранов. В первом случае экраны образуют замкнутую трехфазную систему, что будет приводить к появлению в них значительных продольных токов. Согласно исследованию, выполненному в работе [3], величина продольного тока будет пропорциональна току в токоведущей жиле, расстоянию между осями фаз и сечению экрана. Для расчета тока в экранах, заземленных с двух концов, можно воспользоваться формулами, выведенными в указанной работе [3]. При заземлении экранов с двух концов КЛ потери в них определяются по формуле

$$\Delta P_{\text{Э}} = 3 \cdot I_{\text{Э}}^2 \cdot R_{\text{Э}}; \quad (7)$$

При заземлении экранов КЛ с одного конца или при транспозиции экранов продольные токи не возникают, поэтому потерь мощности не будет.

Потери активной мощности в изоляции кабеля можно рассчитать по формулам:

$$\Delta P_{\text{из}} = 3 \cdot (U_{\text{ном}}/\sqrt{3})^2 \cdot \omega \cdot C_{\text{и}} \cdot \text{tg}(\delta_{\text{и}}); \quad C_{\text{и}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}, \quad (8)$$

где $C_{\text{и}}$ – электрическая емкость изоляции; $\text{tg}(\delta_{\text{и}})$ – коэффициент диэлектрических потерь в изоляции; r_1, r_2 – внутренний и внешний радиусы изоляции; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость изоляции; ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

Расчеты потерь активной мощности выполнены для КЛ напряжением 220 кВ, состоящей из трех одножильных кабелей с изоляцией из сшитого полиэтилена АПвП2г 1*400/265. В расчетах приняты следующие параметры кабелей [4]: диаметр жилы – 22,6 мм; диаметр изоляции – 72,6 мм; диаметр кабеля – 92,3 мм; толщина защитной оболочки – 4,0 мм; $R_{\text{ж},20} = 0,0778$ Ом/м; $R_{\text{э},20} = 0,088$ Ом/м; $\epsilon = 2,4$; $\text{tg}(\delta_{\text{и}}) = 0,001$. Кабели проложены в воздухе, «в ряд», расстояние между кабелями «в свету» равно диаметру кабеля. Рассмотрены два случая: заземление экранов с двух концов КЛ и заземление экранов с одного конца КЛ. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов потерь активной мощности для кабельной ЛЭП

$I_{\text{ж}}, \text{А}$	100	300	500	700	900	Примечание
$I_{\text{э}}, \text{А}$	85	255	425	595	765	
$\Delta P_{\text{ж}}, \text{Вт/м}$	2,42	23,6	70,4	147,6	259,7	
$\Delta P_{\text{э}}, \text{Вт/м}$	3,3	31,0	89,4	184,8	321,3	
$\Delta P_{\text{из}}, \text{Вт/м}$	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	
$\Delta P_{\text{кл}}, \text{Вт/м}$	7,4	56,3	161,5	334,1	582,7	Заземление экранов с двух концов КЛ
$\Delta P_{\text{кл}}, \text{Вт/м}$	4,2	25,3	72,1	149,3	261,4	Заземление экранов с одного конца КЛ

Газоизолированные ЛЭП. Газоизолированные ЛЭП (ГИЛ) конкурируют с КЛ при осуществлении глубоких вводов мощности в крупные города и промышленные центры, а также подземных врезок в воздушные ЛЭП. В западной Европе и США ГИЛ эксплуатируются уже в течение 40 лет. В России ГИЛ рассматриваются как перспективные проекты модернизации электроэнергетических систем Москвы и Санкт-Петербурга [1]. Современная ГИЛ имеет коаксиальную конструкцию, в которой токоведущий проводник под высоким напряжением поддерживается неподвижными опорными изоляторами в центре заземленной оболочки. Пространство между проводником и оболочкой заполнено смесью элегаза и азота под избыточным давлением. Для ГИЛ второго поколения применяется газовая смесь, состоящая из 20...40% элегаза и соответственно из 80...60% азота. Для достижения высокой электропроводности токоведущий проводник обычно выполняется в виде алюминиевой трубы, а поддерживающая давление газа оболочка – из алюминиевого сплава [1].

Потери активной мощности в ГИЛ можно определить по формуле

$$\Delta P_{\text{ГИЛ}} = \Delta P_{\text{ТВЧ}} + \Delta P_{\text{ОБ}} + \Delta P_{\text{ЭИ}}, \quad (9)$$

где $\Delta P_{\text{ТВЧ}}$ – потери активной мощности в токоведущих частях ГИЛ; $\Delta P_{\text{ОБ}}$ – потери активной мощности в оболочках ГИЛ; $\Delta P_{\text{ЭИ}}$ – потери активной мощности в газовой изоляции ГИЛ.

Принимая во внимание схожесть конструкций однофазного кабеля и фазы ГИЛ, потери активной мощности в токоведущих частях, оболочках и изоляции ГИЛ можно рассчитать по формулам (6, 7, 8). Потери активной мощности в изоляции ГИЛ из-за их незначительности в расчетах не учитываются.

Расчеты потерь выполнены для ГИЛ напряжением 220 кВ компании «CGIT Westboro». В расчетах приняты следующие размеры и параметры ГИЛ [1]: номинальное напряжение – 220 кВ; внешний диа-

метр токоведущего проводника – 102 мм; толщина токоведущего проводника – 12,7 мм; внешний диаметр оболочки – 307 мм; толщина оболочки – 7,6 мм; расстояние между центрами токоведущих проводников – 500 мм; $a_{\text{твч}} = 0,00403 \text{ 1/}^\circ\text{C}$; $a_{\text{об}} = 0,0049 \text{ 1/}^\circ\text{C}$; $R_{\text{твч.20}} = 0,0109 \text{ Ом/км}$; $R_{\text{об.20}} = 0,009 \text{ Ом/км}$. Результаты расчетов представлены в табл. 3.

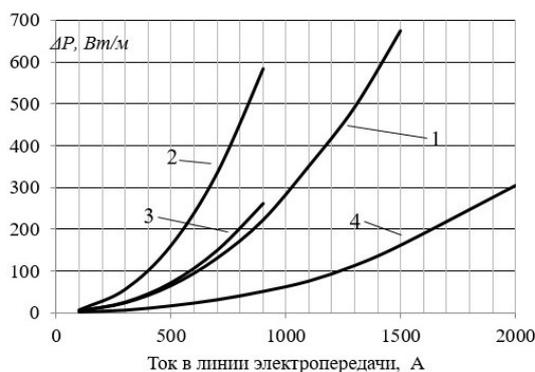
Таблица 3

$I_{\text{твч}}, \text{ А}$	100	500	1000	1500	2000
$I_{\text{об}}, \text{ А}$	98	490	980	1470	1960
$\Delta P_{\text{твч}}, \text{ Вт/м}$	0,33	8,55	37,5	91,8	175,2
$\Delta P_{\text{об}}, \text{ Вт/м}$	0,26	6,9	28,5	69,5	129,6
$\Delta P_{\text{гил}}, \text{ Вт/м}$	0,59	15,5	66,0	161,3	304,8

Сравнение результатов расчетов, рассмотренных средств передачи электрической энергии, представлено на рисунке ниже. Из рисунка видно, что наименьшие потери мощности будут иметь место у ГИЛ. При небольших токах они в 6,5 раза меньше, чем для воздушных ЛЭП, и в 4,5 раза меньше, чем для КЛ. При больших токах потери в ГИЛ в 4 раза меньше, чем для воздушных ЛЭП, и в 5 раз меньше, чем для КЛ. Но такое значительное снижение потерь мощности в ГИЛ достигается за счет увеличения площади поперечного сечения токоведущих частей и оболочек, а следовательно, большого расхода цветного металла и высокой стоимости сооружения ГИЛ.

