УДК 517.968 DOI 10.25730/VSU.0536.20.002

Применение интегрального уравнения первого рода для идентификации значения дифференциального оператора

А. Л. Калашников
кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.
Россия, г. Нижний Новгород. E-mail: allk123@yandex.ru

Аннотация. В прикладной математике возникает необходимость решения уравнений с частными производными, например, в задачах математической физики с граничными, начальными условиями и правой частью дифференциального оператора. Такие задачи относятся к классу прямых и характеризуются заданием причин, а их решения – это следствия, которые находятся из уравнения с известными параметрами. В статье рассматривается обратная стационарная задача идентификации значения линейного дифференциального оператора в частных производных второго порядка при однородных краевых условиях на границе прямоугольника и известном приближенном решении, заданным, например, аналитически или дискретно. По некорректности задачи численного дифференцирования прямая подстановка такого решения в дифференциальный оператор приведет к большой погрешности его значения. В работе используется последовательный метод функций Грина, применяемый для отдельных дифференциальных операторов, входящих в исходный, и здесь не требуется находить функцию Грина для всего дифференциального оператора. Это позволяет более простым образом свести обратную краевую задачу к двухмерному интегральному уравнению первого рода, для которого имеются достаточно хорошо разработанные методы регуляризации.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, идентификация, функции Грина, интегральное уравнение первого рода.

Прикладные проблемы приводят к необходимости решения краевых задач для уравнений с частными производными. В качестве таковых при рассмотрении уравнений второго порядка выделяются эллиптические, параболические и гиперболические уравнения. Решение краевой задачи определяется из уравнения и некоторых дополнительных условий. Для стационарных уравнений задаются граничные условия, а для нестационарных – еще и начальные условия. Отмеченные краевые задачи относятся к классу прямых задач математической физики, то есть задачи, для которых заданы причины, а искомыми величинами являются следствия. Они характеризуются необходимостью нахождения решения из уравнения с заданными коэффициентами и правой частью и дополнительных граничных и начальных условий. Обратными же будут задачи, в которых известны следствия, а неизвестными выступают причины. Они связаны часто с необходимостью определения не только решения, но и некоторых недостающих коэффициентов или условий компонент математической модели. Поэтому решение таких задач представляет большой практический интерес. Обратные задачи математической физики часто принадлежат к классу некорректных [2; 3]. Некорректность обусловлена, прежде всего, отсутствием непрерывной зависимости решения от входных данных. В этом случае используются специальные регуляризирующие методы для нахождения устойчивого решения. [1; 5]. Одним из способов нахождения решений обратных задач является метод сведения к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода [1] и применению к нему методов регуляризации. Так, примером обратной задачи является идентификации [2; 4] правой части уравнения в частных производных. Это соответствует нахождению воздействия по его результату, например, известному решению уравнения, заданному аналитически или дискретно, и относится к обратным задачам, вообще говоря, некорректным. Некорректность такой задачи возникает вследствие неограниченности дифференциального оператора, при которой малая погрешность в решении дает большую погрешность его значения при дифференцировании [3].

Идентификация значения дифференциального оператора

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(s(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+g(x,y)u(x,y)=F(x,y) \qquad (1)$$

при известной функции $u_\delta(x,y)\approx u(x,y)$, заданной с некоторой погрешностью δ, полученной, например, из эксперимента. Здесь $x\in[a,b], y\in[c,d]$ и $u(a,y)=u(b,y)=u(x,c)=u(x,d)=0$

на границе. Требуется найти $F(x,y)$ в (I). Подобные проблемы идентификации возникают, например, при установившихся колебаниях и других задачах математической физики [2; 4]. Задача идентификации вследствие некорректности операции дифференцирования [3] некорректна, так как прямая подстановка $u_\delta(x,y)$ в (1) дает большую погрешность. С целью приближенного нахождения правой части уравнения применяются методы регуляризации, используя, например, способы сведения к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода [1], удобному для регуляризации.

