УДК 515.1 DOI 10.25730/VSU.0536.19.001

Построение конечных топологических пространств*

Е. М. Вечтомов[1], К. И. Шувалов[2]

[1]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: vecht@mail.ru

[2]магистрант направления подготовки «Математика и компьютерные науки», кафедра фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: callmered@yandex.ru

Аннотация. Данная статья, носящая математико-методический характер, посвящена решению задачи построения всех, с точностью до гомеоморфизма, пятиэлементных топологических пространств, а также нахождению и подсчету топологизаций пятиэлементного множества. Применяется порядковый подход, при котором n-элементные T_0-пространства получаются из n-элементных упорядоченных множеств. Далее n-элементные не T_0-пространства строятся склеиванием точек, исходя из m-элементных упорядоченных множеств по всем натуральным $m< n$.

Ключевые слова: упорядоченное множество, порядковый идеал, T_0-топология, конечное топологическое пространство, топологизация.

Введение

В дидактике математики мы выделяем *структурную* (теоретическую) и *задачную* (практическую) составляющие процесса обучения математике. В основе структурного подхода лежит понятие *математической структуры* как множества с заданным набором отношений между его элементами. Бурбаки выделили три фундаментальных вида математических структур: *алгебраический*, *порядковый* и *топологический* [3]. Методике изучения этих типов математических структур посвящены наши работы [4; 6; 15]. Хорошо известны также структуры с мерой и инцидентностные структуры [10, главы 5 и 6]. Отметим, что вопросы методологии математики обсуждаются в [11].

Теоретический материал хорошо усваивается при самостоятельном решении разнообразных задач и упражнений. В этом заключается задачный подход в обучении математике. Выявление структурной основы в задачной ситуации служит важным общим методом решения задач [8; 9].

В классе конечных объектов существуют естественные взаимосвязи между указанными типами структур: алгебраическим (дистрибутивные решетки), порядковым (упорядоченные множества) и топологическим (T_0-пространства) [5, параграф 12; 10, параграф 7.1]. Мы используем эти связи в качестве метода построения конечных топологических пространств на основе диаграмм Хассе конечных упорядоченных множеств (теорема 2.1). Данный материал излагается магистрантам-математикам Вятского государственного университета [7].

Заметим, что T_0-пространства введены в математику А. Н. Колмогоровым. Они встречаются и применяются – как простые спектры коммутативных колец – в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии [1; 17]. Известно топологическое представление Стоуна дистрибутивных решеток на их простых спектрах [16, с. 137]; имеет место также соответствующее функциональное представление [13, теорема 4.4].

Задача нахождения топологических пространств, имеющих не более четырех элементов, рассматривалась нами ранее [10, с. 189–192; 12].

Общепринятую порядковую и топологическую терминологию можно найти в книгах [2; 16; 18].

Статья примыкает к нашим предыдущим работам [13; 14].

Предварительные сведения

Напомним исходные понятия. Начнем с определений, связанных с порядковой структурой, поскольку основой построения конечных топологических пространств служит у нас порядковый подход. Затем введем необходимые топологические понятия.

** Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.*

Рефлексивное, транзитивное, антисимметричное бинарное отношение на непустом множестве X называется *отношением порядка*, или просто *порядком* на X, и обозначается $\leq$. Для любых $x, y, z\in X$ имеем:

1) $x\leq x$ (*рефлексивность*);

2) $x\leq y\leq z \Rightarrow x\leq z$ (*транзитивность*, транзитом через y);

3) $x\leq y\leq x \Rightarrow x=y$ (*антисимметричность*).

Упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ – это непустое множество X с заданным на нем порядком $\leq$.

Пусть дано некоторое упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$. Элементы $a, b\in X$ называются *сравнимыми*, если $a\leq b$ или $b\leq a$, и *несравнимыми* в противном случае. Отметим, что обозначения $<$, $\geq$ и $>$ имеют обычный смысл.

Упорядоченное множество $\langle X, \geq\rangle$ называется *двойственным* к упорядоченному множеству $\langle X, \leq\rangle$, при этом $\langle X, \leq\rangle$ двойственно к $\langle X, \geq\rangle$. Имеет место *принцип двойственности* в теории упорядоченных множеств: если утверждение, сформулированное в терминах отношения порядка, верно для всех упорядоченных множеств, то верно и *двойственное утверждение*, получаемое из исходного утверждения взаимной заменой отношений $\leq$ и $\geq$. Подобным образом определяются и двойственные понятия. Упорядоченное множество называется *самодвойственным*, если оно изоморфно двойственному ему упорядоченному множеству.

Упорядоченное множество называется:

линейно упорядоченным, или *цепью*, если любые два его элемента сравнимы;

антицепью, если любые два его различных элемента несравнимые.

Элемент $a\in X$ называется:

наибольшим, если $x\leq a$ для всех элементов $x\in X$;

максимальным, когда в X нет элементов $x> a$.

Двойственным образом вводятся понятия *наименьшего* и *минимального* элементов упорядоченного множества.

Элемент $x\in X$ называется *верхней гранью множества* $Y\subseteq X$, если $y\leq x$ для любого $y\in Y$. Если множество всех верхних граней множества Y непусто и имеет наименьший элемент s, то s называется *точной верхней гранью множества* Y и обозначается $s=\sup Y$. Двойственным образом определяются понятия *нижней грани множества* Y и *точной нижней грани* $\inf Y$.

Подмножество Y упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ называется *его порядковым идеалом* (или *$\leq$-идеалом*), если

$$\forall x\in X\ \forall y\in Y\ (x\leq y \Rightarrow x\in Y).$$

Пустое множество и само множество X – порядковые идеалы. Объединение и пересечение любого непустого множества порядковых идеалов упорядоченного множества суть порядковые идеалы. Порядковый идеал вида

$$(x]=\{y\in X: y\leq x\},\ x\in X$$

называется *главным порядковым идеалом* в X. Любой непустой порядковый идеал упорядоченного множества X является объединением содержащихся в нем главных порядковых идеалов.