Выводы

1. Величина потерь активной мощности в КЛ в значительной степени зависит от способа заземления экранов кабелей. Для снижения потерь нужно выполнять заземление экранов с одного конца КЛ или выполнять транспозицию экранов.
2. Потери активной мощности для воздушных и кабельных (при заземлении экранов с одного конца) ЛЭП, при одинаковых условиях прокладки, приблизительно равны.
3. Потери активной мощности в ГИЛ значительно меньше, чем в воздушных и кабельных ЛЭП.



Зависимости потерь мощности от тока в линиях электропередачи:

- 1 – для воздушной ЛЭП; 2 – для кабельной ЛЭП (при заземлении экранов с двух концов КЛ);
3 – для кабельной ЛЭП (при заземлении экранов с одного конца КЛ); 4 – для газоизолированной ЛЭП

Список литературы

1. Бударгин О. М., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Перспективы применения газоизолированных линий в современных электропередачах высокого и сверхвысокого напряжения // Электро. 2011. № 1. С. 2–9.
2. ГОСТ 839-80 Провода неизолированные для воздушных линий электропередачи. URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200008421> (дата обращения: 9.01.2017).
3. Дмитриев М. В. Заземление экранов однофазных силовых кабелей 6-500 кВ. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2010. 154 с.
4. Каталог продукции группы компаний «Севкабель», силовые кабели с изоляцией из сшитого полиэтилена на 110 кВ и выше. URL: <http://www.sevcable.ru/catalog/mark?id=1093&categoryId=292&industryId=327>
5. Руководящие указания по учету потерь на корону и помех от короны при выборе проводов воздушных линий электропередачи переменного тока 330-750 кВ и постоянного тока 800-1500 кВ. РД 34.20.172, МинЭиЭ СССР, 1974. 26 с.
6. СТО 56947007-29.240.55.143-2013. Методика расчета предельных токовых нагрузок по условиям сохранения механической прочности проводов и допустимых габаритов воздушных линий. Введ. 2013-13-02. 67 с.

Analysis of active power losses in air, cable (SPE) and gas-insulated high-voltage power lines

A. P. Vikharev¹, N. G. Repkina²

¹ PhD of technical sciences, associate professor of the Department of electric power systems, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: usr00061@vyatsu.ru

² PhD of technical sciences, associate professor of electric power systems Department, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: usr00353@vyatsu.ru

Abstract: The relevance of the study due to the fact that technical losses of active power are one of the most important technical and economic indicators that must be considered when designing transmission lines. They take place during the entire time of operation of transmission lines and their cost is growing. Therefore, the aim of the study is a comparative analysis of active power losses in the aerial, XLPE-cable and of gas insulated transmission lines. A leading research method is the analytical method by which the calculations of power losses. The article can be used in the design and reconstruction of electric networks of high voltage.

Keywords: of overhead transmission lines, XLPE-cable transmission lines, gas insulated transmission lines, power losses.

References

1. Budargin O. M., Misrihanov M. SH., Ryabchenko V. N. *Perspektivy primeneniya gazoizolirovannykh linij v sovremennykh ehlektroperedachah vysokogo i sverhвысокoго napyazheniya* [Prospects of application of the gas-insulated lines in modern power transmissions of high and ultrahigh voltage] // *EHlektro – Electro*. 2011, No. 1, pp. 2–9.
2. GOST 839-80 Non-insulated wires for overhead power lines. Available at: <http://docs.cntd.ru/document/1200008421> (date accessed: 9.01.2017). (in Russ.)
3. Dmitriev M. V. *Zazemlenie ehkranov odnofaznykh silovykh kabelej 6-500 kV* [Grounding screens of single-phase power cables 6-500 kV]. SPb. Publ. house of Politech. Un-ty. 2010. 154 p.
4. *Katalog produkcii gruppy kompanij «Sevkabel», silovye kabeli s izolyaciej iz sshitogo poliehtilena na 110 kV i vyshe* – Product catalog of the group of companies "Sevkabel", power cables with insulation of cross-linked polyethylene on 110 kV and above. Available at: <http://www.sevcable.ru/catalog/mark?id=1093&categoryId=292&industryId=327>
5. Guidelines for the consideration of corona losses and interference from the crown when you select the wire of overhead transmission lines of alternating current 330-750 kV and DC 800–1500 sq RD 34.20.172, Min. of Energy and Electricity USSR. 1974. 26 p. (in Russ.)
6. STO 56947007-29.240.55.143-2013. The method of calculation of the current load limits under the conditions of preservation of mechanical strength of wires and permissible dimensions of overhead lines. Introd. 2013-13-02. 67 p. (in Russ.)

Количественная оценка способов организации оперативной связи между энергообъектами

Н. Г. Репкина¹, Д. А. Репкин², А. П. Вихарев³

¹ кандидат технических наук, доцент кафедры электроэнергетических систем, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00353@vyatsu.ru

² кандидат технических наук, доцент кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: repkin@vyatsu.ru

³ кандидат технических наук, доцент кафедры электроэнергетических систем, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00061@vyatsu.ru

Аннотация. Представлены результаты сравнительного анализа изменения качества сигналов при передаче сообщений между электроэнергетическими объектами для двух различных видов каналов связи. Рассмотрены способы передачи сообщений по каналу высокочастотной связи по линиям электропередач и по волоконно-оптическому кабелю, встроенному в грозозащитный трос. В качестве модели рассмотрено управление удаленной потребительской подстанцией, контролируемой из единого центра диспетчерского управления. Воздушная линия имеет одну отпайку, и частота передачи устанавливается заданной. Расчеты проводятся для систем связи, использующих современные и передовые технические средства. Расчеты выполняются в соответствии с руководящими принципами, регулирующими отрасль. Выполнен анализ изменений стоимости передачи сообщений по различным каналам связи с удаленных объектов. Сформулированы рекомендации по применению средств передачи сообщений в системах с удаленными потребительскими подстанциями малой мощности.

Ключевые слова: воздушная линия электропередачи, высокочастотный канал связи, волоконно-оптический кабель связи, грозозащитный трос, управление, удаленный доступ, затухание.

