УДК 621.791.053 DOI 10.25730/VSU.0536.19.011

Условия применения метода моментов при оптимизации процесса кристаллизации металла сварного шва

В. В. Мелюков[1], А. Е. Максимов[2], С. П. Грачев[3]

[1]доктор технических наук, профессор, Вятский аттестационный центр.
Россия, г. Киров. E-mail: rus_melyukov@mail.rua
[2]аспирант кафедры технологии машиностроения, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: 2m3j.p.m@gmail.com
[3]кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий в машиностроении, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
E-mail: grachev@vyatsu.ru

Аннотация. Одним из критериев качества сварного соединения является технологическая прочность металла шва и зоны термического влияния. Разрушение металла в сварном шве и зоне термического влияния связано с образованием горячих и холодных трещин. Наибольшую опасность представляют кристаллизационные трещины, которые образуются при затвердевании металла сварочной ванны и формировании первичной структуры металла шва.

Для устранения перегрева и уменьшения вероятности возникновения кристаллизационных трещин непосредственно в металле шва в процессе кристаллизации необходимо поставить и решить задачу оптимального управления тепловым процессом кристаллизации металла сварного шва.

В данной работе исследуются условия применения метода моментов при оптимизации процесса кристаллизации металла сварного шва для устранения перегрева и уменьшения вероятности образования кристаллизационных трещин непосредственно в металле шва в процессе кристаллизации.

Цель: исследование условий применения метода моментов для оптимального управления процессом кристаллизации металла сварного шва.

Задача: рассмотреть алгоритм применения метода моментов при оптимизации процесса кристаллизации.

Ключевые слова: методы оптимального управления, метод моментов, кристаллизация металла, пространство управлений, распределение температуры.

Постановка и решение задачи оптимального управления процессом кристаллизации металла сварного шва с применением принципа максимума рассмотрена в статье, опубликованной в журнале «Сварка и диагностика» [1]. Одним из условий применения принципа максимума является неравенство нулю невязки интегрального уравнения, описывающего распределение температуры в сварном соединении в процессе кристаллизации металла сварного шва. В данной работе рассмотрим условия применения метода моментов для управления процессом кристаллизации и особенности процедуры оптимизации при помощи метода моментов.

Одним из основных условий применения метода моментов при оптимизации является тождественное равенство нулю невязки интегрального уравнения распределения температуры в процессе сварки [2; 3], то есть заданное распределение температуры T' (левая часть уравнения (1)) в любой момент должно полностью совпадать с истинным распределением температуры T, определяемым правой частью интегрального уравнения. В случае одномерного теплового процесса при нулевых начальных и граничных условиях уравнение распределения температуры имеет вид [4; 5; 6]:

$$T'(x) = \int_0^{t'} \int_0^{l} K(x, \xi, t', \tau) q(\xi, \tau) d\xi d\tau \qquad (1)$$

где $T'(x)$ – функция заданного распределения температуры, определяющая ширину хвостовой части сварочной ванны в различных сечениях хвостовой части сварочной ванны, где происходит процесс кристаллизации, $K(x, \xi, t', \tau)$ – известная функция, которая выводится при решении уравнения теплопроводности и может быть функцией влияния, импульсной переходной функцией или функцией Грина [4]. Аргументы функции K изменяются в пределах: $0 \le x \le l$, $0 \le \xi \le l, 0 \le \tau \le t \le t'$, где t' – время, в течение которого действует управление $q(x, t)$.

Равенство (1) выражает континуальный аналог проблемы моментов, то есть равенство (1) определяет совокупность моментов в виде бесконечной системы равенств. Действительно, если разложить функцию заданной температуры $T'(x)$ и функцию $K(x, \xi, t', \tau)$ в ряд по системе независимых функций, например, тригонометрических $\sin\mu_n x$, то равенство (1) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n' sin\mu_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t\prime} \int_0^{l} \psi_n(\xi, t', \tau) q(\xi, \tau) d\xi d\tau \; sin\mu_n x \tag{2}$$

где $\psi_n(\xi, t', \tau) = e^{-a\mu_n^2(t\prime-\tau)} sin\mu_n \xi, \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \xi \epsilon \; [0; x], \tau \epsilon \; [0; t']$

Сравнивая почленно коэффициенты при $sin\mu_n x$ в левой и правой частях равенства, получаем бесконечную систему равенств, выполнение которых необходимо и достаточно для справедливости уравнения (1):

$$T_n' = \int_0^{t\prime} \int_0^{l} \psi_n(\xi, t', \tau) q(\xi, \tau) d\xi d\tau, n = 1,2, \ldots \tag{3}$$

Интегралы в правой части равенств (3) называются *моментами функции* $q(x, t)$ относительно последовательности функций $\{sin\mu_n x\}$. Задача определения $q(x, t)$, которое удовлетворяет равенствам (3), называется *проблемой моментов*. Для решения проблемы моментов необходимо решить бесконечную систему уравнений (3) относительно $q(x, t)$ и получить ответ об управляемости рассматриваемого теплового процесса (1) при заданном распределении температуры $T'(x)$: если уравнения (3) имеют решение, то рассматриваемый тепловой процесс управляемый, в противном случае процесс является неуправляемым.