Отображение f: $X\to Y$ упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ в упорядоченное множество $\langle Y, \leq\rangle$ называется:

изотонным, когда $\forall x_1, x_2\in X\ (x_1\leq x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2))$;

(*порядковым*) *изоморфизмом*, когда f взаимно однозначно и взаимно изотонно, то есть f и f^{-1} – изотонные отображения.

Упорядоченное множество, в котором каждое двухэлементное множество обладает точной верхней гранью, называется *верхней полурешеткой*. Поскольку $\sup\{a\}=a$ в любом упорядоченном множестве, то любые элементы a и b произвольной верхней полурешетки имеют $\sup\{a, b\}$. Легко видеть, что в верхней полурешетке всякое конечное непустое подмножество имеет точную верхнюю грань. Двойственным образом определяется понятие *нижней полурешетки*. Упорядоченное множество, являющееся верхней полурешеткой и нижней полурешеткой одновременно, называется *решеткой*. Любая конечная решетка обладает наибольшим и наименьшим элементами, обозначаемыми 1 и 0 соответственно. Это порядковое определение решетки. Двойственное к решетке упорядоченное множество также будет решеткой.

Дадим алгебраическое определение решетки. Алгебраическая структура $\langle L, +, \cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения + и умножения $\cdot$ называется *решеткой*, если $\langle L, +\rangle$ и $\langle L, \cdot\rangle$ – идемпотентные коммутативные полугруппы и выполняются законы (тождества) поглощения $x+xy=x$, $x(x+y)=x$.

Мы видим, что алгебраически решетки задаются четырьмя парами взаимодвойственных аксиом-тождеств. Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней выполняется тождество

$x(y+z)=xy+xz$. Класс всех решеток и класс дистрибутивных решеток являются многообразиями. Дистрибутивными решетками являются все цепи и булеаны $\langle B(X), \cup, \cap\rangle$, где $B(X)$ есть множество всех подмножеств произвольного множества X.

Порядковое и алгебраическое определения решетки равносильны. Если $\langle L, \le\rangle$ – решетка в порядковом смысле, то, положив

$$x+y=\sup\{x, y\} \text{ и } xy=\inf\{x, y\} \text{ для любых } x, y\in L, \tag{I}$$

получим решетку $\langle L, +, \cdot\rangle$ в алгебраическом смысле. Обратно, если $\langle L, +, \cdot\rangle$ – решетка в алгебраическом смысле, то, положив

$$x\le y \Leftrightarrow x+y=y \text{ (эквивалентно, } xy=x) \text{ для всех } x, y\in L, \tag{II}$$

будем иметь решетку $\langle L, \le\rangle$ в порядковом смысле. Переходы (I) и (II) взаимно обратны. Поэтому под *решеткой* можно понимать алгебраическую систему $\langle L, +, \cdot, \le\rangle$ с двумя идемпотентными коммутативно-ассоциативными операциями + и $\cdot$, связанными законами поглощения, и отношением порядка $\le$, удовлетворяющими соотношениям (I) и (II). Заметим, что неравенства в решетках можно почленно складывать и умножать.

Два упорядоченных множества (две решетки) называются *изоморфными*, если существует изоморфизм одного (одной) из них на другое (другую).

Ненаименьший элемент a решетки L называется *неразложимым* (в сумму), если для любых $x, y\in L$ из $a=x+y$ следует $a=x$ или $a=y$.

Порядковый изоморфизм $f\colon X\to Y$ решеток X и Y сохраняет решеточные операции сложения и умножения, то есть $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ и $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$ для любых $x_1, x_2\in X$. Отображение $f\colon X\to Y$ решетки X в решетку Y, сохраняющее решеточные операции, называется *гомоморфизмом* решеток. Отметим, что взаимно однозначный гомоморфизм f решеток является их изоморфизмом, то есть обратное отображение f^{-1} также будет гомоморфизмом. Изотонное отображение решеток не обязано быть гомоморфизмом. Кроме того, отображение $X\to Y$ решетки X в решетку Y, сохраняющее одну из операций + или $\cdot$, может не сохранять другую операцию, но всегда будет изотонным.

Элемент $b\in X$ *покрывает* элемент $a\in X$, если $a< b$ и $a\le x\le b$ влечет $x=a$ или $x=b$ для любого $x\in X$.

Конечное упорядоченное множество $\langle X, \le\rangle$ удобно представить диаграммой Хассе. Элементы множества X изображаются точками «вертикальной» плоскости. Если элемент a покрыт элементом b, то соединяем точку a с точкой b отрезком, идущим вверх. При этом получается граф, называемый *диаграммой Хассе* конечного упорядоченного множества X. Исходный порядок на X полностью восстанавливается по диаграмме Хассе: $x\le y \Leftrightarrow y=x$ или от точки x к точке y можно пройти, двигаясь вверх по графу. Последнее означает существование цепи $x=x_0 < x_1< \ldots < x_n=y$ последовательных покрытий $x_k < x_{k+1}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$ $(n\in \mathbf{N})$.

Диаграмму Хассе любого конечного упорядоченного множества X можно построить, исходя из минимальных элементов. Берем в X множество X_1 всех минимальных элементов и изображаем их точками, расположенными горизонтально (это первый уровень). Затем в упорядоченном множестве $X\backslash X_1$ снова рассматриваем множество X_2 всевозможных минимальных элементов, помещая их на второй горизонтальный уровень над первым. Далее повторяем процедуру: берем упорядоченное множество $X\backslash(X_1\cup X_2)$ и т. д. Упорядоченное множество X разбивается на уровни $X_1, X_2,\ldots, X_n$, являющиеся антицепями. Элемент $a\in X$ находится на k-м уровне $(2\le k\le n)$ тогда и только тогда, когда начинающиеся с a убывающие цепи в X имеют наибольшее число элементов, равное k. Элементы последнего уровня X_n максимальны, но в X могут быть и другие максимальные элементы.