В настоящее время передача сообщений между электроэнергетическими объектами в основном осуществляется по высокочастотным каналам связи, для чего используются фазные провода воздушных линий электропередачи (ВЧ-связь по ВЛЭП). Такая связь надежна, приемлема по стоимости и апробирована многолетней практикой. Тенденции активного внедрения в управление энергетикой цифровых технологий требуют модернизации систем передачи сообщений. Наиболее удобным средством связи является передача сообщений по волоконно-оптическим линиям связи, в частности использование грозозащитных тросов со встроенным оптическим кабелем. В соответствии с регламентом ФЭСК Минэнерго [6] на вновь строящихся ВЛЭП рекомендуется использование именно таких грозотросов. Отечественные грозотросы ОКГТ предназначены и для защиты фазных проводов от ударов молнии, и одновременно являются средством связи, так как конструктивно у них внутри металлической оболочки расположен волоконно-оптический кабель. Их использование позволяет за короткий период времени создать новые разветвленные и высоконадежные сети связи [3; 4]. Физика распространения светового сигнала в оптическом кабеле отлична от физики распространения электрических сигналов в металлических проводниках, аппаратура для формирования и передачи сигнала по ВОЛС более сложная и дорогостоящая, чем при использовании традиционных ВЧ-каналов. Была поставлена задача сравнить технические и экономические параметры при использовании двух видов организации связи: ВЧ-связь по ВЛЭП и использование ВОЛС по грозозащитному тросу марки ОКГТ.

В качестве модели исследования принят участок электрической сети, схема которой представлена на рис. 1. Выполняется передача сообщений между потребительской подстанцией «Корона» (контролируемый пункт – КП) и диспетчерским пунктом (ДП), расположенным на узловой подстанции «Ямская». Расстояние от ДП до КП составляет 55,6 км. ВЛЭП выполнена проводом АС-150/24, длина фазного провода, то есть расстояние передачи сообщений, – $l_T = 57,824$ км.

Пусть ВЧ-канал организован по типовой схеме фаза-земля по одному фазному проводу ВЛЭП, несущая частота сигнала принимается 350 кГц [7]. С учетом конструктивных особенностей ВЛЭП, а также текущей и перспективной загрузки линий Корона – Ямская и Луч – Ямская выбраны следующие типы оборудования для организации ВЧ-канала связи, устанавливаемые по всей линии связи Ямская-Корона-Лучм: ВЗ-630-0.5(170–1000кГц), СМП-110/ $\sqrt{3}$ -6,4, ФМП-Рс-6400/160-1000кГц, РК-75, ЛУС-80 [1; 2; 9; 11].



Рис. 1. Географическое расположение пунктов связи

Основной характеристикой ВЧ-тракта является рабочее затухание, определяемое как степень ослабления синусоидального сигнала при его передаче от передатчика к приемнику. Поскольку точные расчеты сопротивления и затухания сигналов при передаче по ВЧ тракту достаточно сложны, на практике рекомендовано применять упрощенную методику [8; 12].

Рабочее затухание ВЧ-тракта α_T определяется как сумма затуханий, обусловленных каждым из элементов, составляющих ВЧ-тракт: $\alpha_{ВЛ}$ – затуханием участков линий, $\alpha_{об}$ – затуханием, обусловленным ВЧ-оборудованием: линейным заградителем, фильтром присоединения, кабелем связи, а также $\alpha_{отв}$ – затуханием ответвлений ВЛЭП, $\alpha_{РФ}$ – затуханием от разделительных фильтров и $\alpha_{ш}$ – затуханием от шунтирующих элементов, дБ.

$$\alpha_T = \alpha_{ВЛ} + \alpha_{об} + \alpha_{отв} + \alpha_{РФ} + \alpha_{ш} \quad (1)$$

Значения составляющих выражения (1) кроме значения $\alpha_{ВЛ}$ рассчитываются для принятой схемы участка сети и выбранного оборудования связи в соответствии с отраслевыми методиками [8]. Значение затухания $\alpha_{ВЛ}$, дБ, обусловленного линией электропередачи, определяется из выражения

$$\alpha_{ВЛ} = \alpha' \cdot l_T + \alpha_k, \quad (2)$$

где l_T – длина провода, км;

α_k – конечное затухание, принимаемое равным 2,5 дБ [8];

α' – затухание в фазном проводе, определяемое в зависимости от его диаметра, схемы подключения ВЧ-аппаратуры, межфазного расстояния между проводами, наличия расщепления проводов, значения несущей частоты. Эта составляющая рассчитана при использовании соответствующих приложений [8] и равна значению $\alpha' = 0,0538$ дБ.

Согласно расчету, для рассматриваемого участка ВЛЭП значение величин затухания ВЧ-тракта составило $\alpha_T = 19,41$ дБ.

Поскольку значение затухания ВЧ-тракта не превышает установленной допустимой величины 20 дБ, то на рассматриваемом участке передачи сообщений установки ретрансляторов-усилителей не требуется.

Суммарные затраты Z_T на организацию канала ВЧ-связи без учета стоимости аппаратуры связи, устанавливаемой в пунктах приема и передачи сообщений на подстанциях, стоимости грозотроса марки ТК-50, поскольку он относится к электросетевому оборудованию, а также без издержек на ремонт и обслуживание канала связи для исследуемого участка сети на 1.07.2017 года составили 164739,12 рубля [2; 10; 11].

При увеличении расстояния передачи сообщений значение затухания сигнала и соответственно затраты увеличиваются из-за необходимости ретрансляции сигнала и установки дополнительного оборудования – блоков ретранслятор-усилитель. Используя формулы (1) и (2), можно рассчитать значение длины ВЛЭП l_y , при которой требуется установка усилителей:

$$l_y = \frac{20 - \alpha_{об} - \alpha_{отв} - \alpha_{Ф} - \alpha_{ш} - \alpha_{к}}{\alpha'} \quad (3)$$

Согласно расчетам $l_y = 66,125$ км.

Для электрической сети с параметрами, аналогичными исследуемой модели рис. 1 и протяженностью участка связи 100 км, рассчитаны зависимости изменения затухания сигнала $\alpha_T = f(l_T)$ и затрат на организацию ВЧ-канала от протяженности расстояния передачи сообщений $Z_T = f(l_T)$. Соответствующие графики приведены на рис. 2 и 3.

Аналогичные расчеты выполнены для этой же ВЛЭП, но при использовании волоконно-оптической линии связи, организованной по грозозащитному тросу марки ОКГТ-ц-1-24(G/652)-9.2/53. Затухание сигнала здесь составляет 0,22 дБ/км [8], а затухание, вносимое соединительными муфтами типа МОГ-У-24, – 0,1 дБ [12]. Длина участков кабеля, необходимых к соединению, принимается по длине кабеля в катушке – 8 км [5], тогда необходимое число соединительных муфт для исследуемой ВЛЭП определится как $n = 57,824/8 = 7,23$. Для дальнейших расчетов принимаем число муфт, равное 8.