Интегральное уравнение в задаче идентификации

Рассмотрим задачу (I) при $s(x,y)=p(x)q(y)$ в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)q(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p(x)q(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+g(x,y)u(x,y)=F(x,y) \qquad (2)$$

с непрерывно дифференцируемыми и знакопостоянными функциями $p(x), q(y)\neq 0$, непрерывной $g(x,y)$ и $u(x,y)$, имеющей непрерывные частные производные второго порядка. Требуется по приближенно заданной функции $u_\delta(x,y)\approx u(x,y)$ найти $F(x,y)$. Сведем эту обратную задачу к двухмерному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, используя последовательное применение функций Грина.

Теорема. Уравнение (2) приводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода:

$$\int_c^d\int_a^b G(x,y,t,s)F(t,s)dtds = P(x,y) \qquad (3)$$

с ядром $G(x,y,t,s)=G_1(x,t)G_2(y,s)$ и правой частью

$$P(x,y)=\int_a^b p(t)G_1(x,t)u(t,y)dt+\int_c^d q(s)G_2(y,s)u(x,s)ds+$$

$$+\int_c^d\int_a^b G(x,y,t,s)g(t,s)u(t,s)dtds,$$

где $G_1(x,t)$ функция Грина краевой задачи 1 $\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial M(x)}{\partial x}\right)=0$ при $M(a)=M(b)=0,$ а $G_2(y,s)$ для краевой задачи 2 $\frac{\partial}{\partial y}\left(q(y)\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=0$ при $Q(c)=Q(d)=0.$

Доказательство. Рассмотрим (2) при однородных краевых условиях на функцию $u(x,y)$. Отметим, что для краевых задач 1 и 2 существуют функции Грина [1]. Обозначим их как $G_1(x,t)$, $G_2(y,s)$. Введем функцию $V(x,y)=F(x,y)-g(x,y)u(x,y)$. Тогда из (2) получаем равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)q(y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)=V(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(p(x)q(y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$

Очевидно:

$$q(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)=V(x,y)-p(x)\frac{\partial}{\partial y}\left(q(y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$

и, применяя функцию $G_1(x,t)$ по x при $u(a,y)=u(b,y)=0$, имеем

$$q(y)u(x,y)=\int_a^b G_1(x,t)\left[V(t,y)-p(t)\frac{\partial}{\partial y}\left(q(y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}\right)\right]dt. \qquad (4)$$

При дифференцировании по параметру под интегралом получаем:

$$\int_a^b G_1(x,t)p(t)\frac{\partial}{\partial y}\left(q(y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}\right)dt=\frac{\partial}{\partial y}q(y)\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b G_1(x,t)p(t)u(t,y)dt.$$

Поскольку $u(t,c)=u(t,d)=0$, то $Q(x,c)=Q(x,d)=0$ для функции

$$Q(x,y)=\int_a^b G_1(x,t)p(t)u(t,y)dt$$

и, применяя в (4) функцию Грина задачи 2 по *y*, получаем равенство:

$$\int_c^d G_2(y,s)q(s)u(x,s)ds=\int_c^d\int_a^b G_2(y,s)G_1(x,t)V(t,s)dtds-\int_a^b G_1(x,t)p(t)u(t,y)dt.$$

Поскольку $V(x,y)=F(x,y)-g(x,y)u(x,y)$, то отсюда имеем двухмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для функции $F(x,y)$

$$\int_c^d\int_a^b G(x,y,t,s)F(t,s)dtds=P(x,y).$$

Здесь $G(x,y,t,s)=G_1(x,t)G_2(y,s)$ – ядро уравнения с правой частью

$$P(x,y)=\int_a^b p(t)G_1(x,t)u(t,y)dt+\int_c^d q(s)G_2(y,s)u(x,s)ds+$$

$$+\int_c^d\int_a^b G(x,y,t,s)g(t,s)u(t,s)dtds$$

при $(x,y)\in[a,b;c,d]$. **Теорема 1 доказана.**

Обратная задача получается здесь следующим образом. Пусть задана функция $u_\delta(x,y)\approx u(x,y)$ приближенно аналитически или дискретно (в узлах сетки). Тогда для задачи идентификации определения $F(x,y)$ получаем уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_c^d\int_a^b G(x,y,t,s)F_\delta(t,s)dtds=P_\delta(x,y),$$

где функция правой части этого уравнения имеет вид:

$$P_\delta(x,y)=\int_a^b p(t)G_1(x,t)u_\delta(t,y)dt+\int_c^d q(s)G_2(y,s)u_\delta(x,s)ds+$$

$$+\int_c^d\int_a^b G(x,y,t,s)g(t,s)u_\delta(t,s)dtds.$$

Для приближенного вычисления функции $P_\delta(x,y)$ можно применить кубатурные формулы. Решая это уравнение и находя $F_\delta(x,y)$, получаем приближение к точной функции $F(x,y)$. Но так как это уравнение представляет собой некорректную задачу, то здесь целесообразно применять методы регуляризации, изложенные, например, в [1; 5].