Топологией на непустом множестве X называется множество τ подмножеств в X, содержащее пустое множество $\varnothing$ и само множество X и замкнутое относительно произвольных объединений и конечных пересечений, то есть:

(1) $\varnothing, X\in \tau$;

(2) $(I\ne\varnothing\&(\forall i\in I\, A_i\in \tau)) \Rightarrow \cup\{A_i\colon i\in I\}\in \tau$;

(3) $A, B\in \tau \Rightarrow A\cap B\in \tau$.

Топология τ на X называется T_0-*топологией*, если для любых различных элементов $x, y\in X$ существует множество $U\in \tau$, содержащее ровно один из этих элементов: либо $x\in U, y\notin U$, либо $y\in U, x\notin U$.

Топология τ на X относительно бинарных операций объединения и пересечения множеств является дистрибутивной решеткой с пустым множеством в качестве наименьшего элемента и самого множества X в качестве наибольшего элемента. Хорошо известно [16, с. 90], что всякая неодноэлементная конечная дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $J(X)$ всех порядковых идеалов упорядоченного множества X неразложимых элементов из L с индуцированным порядком, причем $J(X)$ будет T_0-топологией на X. Тем самым конечные неодноэлементные дистрибутивные решетки исчерпываются, с точностью до изоморфизма, T_0-топологиями на конечных множествах X.

Топологическое пространство $\langle X, \tau\rangle$ – это непустое множество X с заданной на нем топологией τ. Множества $U\in \tau$ называются *открытыми множествами* топологического пространства $\langle X, \tau\rangle$, а их дополнения $X\setminus U$ – *замкнутыми множествами*. Элементы топологического пространства называют его *точками*.

Топологическое пространство $\langle X, \tau\rangle$ называется:

дискретным, если τ=B(X), то есть все подмножества в X открыты;

антидискретным, если $\tau=\{\varnothing, X\}$;

T_0-*пространством*, когда τ есть T_0-топология;

симметрическим, когда топология τ замкнута относительно всевозможных (бесконечных) пересечений.

Дискретные пространства, антидискретные пространства и конечные топологические пространства являются симметрическими пространствами.

Отображение f: $X\to Y$ топологического пространства $\langle X, \tau\rangle$ в топологическое пространство $\langle Y, \sigma\rangle$ называется:

непрерывным, если $V\in \sigma$ влечет $f^{-1}(V)\in \tau$, то есть прообразы относительно f открытых множеств в Y будут открытыми множествами в X;

гомеоморфизмом, если f взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то есть f и f^{-1} суть непрерывные отображения.

Топологические пространства X и Y *гомеоморфны*, если существует гомеоморфизм $X\to Y$.

Базой топологического пространства X называется такое множество S его открытых множеств, что любое открытое множество пространства X является объединением некоторых множеств из S, а *предбазой* пространства X называется всякое множество его открытых подмножеств, конечные пересечения которых образуют базу в нем.

Построение конечных T_0-пространств

Пусть дано конечное топологическое пространство X с T_0-топологией τ.

Для произвольной точки $x\in X$ обозначим через $U_x\in \tau$ наименьшее открытое множество, содержащее x. Поскольку $\langle X, \tau\rangle$ является T_0-пространством, то $U_x\neq U_y$ для различных точек x и y из X.

Каждое U_x, $x\in X$, будет *неразложимым открытым множеством* пространства $\langle X, \tau\rangle$ – неразложимым элементом дистрибутивной решетки τ: при любых A, $B\in \tau$ равенство $A\cup B=U_x$ влечет $A=U_x$ или $B=U_x$. Возьмем произвольное непустое неразложимое множество $U=\{y, \ldots, z\}\in \tau$. Имеем $U=U_y\cup\ldots\cup U_z$. Откуда $U=U_x$ для некоторой точки $x\in X$.

Зададим на множестве X отношение порядка $\leq$, положив:

$$x\leq y \Leftrightarrow U_x\subseteq U_y \text{ для любых } x, y\in X.$$

Получаем упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$, в котором главными порядковыми идеалами будут в точности множества U_x по всем элементам $x\in X$. Действительно, $(x]=\{z\in X\colon z\leq x\}=\{z\in X\colon U_z\subseteq U_x\}=U_x$ для всех $x\in X$.

Рассмотрим теперь произвольное конечное упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$. Его порядковые идеалы образуют T_0-топологию τ на множестве X. При этом неразложимыми открытыми множествами служат главные порядковые идеалы $(x]$, $x\in X$.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Для каждого конечного множества X между T_0-топологиями τ на X и отношениями порядка $\leq$ на X существует естественное взаимно однозначное соответствие, при котором для любых $x, y\in X$*

1) $U_x\subseteq U_y \Leftrightarrow x\leq y$;

2) $U_x=(x]$;

3) *открытыми множествами U_x исчерпываются все неразложимые элементы дистрибутивной решетки τ.*

Из этой теоремы непосредственно выводится несколько следствий.

Следствие 1. *Любое конечное T_0-пространство $\langle X, \tau\rangle$ однозначно, с точностью до гомеоморфизма, определяется как множество всех неразложимых элементов дистрибутивной решетки τ с порядковыми идеалами в качестве открытых множеств.*

Следствие 2. *Для любого натурального числа n число всех попарно негомеоморфных n-элементных T_0-пространств совпадает с числом всевозможных попарно неизоморфных n-элементных упорядоченных множеств.*

Следствие 3. *Число всех T_0-топологизаций произвольного конечного множества равно числу его упорядочений.*

На основании сказанного все, с точностью до гомеоморфизма, n-элементные T_0-пространства можно построить, исходя из диаграмм Хассе n-элементных упорядоченных множеств.