Затухание сигнала в ВОЛС $\alpha_{ВОЛС}$ есть сумма значений затухания, обусловленного характеристиками оптического кабеля и вносимого муфтами. Для участка сети рис. 1 значение $\alpha_{ВОЛС}$ по расчету составило 13,52 дБ, что меньше допустимого, и, следовательно, установка усилителя не нужна.

Затраты на организацию ВОЛС определяются как сумма затрат на кабель (грозотрос), муфты и усилители-ретрансляторы. Для нашей схемы они составили $Z_{ВОЛС} = 7\ 157\ 153$ рубля. Согласно расчетам, выполненным по выражению, аналогичному формуле (3), установка подходящего по технологическим параметрам оптического усилителя марки Планар Орион для восстановления и усиления сигнала сообщения по ВОЛС требуется при длине ВЛЭП, равной 83,04 км. Стоимость оптического усилителя Планар Орион 465-IV на 1.07.2017 года составляет 76 000 рублей [10].

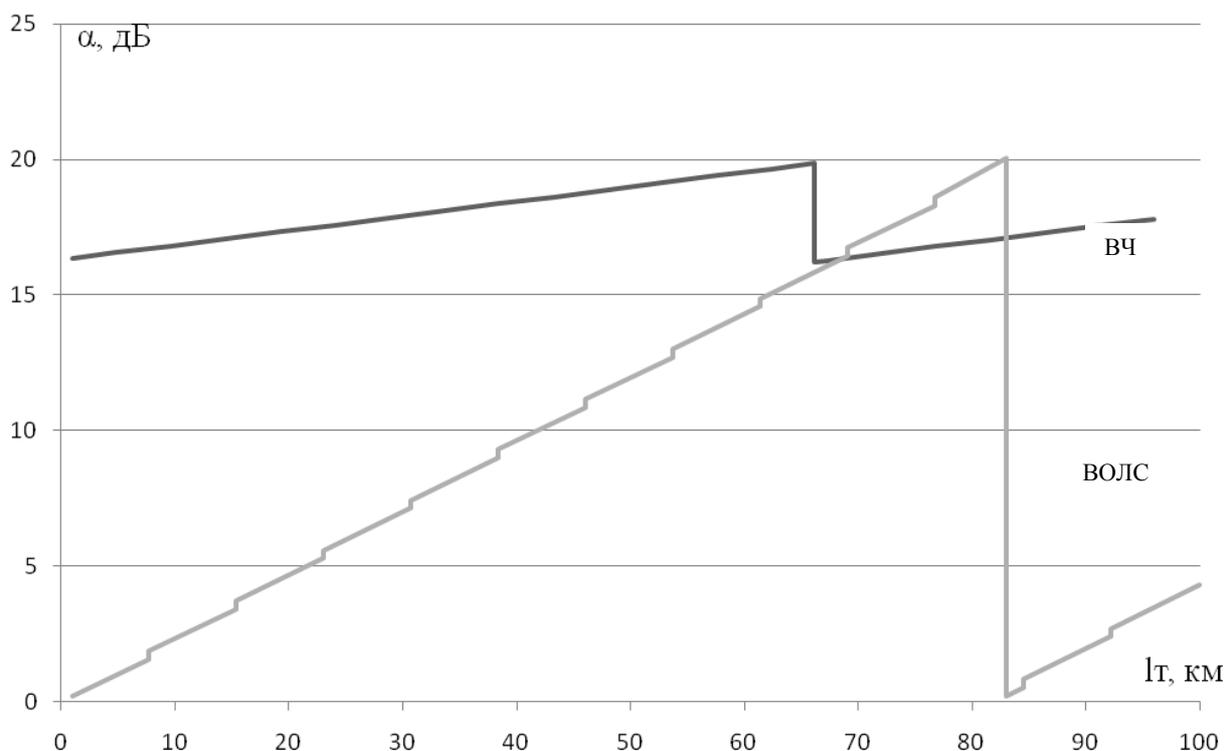


Рис. 2. Зависимости изменения затухания сигнала от расстояния между КП и ДП при передаче информационного сообщения по ВЧ-каналу связи и по ВОЛС

Зависимости затухания $\alpha_{ВОЛС} = f(l_T)$ и стоимости организации связи по ВОЛС $Z_{ВОЛС} = f(l_T)$ от длины тракта передачи сообщения l_T приведены на рис. 2 и 3 применительно к структуре исследуемой сети (рис. 1) при длине участка электрической сети между КП и ДП $l_T = 100$ км.

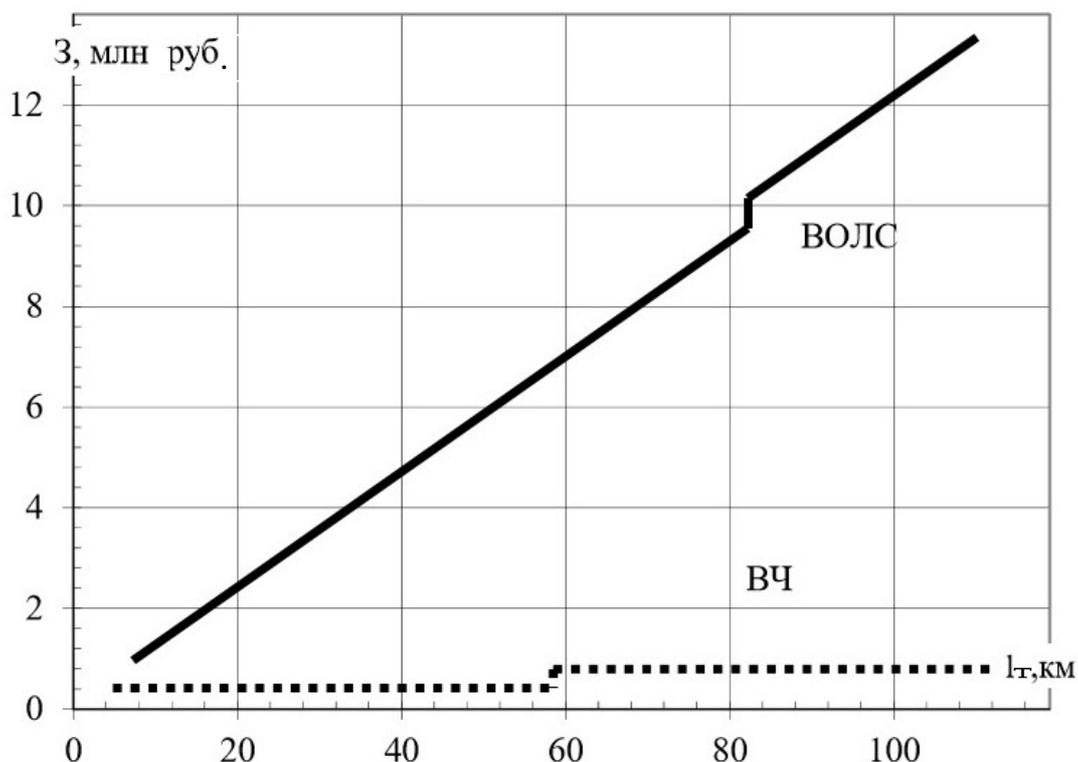


Рис. 3. Зависимости изменения затрат на организацию передачи сообщений по ВЧ-каналу и по ВОЛС от расстояния между КП и ДП