Теорема 2. Для задач 1 и 2 при $p(x),q(y)\neq 0$ функции Грина:

$$G_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\int_a^x\frac{dr}{p(r)}\cdot\int_b^t\frac{dr}{p(r)}}{\int_a^b\frac{dr}{p(r)}}, a\le x\le t \text{ и равно } \dfrac{\int_a^t\frac{dr}{p(r)}\cdot\int_b^x\frac{dr}{p(r)}}{\int_a^b\frac{dr}{p(r)}}, t<x\le b\end{cases} \qquad (5)$$

$$G_2(y,s)=\begin{cases}\dfrac{\int_c^y\frac{dr}{q(r)}\cdot\int_d^s\frac{dr}{q(r)}}{\int_c^d\frac{dr}{q(r)}}, c\le y\le s \text{ и равно } \dfrac{\int_c^s\frac{dr}{q(r)}\cdot\int_d^y\frac{dr}{q(r)}}{\int_c^d\frac{dr}{q(r)}}, s<y\le d\end{cases}. \qquad (6)$$

Доказательство. На основе [1] у краевых задач 1 и 2 существуют функции Грина. При дифференцировании задача 1 имеет вид:

$$p'(x)M'(x)+p(x)M''(x)=0, \quad M(a)=M(b)=0,\ x\in[a,b]. \tag{7}$$

Введем $S(x)=M'(x)$. Тогда из (7) задачи 1 имеем $\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{p'(x)}{p(x)}$. Интегрируя, получаем решение в виде $\ln S(x)=-\ln p(x)+\ln A$. Отсюда $S(x)=\frac{A}{p(x)}=M'(x)$ и при интегрировании $M(x)=A\int_a^x\frac{dr}{p(r)}+B$. Введем $F(x)=\int_a^x\frac{dr}{p(r)}$. Тогда $M(x)=AF(x)+B$ есть общее решение задачи 1 и $M_1(x)=F(x), M_2(x)=F(x)+B$ – ее частные. Очевидно, $F'(a)=\frac{1}{p(a)}\neq 0$, а $F(a)=\int_a^a\frac{dr}{p(r)}=0$ и $F(b)=\int_a^b\frac{dr}{p(r)}\neq 0$. Найдем число B в $M_2(x)$. Так как $M_2'(b)=F'(b)=\frac{1}{p(b)}\neq 0$, то при $M_2(b)=F(b)+B=0$ получаем $B=-F(b)$. Тогда:

$$M_2(x)=F(x)-F(b)=\int_a^x\frac{dr}{p(r)}-\int_a^b\frac{dr}{p(r)}=\int_b^x\frac{dr}{p(r)}$$

Отсюда функция Грина для типа задачи 1, согласно [1], будет:

$$G_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{M_1(x)M_2(t)}{p(t)W(t)}, & a\le x\le t\\ \dfrac{M_1(t)M_2(x)}{p(t)W(t)}, & t<x\le b.\end{cases}$$

Здесь Вронскиан:

$$W(t)=\begin{Vmatrix}M_1(t) & M_2(t)\\ M_1'(t) & M_2'(t)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}M_1(t) & M_2(t)\\ \dfrac{1}{p(t)} & \dfrac{1}{p(t)}\end{Vmatrix}=\frac{1}{p(t)}(M_1(t)-M_2(t)).$$

С учетом представления функций $M_1(x)$ и $M_2(x)$ получаем:

$$M_1(t)-M_2(t)=\int_a^t\frac{dr}{p(r)}-\int_b^t\frac{dr}{p(r)}=\int_a^b\frac{dr}{p(r)}.$$