Именно, берем диаграмму Хассе конечного упорядоченного множества $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Выписываем все его порядковые идеалы. Они образуют T_0-топологию τ на множестве X. Относительно операций объединения и пересечения (и отношения включения) τ является дистрибутивной решеткой всех открытых множеств T_0-пространства $\langle X, \tau\rangle$. Множества $U_x=(x]$, $x\in X$ образуют наименьшую базу β топологии τ. Для наглядности на диаграмме Эйлера–Венна изображаем множество $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и его подмножества U_x, $x\in X$. Ради удобства можно нарисовать (обвести замкнутой кривой) только те множества из базы β, которые составляют некоторую предбазу δ топологии τ (в случае существования $\delta\subset\beta$).

В [10, с. 190, 192] приведены все 24 n-элементные T_0-пространства при $n\leq 4$, соответствующие 24 упорядоченным множествам, имеющим не более четырех элементов [10, с. 123].

Известно [2, с. 15], что с точностью до изоморфизма существует ровно 63 пятиэлементных упорядоченных множества. Поэтому имеется, с точностью до гомеоморфизма, ровно 63 пятиэлементных T_0-пространства.

В качестве примера рассмотрим упорядоченное множество $X=\{a, b, c, d, e\}$, заданное покрытиями $a< c$, $a< d$, $d< e$, $b< e$. Соответствующая T_0-топология τ на X составлена из порядковых идеалов: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, d, e\}$, X. База β содержит открытые множества $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, b, d, e\}$, последние четыре из которых образуют предбазу δ. На рисунке 1 изобразим диаграмму Хассе упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ и диаграмму Эйлера–Венна T_0-пространства $\langle X, \tau\rangle$ с выделенными множествами предбазы δ.

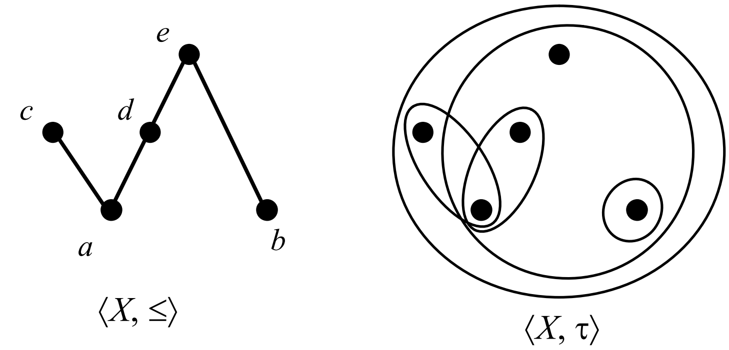

Рис. 1

На следующем рисунке нарисована диаграмма Хассе дистрибутивной решетки $\langle\tau, \subseteq\rangle$ с отмеченными неразложимыми элементами ***a***, ***b***, ***ac***, ***ad***, ***abde***. Очевидно, что упорядоченное множество $\langle\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{ac}, \boldsymbol{ad}, \boldsymbol{abde}\}, \subseteq\rangle$ изоморфно исходному упорядоченному множеству $\langle\{a, b, c, d, e\}, \leq\rangle$.

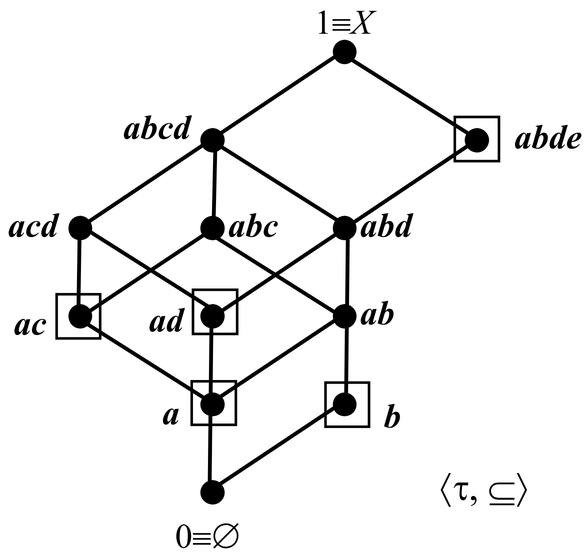

Рис. 2

Нахождение пятиэлементных не T_0-пространств

Рассмотрим на произвольном топологическом пространстве $\langle X, \tau\rangle$ бинарное отношение $\sim$ «неотделимости» точек $x, y\in X$:

$$x\sim y \text{ означает } \forall U\in\tau\ (x\in U \Leftrightarrow y\in U).$$

Легко видеть, что $\sim$ есть отношение эквивалентности на множестве X. Поэтому пространство X разбивается на попарно непересекающиеся непустые классы $[x]_{\sim}=\{y\in X: y\sim x\}$, $x\in X$, топологически не отделимых точек. Любое открытое множество $U\in\tau$ вместе с каждой своей точкой x содержит и весь класс $[x]_{\sim}$. Следовательно, множества $U/\sim=\{[x]_{\sim}: x\in U\}$, $U\in\tau$, являются подмножествами фактор-множества $X/\sim=\{[x]_{\sim}: x\in X\}$ и образуют T_0-топологию $\tau/\sim=\{U/\sim: U\in\tau\}$ на $X/\sim$. В результате получаем T_0-пространство $\langle X/\sim, \tau/\sim\rangle$. Топологии τ и $\tau/\sim$ изоморфны, как решетки.