Анализ зависимостей затухания сигнала и затрат, необходимых для передачи сигнала по ВЧ-связи ВЛЭП и ВОЛС, показывает, что затраты ВОЛС в целом значительно выше, чем для ВЧ-канала, и с увеличением расстояния передачи сообщений затраты на ВОЛС возрастают интенсивнее, чем затраты по ВЧ-каналам. Это обусловлено высокой стоимостью оптоволоконна. Зависимости рис. 3 иллюстрируют значительное возрастание стоимости передачи сообщений по ВЧ-каналу на длине трассы ВЛЭП, превышающей 66,125 км, и по ВОЛС, превышающей 83,04 км, что обусловлено необходимостью установки ретрансляторов, поскольку значение затухания сигнала становится недопустимым. Графики, построенные по расчетным зависимостям изменения величины затухания от длины ВЛЭП и приведенные на рис. 2, иллюстрируют несомненное преимущество передачи сигналов по ВОЛС: скорость затухания сигнала в оптическом кабеле связи значительно меньше, чем при передаче по ВЧ-тракту.

Таким образом, можно заключить, что для новых электрических сетей, особенно строящихся в районах с интенсивно развивающейся хозяйственной деятельностью, использование тросов ОКГТ бесспорно эффективно, поскольку позволяет иметь универсальное средство для скоростного и надежного обмена оперативной информацией, кроме того, широкая полоса пропускания волоконно-оптических линий дает возможность передавать часть канала в аренду. На тех же участках электрических сетей, где требуется передавать фиксированные по времени и объему регламентированные сообщения и где применение других каналов экономически неоправданно, как, например, для связи с удаленными, незначительными по мощности подстанциями, расположенными в районах с неясными перспективами развития, традиционная организация связи по ВЧ-каналам по ВЛЭП является достаточной.

Список литературы

1. Аппаратура высокочастотной связи: Торговый Дом «ЭМКО». URL: <http://www.emko.ru/price/vz.doc>
2. Кабельно-проводниковая продукция. Продукция «Альфа-Энергия»: «Альфа-Энергия». URL: <http://www.alphaenergy.ru/art.php?codecat=%ED%EE%E232510>

3. *Портнов Э. Л. Оптические кабели связи и пассивные компоненты волоконно-оптических линий связи : учеб. пособие. М. : Горячая линия – Телеком, 2007. 464 с.: ил. Библиогр.: с. 457–459.*
4. *Репкина Н. Г. Методы и средства передачи сообщений в электроэнергетических системах : учеб. пособие. Киров : ВятГУ, 2015. 127 с.*
5. *Руководство по строительству линейных сооружений местных сетей связи: АООТ «ССКТЬ-ТОМАСС». М., 1995. Утвержден: 21 декабря 1995 года, Минсвязи России.*
6. *СТО 56947007- 29.240.55.192-2014. Нормы технологического проектирования воздушных линий электропередачи напряжением 35–750 кВ : стандарт организации ОАО «ФСК ЕЭС». Введ. 20.11.2014. ОАО «ФСК ЕЭС» 2014. 72 с. URL: http://www.fsk-es.ru/about/management_and_control/test/STO_56947007-29.240.55.192-2014.pdf*
7. *СТО 56947007- 33.060.40.108-2011. Нормы проектирования систем ВЧ связи : стандарт организации ОАО «ФСК ЕЭС». Введ. 2011–12–06. ОАО «ФСК ЕЭС» 2011. 59 с. URL: http://www.fsk-ees.ru/upload/docs/STO_56947007-33.060.40.108-2011.pdf*
8. *СТО 56947007-33.060.40.052-2010. Методические указания по расчету параметров и выбору схем высокократотных трактов по линиям электропередачи 35–750 кВ переменного тока: стандарт организации ОАО «ФСК ЕЭС». Введ. 30.06.2010. ОАО «ФСК ЕЭС» 2010. 145 с. URL: <http://www.fsk-ees.ru/upload/docs/56947007-33.060.40.052-2010.pdf>*
9. *СТО 56947007-33.060.40.125-2012. Общие технические требования к устройствам обработки и присоединения каналов ВЧ связи по ВЛ 35-750 кВ : стандарт организации ОАО «ФСК ЕЭС». Введ. 2012–08–20. ОАО «ФСК ЕЭС» 2012. 57 с. URL: <http://www.fsk-ees.ru/upload/docs/STO%2056947007-33.060.40.125-2012.pdf>*
10. *Усилители оптических сигналов в оптическом кабеле: RFTEL. URL: <http://rftel.ru/magazin/folder/optical-amplifiers?yclid=3245599620629533591>*
11. *Усилитель ЛУС-80: Официальный сайт ОАО «Нептун» Одесса. URL: http://www.oaoneptun.com.ua/products_op_view_prod_prod_27.html*
12. *Шкарин Ю. П. ВЧ-тракты каналов связи по линиям электропередачи. Ч. 2. М. : НТФ Энергопрогресс : Энергетик, 2001. 145 с. (Библиотека электротехника : прил. к журналу «Энергетик», вып. 8(32)).*

Quantitative evaluation of ways of organizing operational communications between the power plants

N. G. Repkina¹, D. A. Repkin², A. P. Vikharev³

¹ PhD of technical sciences, associate professor of the Department of electric power systems, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr00353@vyatsu.ru

² PhD of technical sciences, associate professor of the Department of radio electronic means, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: repkin@vyatsu.ru

³ PhD of technical sciences, associate professor of electric power systems Department, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr00061@vyatsu.ru

Abstract: The results of comparative analysis of changes in the quality of the signals when transmitting messages between objects of electric power for two different communication channels. Considered the transfer of messages over high frequency communication on power lines and over the fiber-optic cable, built-in cable for overvoltage protection. As the model is considered the remote consumer electrical substation, which is controlled from the dispatch control center. The air line has one branch from the air line, and the transmission frequency is set. The calculations are carried out for communication systems that use modern and advanced technical means. The calculations are performed in accordance with the guidelines governing the industry. The results of analysis of changes in the cost of transmitting messages through various channels of communication from remote objects. Recommendations for use of communication systems for the remote consumer substations of low power.

Keywords: overhead transmission line, high frequency communication, fiber optic communication cable, ground wire, control, remote access, fade.