Используя вид функций $M_1(x)$ и $M_2(x)$, получаем $G_1(x,t)$ как в (5). Также для задачи 2 после дифференцирования имеем краевую задачу:

$$q'(y)N'(y)+q(y)N''(y)=0, \quad N(c)=N(d)=0,\ y\in[c,d]$$

и, действуя аналогично как с $G_1(x,t)$, получаем для $G_2(y,s)$ вид (6). Тем самым **теорема 2 доказана.**

Идентификация значения Лапласиана

Рассмотрим обратную задачу идентификации правой части для уравнения Пуассона с оператором Лапласа в полярных координатах $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ при $0<r_1\le r\le r_2$ и $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ с нулевыми граничными условиями и дважды непрерывно дифференцируемой $u(r,\varphi)$:

$$\Delta u(\rho,\varphi)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=z(r,\varphi). \tag{8}$$

Тогда идентификация $z(r,\varphi)$ будет рассматриваться на прямоугольной области $[r_1,r_2;\varphi_1,\varphi_2]$ и к ней применимы теоремы 1 и 2. Для удобства использования этих теорем преобразуем равенство (8) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=rz(r,\varphi)$$

и заменим r на $x \in [a,b]$, а φ на $y \in [c,d]$ с однородными краевыми условиями: $u(x,c) = u(x,d) = u(a,y) = u(b,y) = 0$. Здесь $[a,b] = [r_1, r_2]$, а $[c,d] = [\varphi_1, \varphi_2]$. Отсюда получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xz(x,y). \tag{9}$$

Функция Грина для задачи $\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$ при $u(a,y) = u(b,y) = 0$ и $p(x) = x$ с применением равенства (5) имеет вид:

$$G_1(x,\mathrm{t}) == \begin{cases} \dfrac{\ln\frac{x}{a}\ln\frac{t}{b}}{\ln\frac{b}{a}}, & a \le x \le t \text{ и равно } \dfrac{\ln\frac{t}{a}\ln\frac{x}{b}}{\ln\frac{b}{a}}, \quad t < x \le b. \end{cases} \tag{10}$$

Для задачи $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ при $u(x,c) = u(x,d) = 0$, где $q(y) \equiv 1$ функция Грина с применением равенства (6) имеет вид:

$$G_2(y,s) == \begin{cases} \dfrac{(y-c)(s-d)}{d-c} & \text{при} \quad c \le y \le s \\ \dfrac{(s-c)(y-d)}{d-c} & \text{при} \quad s \le y \le d \end{cases} \tag{11}$$

Сведем теперь обратную задачу идентификации правой части для уравнения Пуассона с оператором Лапласа при нулевых значениях на границе к двухмерному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода.

Теорема 3. Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xz(x,y), \tag{12}$$

при $u(x,c) = u(x,d) = u(a,y) = u(b,y) = 0$ приводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода:

$$\int_c^d \int_a^b G(x,y,t,s)tz(t,s)dtds = P(x,y), \tag{13}$$

с ядром $G(x,y,t,s) = G_1(x,t)G_2(y,s)$ и правой частью

$$P(x,y) = \int_a^b \frac{1}{t} G_1(x,t)u(t,y)dt + \int_c^d G_2(y,s)u(x,s)ds, \tag{14}$$

где $G_1(x,t)$ – функция Грина краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial M(x)}{\partial x}\right) = 0, \quad M(a) = M(b) = 0,$$

а $G_2(y,s)$ – для краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0, \quad Q(a) = Q(b) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим (12) для однородных краевых условий на функцию $u(x,y)$. Выделим один из членов левой части. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) = xz(x,y) - \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)$$

Применяя функцию Грина $G_1(x,t)$ по x, получаем:

$$u(x,y) = \int_a^b G_1(x,t)\left[tz(t,y) - \frac{1}{t}\left(\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}\right)\right]dt. \tag{15}$$

Используя дифференцирование по параметру под интегралом, имеем:

$$\int_a^b G_1(x,t)\frac{1}{t}\left(\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}\right)dt = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_a^b \frac{1}{t}G_1(x,t)u(t,y)dt$$