Возьмем конечное топологическое пространство $\langle X, \tau\rangle$, содержащее n элементов. Обозначим через k число классов эквивалентности $[x]_{\sim}$, $x\in X$, пространства X по эквивалентности $\sim$. Натуральное число k равно числу различных множеств U_x по всем точкам $x\in X$, а также числу замыканий одноэлементных подмножеств пространства X. Равенство $k=n$ эквивалентно тому, что X является T_0-пространством. Топологическое пространство $\langle X, \tau\rangle$ получается из k-элементного T_0-пространства $\langle X/\sim, \tau/\sim\rangle$ добавлением $n-k$ точек к различным элементам $[x]_{\sim}\in X/\sim$.

Пусть X – пятиэлементное множество с заданной на нем топологией τ, не являющейся T_0-топологией. Тогда $k\leq 4$.

При k=1 имеем только антидискретное пространство $\langle X, \tau\rangle$.

При k=2 исходим из двух двухэлементных T_0-пространств (дискретного и связного двоеточия) и добавляем к имеющимся двум точкам три новые точки. При разбиении пятиэлементного множества на два класса возможны случаи 5=1+4 и 5=2+3. В первом случае мы не трогаем одну точку, а вторую «раздуваем» до четырехэлементного множества. Во втором случае к одной из точек добавляем одну точку, а к другой – две точки.

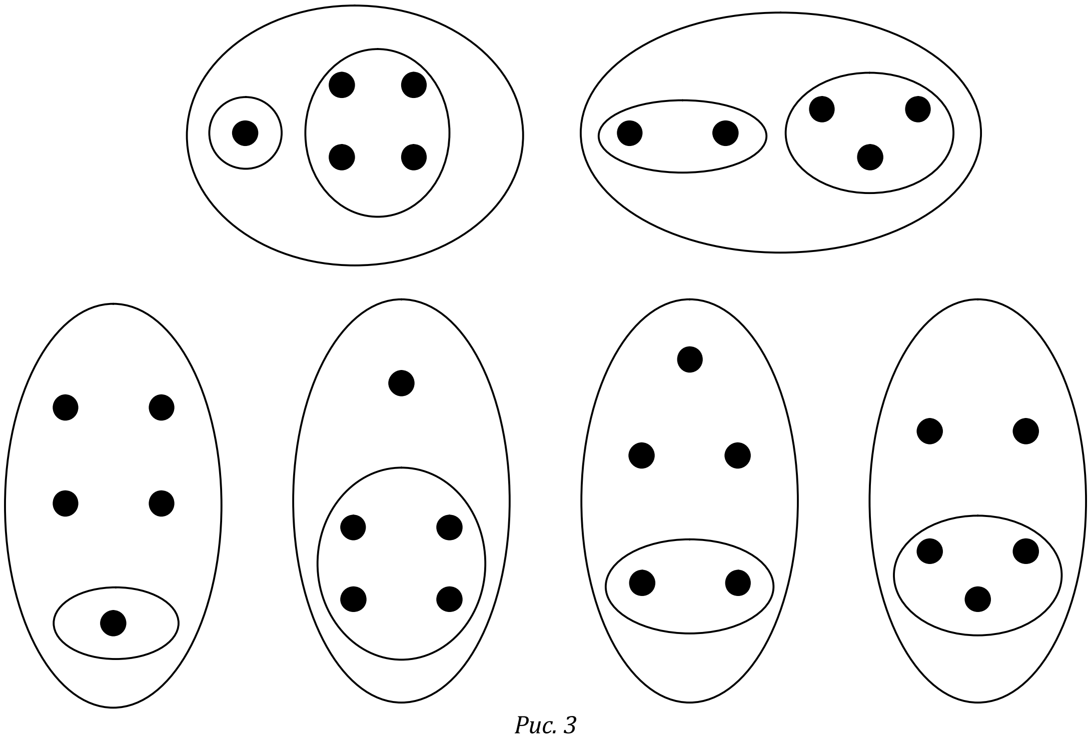

Рис. 3

На рисунке 3 изображены два пятиэлементных топологических пространства, полученных из дискретного двухэлементного пространства и четыре пятиэлементные топологические пространства, основанные на связном двоеточии. Итак, при k=2 получаем, с точностью до гомеоморфизма, 6 пятиэлементных топологических пространств.

Пусть k=3. Возможны случаи 5=1+2+2 и 5=1+1+3, которые равноценны по числу соответствующих топологических пространств. Поэтому достаточно рассмотреть первый случай. Для каждого из пяти трехэлементных упорядоченных множеств найдем все пятиэлементные топологические пространства с тремя классами неотделимых точек, содержащими 1+2+2 точки.