References

1. The high frequency connection equipment: Trading House "EMKO". Available at: <http://www.emko.ru/price/vz.doc>
2. Cable and wire products. "Alpha-Energy" Products: "Alpha-Energy". Available at: <http://www.alphaenergy.ru/art.php?codecat=%ED%EE%E232510>
3. *Portnov E.H. L. Opticheskie kabeli svyazi i passivnye komponenty volokonno-opticheskikh linij svyazi : ucheb. posobie [Optical communication cables and passive components of fiber-optic communication lines: tutorial]. M. Hot line – Telecom. 2007. 464 p.: Il. Bibliogr.: pp. 457-459.*
4. *Repkina N. G. Metody i sredstva peredachi soobshchenij v ehlektroenergeticheskikh sistemah : ucheb. posobie [Methods and means of transmission of messages in power systems: tutorial]. Kirov. VyatSU. 2015. 127 p.*

5. Guidance on the construction of linear structures of local communication networks: OJSC "SSKTB-TOMASS". M. 1995. Approved: December 21, 1995, Ministry of communications. (in Russ.)
6. STO 56947007- 29.240.55.192-2014. Norms of technological design of overhead power lines with voltage of 35-750 kV: standard of JSC "FGC UES". Introd. 20.11.2014. JSC "FGC UES" 2014. 72 p. Available at: http://www.fsk-es.ru/about/management_and_control/test/STO_56947007-29.240.55.192-2014.pdf (in Russ.)
7. STO 56947007- 33.060.40.108-2011. HF communication systems design standards: standard of JSC "FGC UES". Introd. 2011-12-06. JSC "FGC UES" 2011. 59 p. Available at: http://www.fsk-ees.ru/upload/docs/STO_56947007-33.060.40.108-2011.pdf (in Russ.)
8. STO 56947007-33.060.40.052-2010. Guidelines for the calculation of parameters and selection of schemes of high-frequency paths on power lines 35-750 kV AC: standard of JSC "FGC UES". Introd. 30.06.2010. JSC "FGC UES" 2010. 145 p. Available at: <http://www.fsk-ees.ru/upload/docs/56947007-33.060.40.052-2010.pdf> (in Russ.)
9. STO 56947007-33.060.40.125-2012. General technical requirements for devices for processing and connection of HF communication channels on 35-750 kV overhead : standard of JSC "FGC UES". Introd. 2012-08-20. JSC "FGC UES" 2012. 57 p. Available at: <http://www.fsk-ees.ru/upload/docs/STO%2056947007-33.060.40.125-2012.pdf> (in Russ.)
10. Optical signal amplifiers in optical cable: RFTEL. Available at: <http://rftel.ru/magazin/folder/optical-amplifiers?yclid=3245599620629533591>
11. LUS-80 amplifier: official website of JSC "Neptune", Odessa. Available at: http://www.oaoneptun.com.ua/products_op_view_prod_prod_27.html (in Russ.)
12. *SHkarin YU. P. VCH-trakty kanalov svyazi po liniyam ehlektroperedachi* [HF-paths of communication channels on power lines. Part 2]. M. NTF Energoprogress: Energetik. 2001. 145 p. (Library of electrical engineering: annex to the "Energetik" magazine, issue 8 (32)).

Транспонирование лестничных структур цифровых фильтров, основанных на разложении передаточной функции в цепную дробь*

Т. В. Наумович

старший преподаватель кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3659-2664. E-mail: naumovich@vyatsu.ru

Аннотация. Цифровой фильтр с бесконечной импульсной характеристикой может быть реализован бесконечно большим числом способов. Различные структуры имеют разную чувствительность к точности представления коэффициентов, разный уровень шумов округления, в них различным образом могут проявляться паразитные колебания предельного цикла. Одним из путей синтеза новых структур является их транспонирование. При транспонировании входной узел становится выходным, а выходной – входным, узлы заменяются на сумматоры, а сумматоры – на узлы, направление всех передач меняется на противоположное. В данной работе транспонировались лестничные структуры, получаемые путем разложения в цепную дробь передаточной функции. В результате произведенных преобразований выяснилось, что транспонирование данного класса цифровых фильтров практически не приводит к формированию принципиально новых структур. Происходит тривиальное изменение порядка следования последовательно соединенных блоков умножения и задержки.

Ключевые слова: рекурсивный цифровой фильтр, передаточная функция, цепная дробь, лестничная структура, транспонирование структуры, топологическая матрица.

Известно, что для реализации рекурсивного цифрового фильтра (ЦФ) с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}} \quad (1)$$

может быть использовано бесконечное число структурных схем, различающихся уровнем эффектов, связанных с ограниченной разрядностью коэффициентов и блоков, выполняющих арифметические операции. В работах авторов [3; 5; 6] разрабатывается подход к проектированию ЦФ, включающий генерацию структурных схем под конкретную спецификацию требований к характеристикам ЦФ. Этот подход основан на применении в качестве математической модели структуры так называемой топологической матрицы, элементы которой являются коэффициентами передачи сигналов между узлами схемы. Такая модель была предложена в [4].

Известна простая методика [1; 4], позволяющая из любой структуры, в том числе сгенерированной в соответствии с [3; 5; 6], получить новую структуру, называемую транспонированной. Суть методики в том, что входной узел становится выходным, а выходной – входным, узлы заменяются на сумматоры, а сумматоры – на узлы, направление всех передач меняется на противоположное. Топологическая матрица новой структуры получается транспонированием топологической матрицы исходной структуры.

Как правило, взаимно транспонированные структуры достаточно существенно отличаются друг от друга. На рис. 1 представлены классическая прямая форма ЦФ второго порядка ($n = 2$) (рис. 1а) и соответствующая ей транспонированная прямая форма (рис. 1б).

* Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант 18-07-00986а.

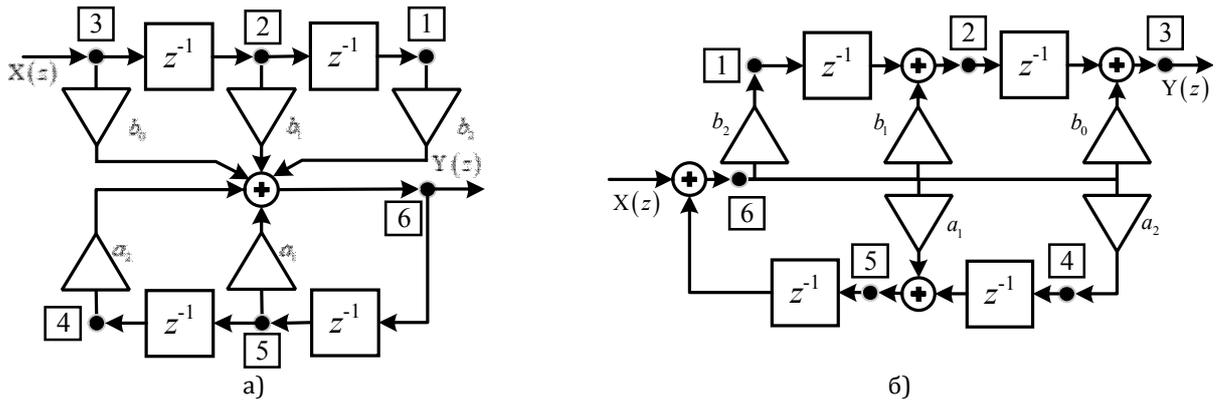


Рис. 1. Прямая форма ЦФ

Топологические матрицы этих структур имеют вид:

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ b_2 & b_1 & b_0 & a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

и

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

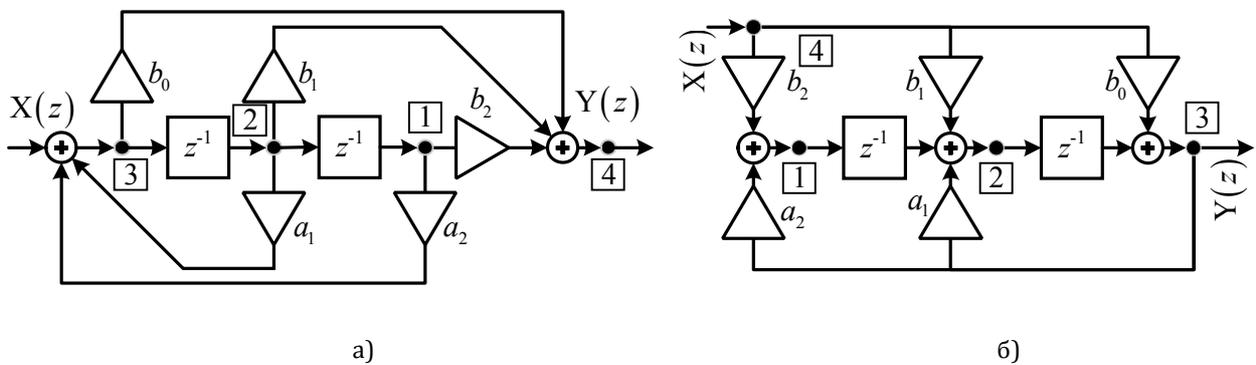


Рис. 2. Каноническая форма

На рис. 2 показаны классические взаимно транспонированные канонические формы с топологическими матрицами

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

для канонической формы рис. 2а и

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ z^{-1} & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & z^{-1} & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

для транспонированной канонической формы. Различия транспонированных и исходных структур очевидны. Совершенно другая ситуация выявляется при транспонировании лестничных структур.

Известен класс структур, получаемых разложением передаточной функции в цепную дробь [2; 7; 8; 9].

Структура типа IA основана на разложении

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2z + \frac{1}{A_2 + \dots + \frac{1}{B_nz + \frac{1}{A_n}}}}}}. \tag{6}$$

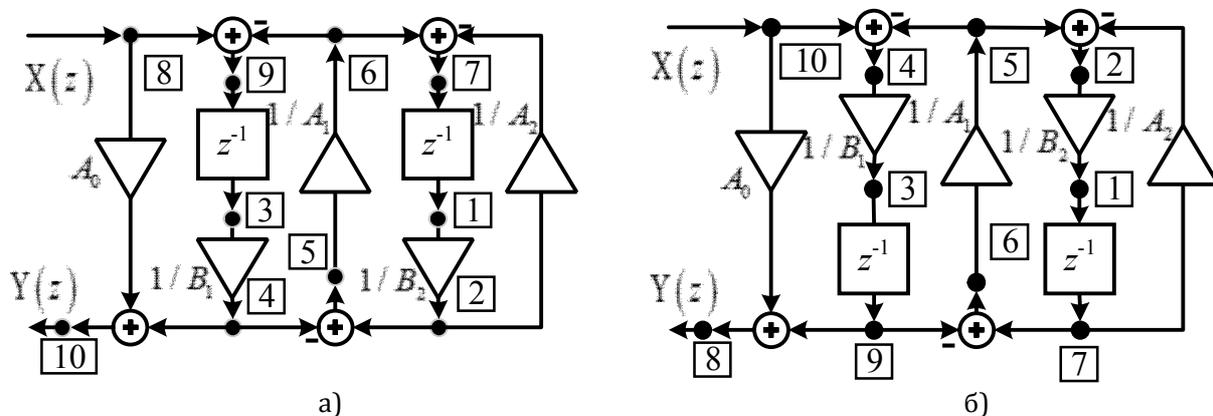


Рис. 3. Лестничные структуры типа IA

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 3а. Топологическая матрица этой структуры равна

$$T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/A_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

После транспонирования топологическая матрица приобретает следующий вид:

$$T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & A_0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Соответствующая этой матрице структура построена на рис. 3б.
 Структура типа IB основана на разложении

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z^{-1} + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z^{-1} + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{B_n z^{-1} + \frac{1}{A_n}}}}}}}. \tag{9}$$

Соответствующая структурная схема показана на рис. 4а.

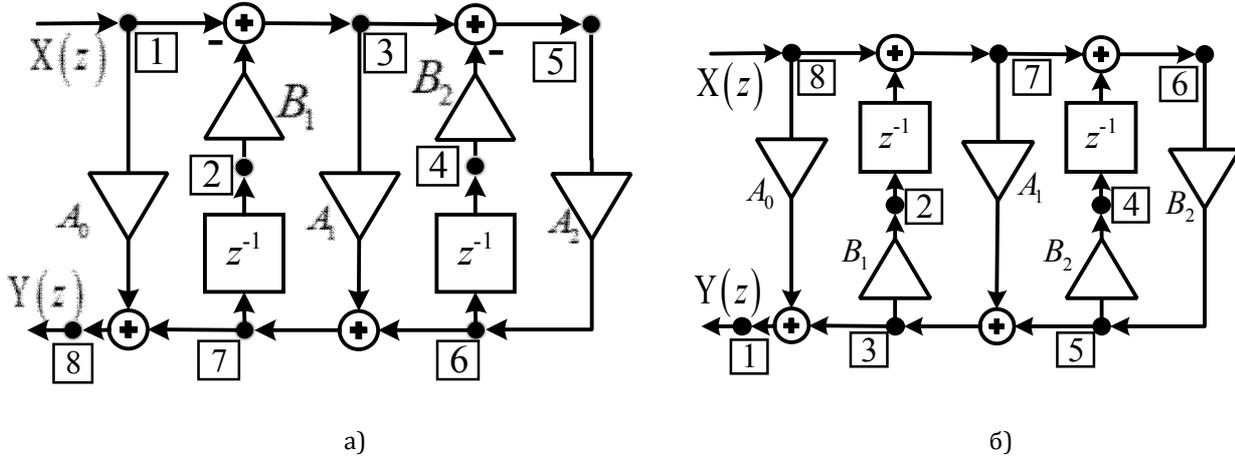


Рис. 4. Структура типа IB

Топологическая матрица этой структуры имеет вид:

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 1 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

После транспонирования топологическая матрица приобретает вид

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

По этой матрице строим структурную схему, рис. 4б.
 Структура типа IIA основана на разложении

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1z + A_1 + \frac{1}{B_2z + A_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{B_nz + A_n}}}} \tag{12}$$

На рис. 5а показана структурная схема лестничного ЦФ типа IIА.