В случае управляемого процесса в результате решения определяется также время t', которое будет минимальным временем действия источника $q(x, t)$ при нагреве до температуры $T'(x)$.

Следует также заметить, что преобразование равенства (1) в счетную систему равенств (3) может сразу выявить неразрешимость проблемы моментов относительно $q(x, t)$ и t'. Например, если при каком-либо m значение $T_m' \neq 0$, а функция $\psi_m(\xi, t', \tau) \equiv 0$, то очевидно, что никаким управлением $q(x, t)$ нельзя удовлетворить уравнению (3) под номером m и, соответственно, достичь заданного распределения температуры. Проблема моментов в этом случае неразрешима, а система неуправляема.

Решить бесконечно-мерную систему уравнений (3) в замкнутом виде (при $n \to \infty$) практически невозможно, поэтому решение задачи сводят к решению конечно-мерной проблемы моментов (при $n = p$), то есть решают систему конечного числа p уравнений (3). Тогда согласно методу моментов оптимальное управление определяется выражением:

$$q(x, t) = c \cdot sign \sum_{n=1}^{p} \xi_n \psi_n(x, t', t) \tag{4}$$

где система чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots , \xi_p$ и время t' определяются из решения следующей задачи минимизации по $\xi_1, \xi_2, \ldots , \xi_p$

найти

$$min \int_0^{t\prime} \int_0^{l} \left| \sum_{n=1}^{p} \xi_n \psi_n(x, t', t) \right| dx dt = \frac{1}{c} \tag{5}$$

при условии

$$\sum_{n=1}^{p} \xi_n T_n' = 1 \tag{6}$$

где c определяет симметричную область пространства управлений.

Если начальное приближение t_0', соответствующее точке A_0, найдено, ищем минимум функции $Jn_\xi(t_0')$ по переменной ξ при фиксированном значении t_0'. Спуск к минимальному значению функции (5) при условии (6) графически изображен на рисунке 1 отрезком A_0M_1

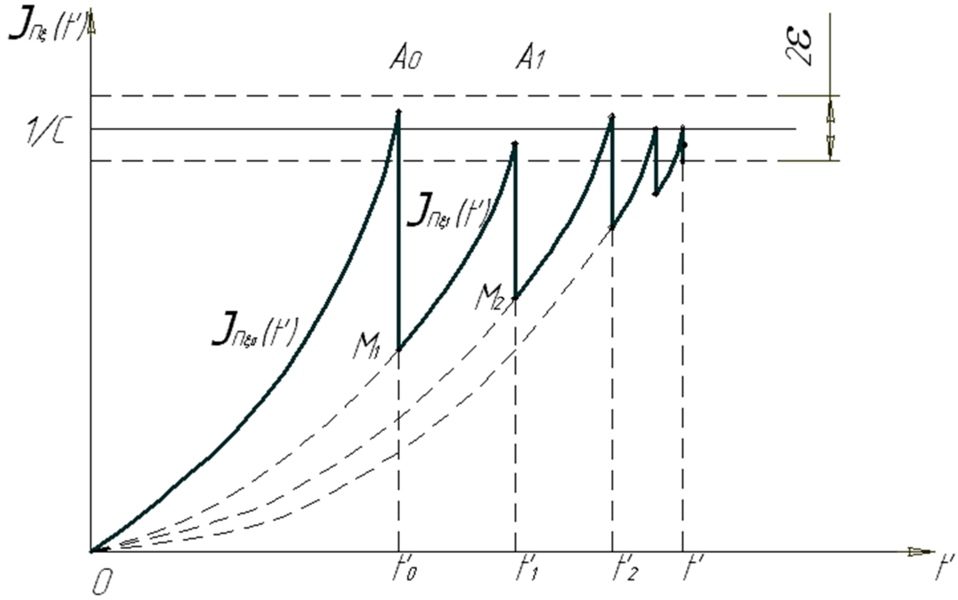

Рис. 1. Спуск к минимальному значению функции

Пусть этот минимум функции в точке M_1 определяется вектором ξ_1 и соответствует условию [5, 6]:

$$minJn_\xi(t_0') = Jn_{\xi_1}(t_0') < \frac{1}{c}$$

где Jn_ξ – двойной интеграл в уравнении (5). Теперь необходимо при фиксированном векторе ξ_1 найти время t_1', чтобы выполнялось условие

$$Jn_{\xi_1}(t_1') < \frac{1}{c}$$

Процесс достижения этого условия на графике изображен кривой M_1A_1. Значения ξ_1 и t_1' являются первыми приближениями вектора ξ и времени t' к их оптимальному значению. Далее необходимо вновь искать минимум $Jn_\xi(t_1')$ по переменной ξ.

Продолжая этот процесс последовательных приближений, можно найти такой вектор $\tilde{\xi}$ и время t', при которых выполняется условие

$$\left|minJn_\xi(t') - \frac{1}{c}\right| \le \varepsilon$$

где ε – заданная точность приближенного решения задачи (5).

Система чисел $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_p$ при наименьшем времени t' определяет решение поставленной задачи на быстродействие. Оптимальное управление определяется выражением (4) при подстановке в него чисел $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_p$.

Вывод. Метод моментов может быть использован для эффективного управления процессом кристаллизации металла сварного шва.

Список литературы

1. *Мелюков В. В., Максимов А. Е.* Управление тепловым процессом кристаллизации металла в сварочной ванне // Сварка и диагностика. 2018. № 6. С. 29–33.

2. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Наука. 3-е изд. 1976. 392 с.

3. *Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г.* Методы теории автоматического управления. М. : Наука, 1971. 743 с.

4. *Карслоу У., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М. : Наука, 1964. 487 с.

5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.

6. *Мелюков В. В.* Оптимизация режима обработки материалов концентрированными потоками энергии : учебное пособие. Киров : ВятГУ, 2003. 212 с.

Conditions of application of the method of moments at optimization of process of crystallization of metal of weld

V. V. Melyukov[1], A. E. Maksimov[2], S. P. Grachev[3]

[1]doctor of technical sciences, professor, Vyatka certification center.
Russia, Kirov. E-mail: rus_melyukov@mail.rua

[2]post-graduate student of the Department of engineering technology, Vyatka State University.
Russia, Kirov. E-mail: 2m3j.p.m@gmail.com

[3]PhD of technical sciences, associate professor of the Department information technologies in mechanical engineering, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: grachev@vyatsu.ru

Abstract. One of the criteria for the quality of the welded joint is the technological strength of the weld metal and the zone of thermal influence. The destruction of the metal in the weld and the zone of thermal influence are associated with the formation of hot and cold cracks. The greatest danger of crystallization cracks are formed during the solidification of the metal of the weld pool and the formation of the primary structure of the weld metal.

To eliminate overheating and reduce the probability of crystallization cracks directly in the weld metal during crystallization, it is necessary to set and solve the problem of optimal control of the thermal process of crystallization of the weld metal.

In this paper, we study the conditions of application of the method of moments in the optimization of the metal crystallization weld to eliminate overheating and reduce the probability of crystallization cracks directly in the weld metal during crystallization.

Purpose: to study the conditions of application of the method of moments for optimal control of the process of crystallization of weld metal.

Problem: to consider the algorithm of application of the method of moments in the optimization of the crystallization process.

Keywords: optimal control methods, method of moments, metal crystallization, control space, temperature distribution.

References

1 *Melyukov V. V., Maksimov A. E.Upravlenie teplovym protsessom kristallizatsii metalla v svarochnoj vanne* [Control of the thermal process of metal crystallization in the weld pool] // *Svarka i diagnostika* – Welding and diagnostics. 2018, No. 6, pp. 29–33.

2. *Matematicheskaya teoriya optimal`nyh protsessov* – The mathematical theory of optimal processes / L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko. *Nauka* – Science. Ed. 3rd. 1976. 392 p.

3. *Fel`dbaum A. A., Butkovskij A. G. Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of the theory of automatic control]. M. Nauka. 1971. 743 p.

4. *W. Carslaw, D. Eger Teploprovodnost` tverdyh tel* [Thermal conductivity of solids]. M. Nauka. 1964. 487 p.

5. *Lykov A. V. Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. M. Vysshaya shkola. 1967. 600 p.

6. *Melyukov V. V. Optimizatsiya rezhima obrabotki materialov kontsentrirovannymi potokami energii: uchebnoe posobie* [Optimization of the mode of processing of materials by concentrated energy flows: textbook]. Kirov. VyatSU. 2003. 212 p.