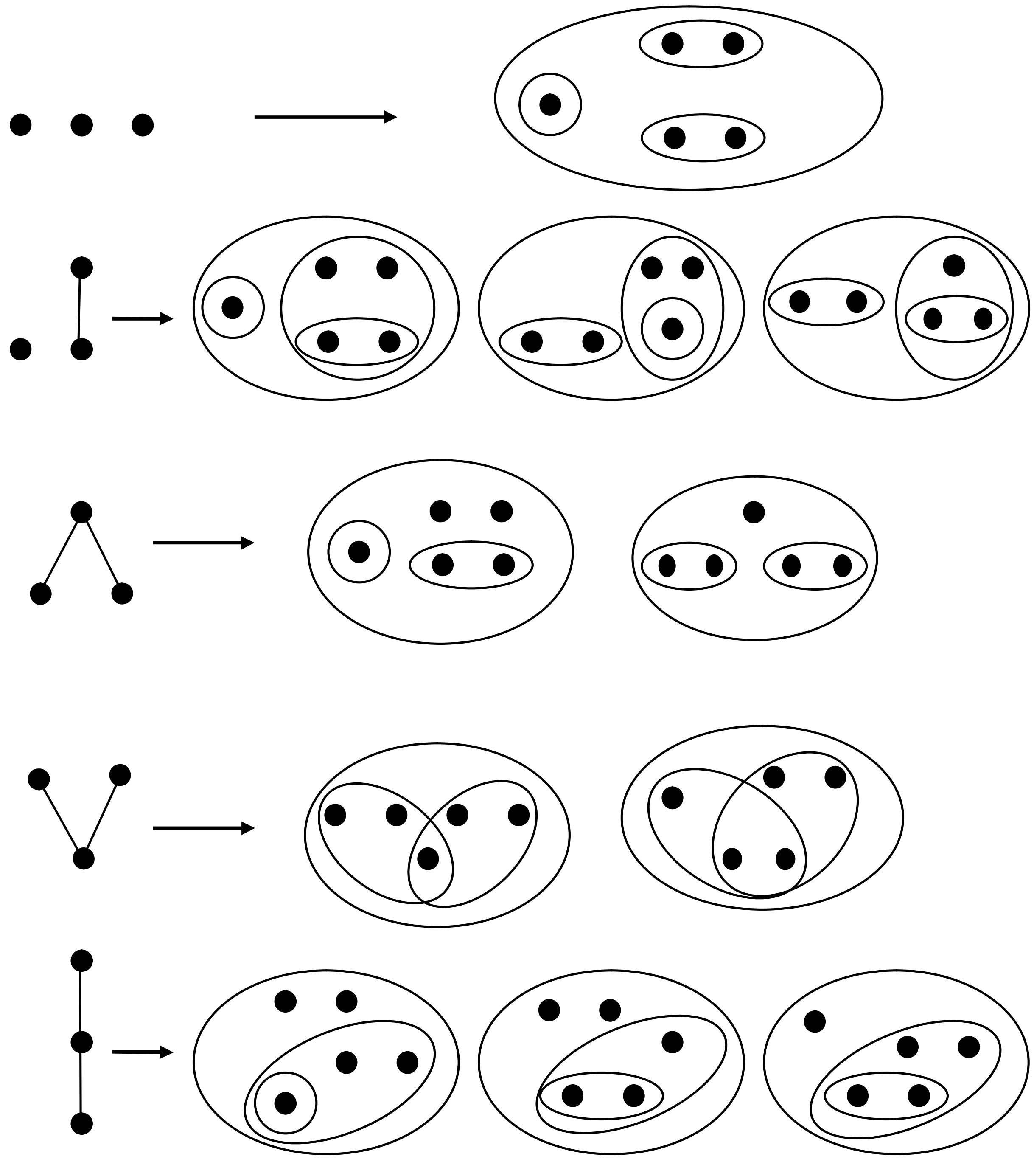

Рис. 4

Получили 11 топологических пространств. Следовательно, с точностью до гомеоморфизма, существует 22 пятиэлементных топологических пространства с k=3 классами неотделимых точек.

Исследуем ситуацию k=4. Имеем 5=1+1+1+2. В данном случае все пятиэлементные топологические пространства получаются «удвоением» одной из точек четырехэлементных T_0-пространств. Для нахождения таких пространств изобразим диаграммы Хассе всех 16 четырехэлементных упорядоченных множеств, поставив под каждой из них число соответствующих пятиэлементных пространств с k=4 классами неотделимых точек; сами пространства рисовать не будем (это делается точно так же, как на рисунке 4). Получим, с точностью до гомеоморфизма, 47 пятиэлементных топологических пространства с k=4 классами неотделимых точек.

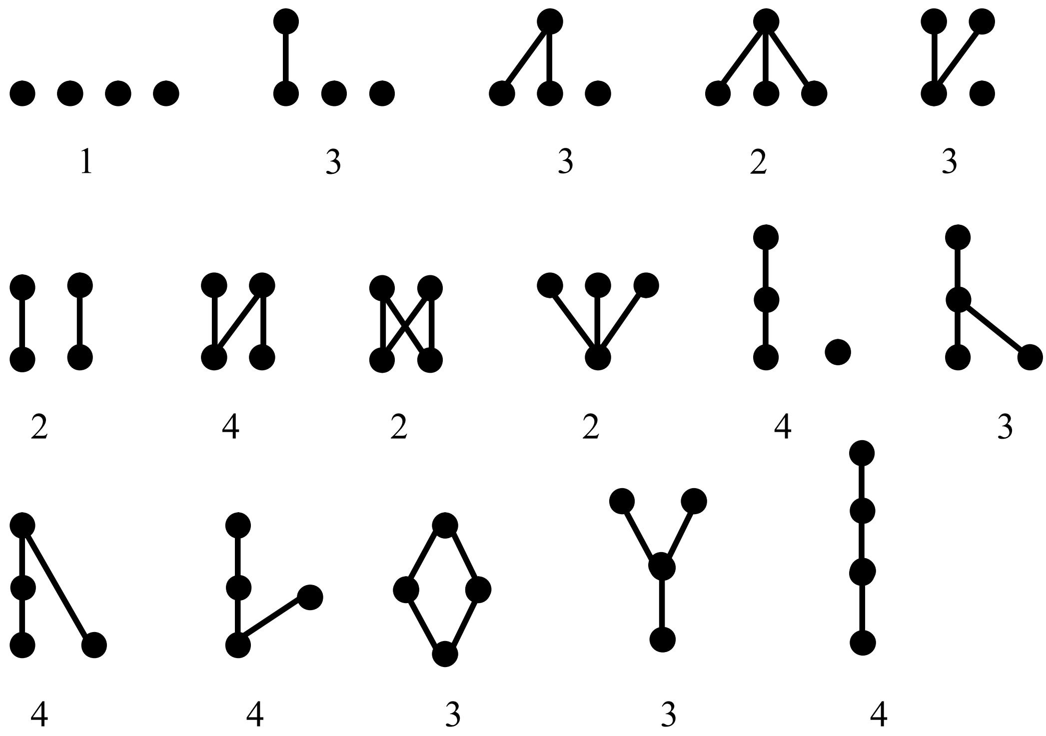

Рис. 5

В результате имеем, с точностью до гомеоморфизма, ровно 76 пятиэлементных не T_0 топологических пространств.