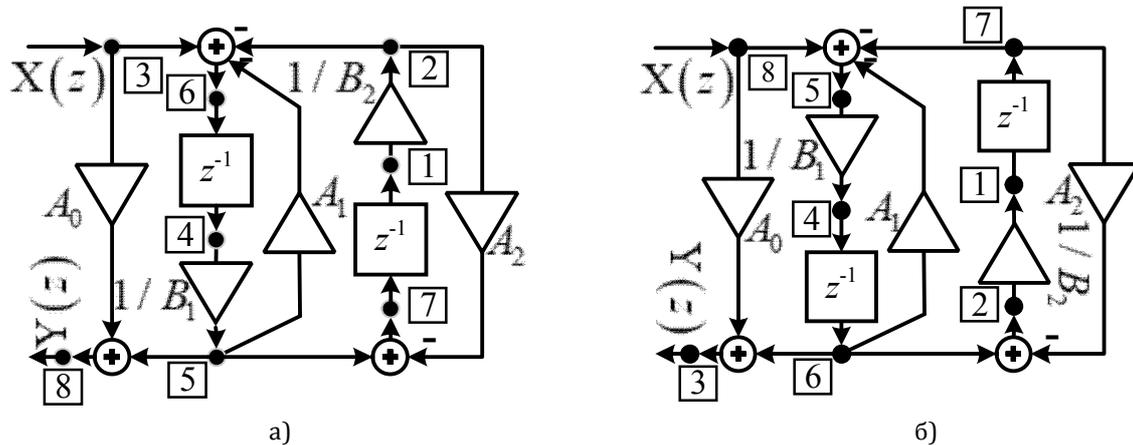


Рис. 5. Структура типа IIА

Его топологическая матрица равна

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Транспонируем матрицу:

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1/B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

и строим структурную схему рис. 5б.

Анализ полученных результатов показывает, что транспонирование лестничных фильтров практически не приводит к получению новых структур. Происходит просто тривиальное изменение порядка следования последовательно соединенных блоков умножения и задержки в ветвях структуры.

Список литературы

1. Лесников В. А., Наумович Т. В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров : ВятГУ, 2006. 196 с.
2. Лесников В. А., Наумович Т. В., Частиков А. В. Анализ чувствительности цифровых фильтров, структура которых основана на разложении передаточной функции в непрерывную дробь // Наука и образование: новое время. 2017. № 6.

3. Лесников В. А., Наумович Т. В., Частиков А. В. Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2010 : сб. тр. / под общ. ред. А. Л. Стемповского. М. : ИПИМ РАН, 2010. С. 466–471. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf>
4. Crochier R. E., Oppenheim A. V. The analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. V. 63. № 4. P. 581–595. DOI: 10.1109/PROC.1975.9793. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1451723/>.
5. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. P. 282–285. DOI: 10.1109/EWDTs.2010.5742083. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742083/>.
6. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. P. 156–159. DOI: 10.1109/EWDTs.2010.5742051. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742051/>.
7. Mitra S. K., Sagar A. D. Additional canonic realization of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1974. Vol. CAS-21. Issue 1. P. 135–136. DOI: 10.1109/TCS.1974.1083795. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1083795/>.
8. Mitra S. K., Sherwood R. J. Canonic realizations of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. Vol. AU-20. Issue 3. P. 185–194. DOI: 10.1109/TAU.1972.1162375. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162375/>.
9. Mitra S. K., Sherwood R. J. Digital Ladder Networks // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. 1973. Vol AU-21. Issue 1. P. 30–36. DOI: 10.1109/TAU.1973.1162423. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162423/>.

Transposition of ladder structures of digital filters based on decomposition of the transfer function into a chain fraction

T. V. Naumovich

senior lecturer of the Department of radio electronic means, Vyatka State University. Russia, Kirov.
ORCID: 0000-0002-3659-2664. E-mail: naumovich@vyatsu.ru

Abstract: A digital filter with an infinite impulse response can be implemented in an infinitely large number of ways. Different structures have different sensitivity to the accuracy of the representation of the coefficients, a different level of rounding noise, in which the parasitic oscillations of the limit cycle can manifest themselves in different ways. One way to synthesize new structures is to transpose them. When transposed, the input node becomes the output node, and the output node becomes the input node, the nodes are replaced by the adder, and the adder is switched to nodes, the direction of all the transmissions is reversed. In this paper, transposed ladder structures, obtained by decomposition into a continued fraction of the transfer function. As a result of the transformations it was found out that the transposition of this class of digital filters practically does not lead to the formation of fundamentally new structures. There is a trivial change in the order of succession of the sequentially connected multiplication and delay blocks.

Keywords: IIR filter, transfer function, continued fraction, ladder structure, structure transposition, topological matrix.

References

1. Lesnikov V. A., Naumovich T. V. *Strukturnyj sintez cifrovyyh fil'trov* [Structural synthesis of digital filters]. Kirov. VyatSU. 2006. 196 p.
2. Lesnikov V. A., Naumovich T. V., Chastikov A. V. *Analiz chuvstvitel'nosti cifrovyyh fil'trov, struktura kotoryh osnovana na razlozhenii peredatochnoj funkicii v nepreryvnyuyu drob'* [Sensitivity analysis of digital filters whose structure is based on a decomposition of the transfer function in continued fraction] // *Nauka i obrazovanie: novoe vremya* - Science and education: new time. 2017, No. 6.
3. Lesnikov V. A., Naumovich T. V., Chastikov A. V. *Novyj podhod k proektirovaniyu rekursivnykh cifrovyyh fil'trov* [New approach to the design of recursive digital filters] // *Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem – 2010 : sb. tr.* - Problems of development of perspective micro - and nanoelectronic systems – 2010 : coll. works / under the general ed. of A. L. Stempkovsky. M. IPPM RAS. 2010. Pp. 466–471. Available at: <http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf>
4. Crochier R. E., Oppenheim A. V. The analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. V. 63. № 4. P. 581–595. DOI: 10.1109/PROC.1975.9793. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1451723/>.
5. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. P. 282–285. DOI: 10.1109/EWDTs.2010.5742083. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742083/>.
6. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of 2010 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs-2010. St. Petersburg, Russia. 17-

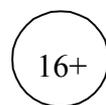
20 Sept. 2010. P. 156–159. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742051. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5742051/>.

7. *Mitra S. K., Sagar A. D.* Additional canonic realization of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1974. Vol. CAS-21. Issue 1. P. 135–136. DOI: 10.1109/TCS.1974.1083795. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1083795/>.

8. *Mitra S. K., Sherwood R. J.* Canonic realizations of digital filters using the continued fraction expansion // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. Vol. AU-20. Issue 3. P. 185–194. DOI: 10.1109/TAU.1972.1162375. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162375/>.

9. *Mitra S. K., Sherwood R. J.* Digital Ladder Networks // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. 1973. Vol AU-21. Issue 1. P. 30–36. DOI: 10.1109/TAU.1973.1162423. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1162423/>

Научный журнал № 1 (2018)



Научное издательство Вятского государственного университета,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964