Поскольку $u(t,c) = u(t,d) = 0$, то функция

$$Q(x,y) = \int_a^b \frac{1}{t}G_1(x,t)u(t,y)dt$$

удовлетворяет нулевым краевым условиям по y на $[c,d]$. Тогда, применяя в (15) функцию Грина $G_2(y,s)$ по y, получаем равенство:

$$\int_c^d G_2(y,s)u(x,s)ds = \int_c^d \int_a^b G_2(y,s)G_1(x,t)tz(t,s)dtds - \int_a^b \frac{1}{t}G_1(x,t)u(t,y)dt.$$

Отсюда имеем двухмерное уравнение Фредгольма 1-ого рода для $z(s,t)$:

$$\int_c^d \int_a^b G_1(x,t)G_2(y,s)tz(t,s)dtds = P(x,y)$$

с функцией

$$P(x,y) = \int_a^b \frac{1}{t}G_1(x,t)u(t,y)dt + \int_c^d G_2(y,s)u(x,s)ds.$$

Здесь ядром интегрального уравнения Фредгольма 1-ого рода является функция $G(x,y,t,s) = tG_1(x,t)G_2(y,s)$. **Теорема 3 доказана.**

Замечание. Приведем теперь интегральное уравнение для задачи идентификации значения Лапласиана в переменных r,φ . Заменим здесь $x = r$ и $y = \varphi$, а также $a = r_1$, $b = r_2$, $c = \varphi_1$, $d = \varphi_2$ в равенствах (13), (14) и функциях Грина $G_1(x,t)$ в (10) и $G_2(y,s)$ в (11). Тогда получаем интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с учетом $u_\delta(r,\varphi) \approx u(r,\varphi)$:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} G_1(r,t)G_2(\varphi,s)tz_\delta(t,s)dtds = P_\delta(r,\varphi)$$

с функцией

$$P_\delta(r,\varphi) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{t}G_1(r,t)u_\delta(t,\varphi)dt + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} G_2(\varphi,s)u_\delta(r,s)ds.$$

Здесь в системе координат r,φ функция $z_\delta(r,\varphi) \approx z(r,\varphi)$ – точное решение задачи идентификации значения оператора Лапласа. Но поскольку полученное уравнение Фредгольма первого рода представляет некорректную задачу [3], то здесь целесообразно применять методы регуляризации, например, изложенные в [1; 5].

Список литературы

1. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наукова Думка, 1986. 544 с.
2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М. : Наука, 1984. 264 с.
3. *Тихонов А. Н., Арсенин. В. Я.* Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1986. 286 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1972. 735 с.
5. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов [и др.]. М. : Наука, 1990. 231 с.

Application of an integral equation of the first kind to identify the value of a differential operator

A. L. Kalashnikov
PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Lobachevsky National Research Nizhny Novgorod State University. Russia, Nizhny Novgorod. E-mail: allk123@yandex.ru

Abstract. In applied mathematics, it is necessary to solve partial differential equations, for example, in problems of mathematical physics with boundary conditions, initial conditions, and the right side of the differential operator. Such problems belong to the class of indirect ones and are characterized by specifying causes, and their solutions are consequences that are found from an equation with known parameters. The paper deals with the inverse stationary problem of identifying the value of a second-order linear partial differential operator under homogeneous boundary conditions on the border of a rectangle and a known approximate solution given, for example, analytically or discretely. If the numerical differentiation problem is incorrect, direct substitution of such a solution in the differential operator will lead to a large error in its value. This paper uses a sequential method of Green functions, which is applied to individual differential operators included in the original one, and it is not necessary to find the green function for the entire differential operator. This makes it easier to reduce the inverse boundary value problem to a two-dimensional integral equation of the first kind, for which there are well-developed regularization methods.

Keywords: differential operator, identification, Green functions, integral equation of the first kind.

References

1. *Verlan' A. F., Sizikov V. S. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev. Naukova Dumka. 1986. 544 p.

2. *Romanov V. G. Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. M. Nauka. 1984. 264 p.

3. *Tihonov A. N., Arsenin. V. Ya. Metody resheniya nekorrektnyh zadach* [Methods for solving incorrect problems]. M. Nauka. 1986. 286 p.

4. *Tihonov A. N., Samarskij A. A. Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. M. Nauka. 1972. 735 p.

5. *Chislennye metody resheniya nekorrektnyh zadach* – Numerical methods for solving ill-posed problems / A. N. Tikhonov [et al.]. M. Nauka. 1990. 231 p.