Число топологизаций пятиэлементного множества

Рассмотрим пятиэлементное множество $X=\{a, b, c, d, e\}$. По следствию 3 число T_0-топологий на множестве X равно 4231 – числу его упорядочений [2, с. 15]. Далее будем подсчитывать количество не T_0-топологий τ на пятиэлементном множестве X.

Снова при k=1 получаем антидискретную топологию.

При k=2 топологизации подсчитываем на основе рисунка 3 – их число равно 5+10+5+5+10+10=45.

При k=3 для нахождения числа топологизаций используем рисунок 4 – получаем 2(5+30+30+30+30+15+15+30+30+30+30)=550 топологизаций.

Наконец, при k=4 на основе рисунка 5 имеем 10+120+120+40+120+120+240+60+40+120+240+240+120+120+240+240=2190 топологизаций.

Суммируя сказанное, находим общее число топологизаций пятиэлементного множества: 4231+1+45+550+2190=7017.

Упражнения

1. Рефлексивное транзитивное бинарное отношение ρ на непустом множестве X называется отношением *предпорядка* (*предпорядком*, квазипорядком) на X, а пара $\langle X, \rho\rangle$ – *предупорядоченным множеством*. Введем на предупорядоченном множестве $\langle X, \rho\rangle$ бинарное отношение $\approx$ формулой: $x\approx y \Leftrightarrow (x\rho y \,\&\, y\rho x)$ для всех $x, y\in X$. Отношение $\approx$ является эквивалентностью на X. На фактор-множестве $X/\approx$ зададим бинарное отношение $\leq$ правилом: $[x]_\approx\leq [y]_\approx \Leftrightarrow x\rho y$ для любых $x, y\in X$. Докажите, что $\langle X/\approx, \leq\rangle$ – упорядоченное множество.

2. Покажите, что множество τ всевозможных ρ-идеалов любого предупорядоченного множества $\langle X, \rho\rangle$ образует топологию на множестве X, такую, что $\langle X, \tau\rangle$ оказывается симметрическим пространством.

3. На симметрическом пространстве $\langle X, \tau\rangle$ определим бинарное отношение ρ, положив $x\rho y \Leftrightarrow \forall U\in\tau\ (y\in U \Rightarrow x\in U)$ при $x, y\in X$. Проверьте, что ρ будет предпорядком на множестве X.

4. Убедитесь, что переходы $\rho\to\tau$ и $\tau\to\rho$ из упражнений 2 и 3 устанавливают взаимно однозначное соответствие между классом всех предупорядоченных множеств $\langle X, \rho\rangle$ и классом всех симметрических пространств $\langle X, \tau\rangle$.

5. Покажите, что при переходах $\rho\to\tau$ и $\tau\to\rho$ упорядоченным множествам соответствуют симметрические T_0-пространства, и наоборот.

6. Пусть $\langle X, \tau\rangle$ – произвольное симметрическое пространство. Тогда множество σ всех замкнутых множеств этого пространства также будет топологией на множестве X. Как связаны решетки σ и τ?

7. Пусть f: $X_1\to X_2$ – отображение множеств, ρ_i – предпорядок на X_i и τ_i – соответствующая симметрическая топология на X_i при i=1, 2. Докажите, что f сохраняет предпорядок, то есть $a\rho_1 b \Rightarrow f(a)\rho_2 f(b)$ для любых $a, b\in X_1$, тогда и только тогда, когда f: $\langle X_1, \tau_1\rangle\to\langle X_2, \tau_2\rangle$ – непрерывное отображение симметрических пространств.

8. Докажите, что категория всех конечных T_0-пространств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов эквивалентна категории всевозможных конечных упорядоченных множеств и их изотонных отображений.

9. Покажите, что категория всех конечных T_0-пространств и их непрерывных отображений антиэквивалентна категории всевозможных конечных неодноэлементных дистрибутивных решеток и их гомоморфизмов, сохраняющих 0 и 1. См. [10, с. 239].

10. Постройте все 24 диаграммы Хассе n-элементных упорядоченных множеств при $n\leq 4$ (см. [10, с. 123]).

11. Проверьте, что с точностью до гомеоморфизма существуют: 1 одноэлементное топологическое пространство, 3 двухэлементных топологических пространства, 9 трехэлементных топологических пространств, 33 четырехэлементных топологических пространства (см. [10, с. 190–192]).

12. Сколько существует топологизаций n-элементного множества для n=1, 2, 3, 4? См. [10, с. 190–192].

13. Изобразите диаграммы Хассе всех 63 попарно неизоморфных пятиэлементных упорядоченных множеств.

14. Нарисуйте 63 диаграммы Эйлера–Венна попарно негомеоморфных пятиэлементных T_0-пространств. Отметьте только множества из предбаз T_0-топологий.

15. Проверьте, что число T_0-топологизаций пятиэлементного множества равно 4231.

Список литературы

1. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру / пер. с англ. М. : Мир, 1972. 160 с.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток / пер. с англ. М. : Наука, 1984. 568 с.
3. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // В книге: Бурбаки Н. Очерки по истории математики / пер. с франц. М. : ИЛ, 1963. С. 245–259.
4. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Изучение топологической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 2. С. 86–93.
5. *Вечтомов Е. М.* Теория решеток : учебно-методическая разработка спецкурса. Киров : Кировский государственный педагогический институт, 1995. 40 с.
6. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 2(1). С. 111–120.
7. *Вечтомов Е. М.* Курс «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 169–186.
8. *Вечтомов Е. М.* О нестандартных математических задачах // Материалы докладов IV Всероссийской научно-практической конференции «Настоящее и будущее физико-математического образования». Киров : Старая Вятка, 2015. С. 77–80.
9. *Вечтомов Е. М.* Выявление структуры как общий метод решения математических задач // Материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики. Калуга, М., 2015. С. 265–267.
10. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
11. *Вечтомов Е. М.* Философия математики : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 317 с.
12. *Вечтомов Е. М., Пуртова С. А.* Мини-топологии // Информатика. Математика. Язык. Вып. 5. Киров : ВятГГУ, 2008. С. 161–167.
13. *Вечтомов Е. М., Тулупов С. Н.* Представления конечных дистрибутивных решеток // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2019. Вып. 21. С. 113–132.
14. *Вечтомов Е. М., Тулупов С. Н., Шувалов К. И.* Изучение дистрибутивных решеток // VI Всероссийская научно-практическая конференция «Преподавание математики и информатики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики». Глазов : ГГПИ имени В. Г. Короленко, 2018. С. 28–35.
15. *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Изучение алгебраической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1(3). С. 41–48.
16. *Гретцер Г.* Общая теория решеток / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 456 с.
17. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия / пер. с англ. М. : Мир, 1981. 600 с.
18. *Энгелькинг Р.* Общая топология / пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.

Construction of finite topological spaces

E. M. Vechtomov[1], K. I. Shuvalov[2]
[1] doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail:vecht@mail.ru
[2] master student in direction "Mathematics and computer science", Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: callmered@yandex.ru

Abstract. This article, which is of mathematical and methodological nature, is devoted to the problem of constructing all five-element topological spaces, accurate to homeomorphism, as well as to finding and counting topologizations of the five-element set. An ordinal approach is applied, in which *n*-element T_0-spaces are obtained from n-element ordered sets. Next, *n*-element non-T_0-spaces are constructed by gluing the points based on m-element ordered sets over all natural m< n.

Keywords: ordered set, ordinal ideal, T_0-topology, finite topological space, topologization.

References

1. *At`ya M., Mc Donal`d I. Vvedenie v kommutativnuyu algebru* [Introduction to commutative algebra] / transl. from Eng. M. Mir. 1972. 160 p.
2. *Birkgof G. Teoriya reshetok* [Theory of gratings] / transl. from Eng. M. Nauka. 1984. 568 p.
3. *Bourbaki N. Arhitektura matematiki* [The architecture of mathematics] // In the book: *Bourbaki N. Ocherki po istorii matematiki* [Essays on the history of mathematics] / translated from the French. M. IL. 1963. Pp. 245–259.
4. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Izuchenie topologicheskoj struktury* [The study of the topological structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanities University. 2014, No. 2, pp. 86–93.
5. *Vechtomov E. M. Teoriya reshetok: uchebno-metodicheskaya razrabotka spetskursa* [Lattice theory: educational and methodical development of the special course]. Kirov. Kirov State Pedagogical Institute. 1995. 40 p.
6. *Vechtomov E. M. Izuchenie poryadkovoj struktury* [Study of sequence structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* - Herald of Vyatka State Humanities University. 2010, No. 2(1), pp. 111–120.
7. *Vechtomov E. M. Kurs «Uporyadochennye mnozhestva i reshetki» dlya magistrantov-matematikov* [Course "Ordered sets and lattices" for graduate mathematicians] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2011. Issue. 13. Pp. 169–186.
8. *Vechtomov E. M. O nestandartnyh matematicheskih zadachah* [On non-standard mathematical problems] // *Materialy dokladov IV Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferentsii «Nastoyashchee i budushchee fiziko-matematicheskogo obrazovaniya»* – Proceedings of the IV all-Russian scientific and practical conference "Present and future of physical and mathematical education". Kirov. Staraya Vyatka. 2015. Pp. 77–80.
9. *Vechtomov E. M. Vyyavlenie struktury kak obshchij metod resheniya matematicheskih zadach* [Identification of the structure as a general method of solving mathematical problems] // *Materialy XXXIVMezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki* – Proceedings of the XXXIV International scientific seminar of teachers of mathematics and informatics. Kaluga, Moscow. 2015. Pp. 265–267.
10. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury: uchebnoe posobie dlya akademicheskogo bakalavriata* [Mathematics: basic mathematical structures: textbook for academic undergraduate. 2d publ.] M. Yurayt. 2018. 296 p.
11. *Vechtomov E. M. Filosofiya matematiki: uchebnoe posobie dlya bakalavriata i magistratury* [Philosophy of mathematics: textbook for bachelor's and master's degrees. 2d publ.] M. Yurayt. 2018. 317 p.
12. *Vechtomov E. M., Purtova S. A.* Mini-topologii. Informatika. Matematika. Yazyk. [Mini-topology. Informatics. Mathematics. Language].
13. *Vechtomov E. M., Tulupov S. N. Predstavleniya konechnyh distributivnyh reshetok* [Representations of finite distributive lattices] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2019. Issue 21. Pp. 113–132.
14. *Vechtomov E. M., Tulupov S. N., SHuvalov K. I. Izuchenie distributivnyh reshetok* [Study of distributive lattices] // *VIVserossijskaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Prepodavanie matematiki i informatiki v shkolah i vuzah: problemy soderzhaniya, tehnologii i metodiki»* – All-Russia scientific-practical conference "Teaching mathematics and informatics in schools and universities: problems of content, technology and methods." Glazov. GSPI named after V. G. Korolenko. 2018. Pp. 28–35.
15. *Vechtomov E. M., CHermnyh V. V. Izuchenie algebraicheskoj struktury* [Study of algebraic structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University. 2012, No. 1(3), pp. 41–48.
16. *Grettser G.* Obshchaya teoriya reshetok [General theory of lattices] / transl. from Eng. M. Mir. 1982. 456 p.
17. *Hartshorne R.* Algebraicheskaya geometriya [Algebraic geometry] / transl. from Eng. M. Mir. 1981. 600 p.
18. *Engelking R.* Obshchaya topologiya [General topology] / transl. from Eng. M. Mir. 1986. 752 p.