УДК 517.962.27 DOI 10.25730/VSU.0536.20.009

О применении рекуррентных уравнений в курсе Марковских цепей

Т. В. Облакова
кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана. Россия, г. Москва. E-mail: obltvu@bmstu.ru

Аннотация. В статье предложен новый методический подход к изложению основ теории рекуррентных уравнений как частного случая разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Прослежены и сформулированы основные параллели между методами поиска точных решений рекуррентных уравнений и линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, включающие постановку задачи, использование характеристического уравнения, поиск частных решений неоднородных уравнений с правой частью специального вида. Продемонстрированы преимущества предлагаемой методики поиска точных решений в курсе теории случайных процессов применительно к исследованию и решению систем рекуррентных уравнений. Рассмотрены примеры применения в различных задачах теории Марковских цепей с дискретным временем и дискретным множеством состояний, таких как вычисление вероятностей и среднего времени достижения некоторого подмножества состояний.

Ключевые слова: рекуррентные уравнения, общие и частные решения, Марковская цепь, вероятности достижения.

Широкое внедрение компьютеров и математических пакетов в учебную и профессиональную деятельность математиков поставило перед научным и преподавательским сообществом задачу пересмотра не только методики преподавания математики, но и корректировки базового перечня математических дисциплин. Если в докомпьютерную эпоху основой математической подготовки как математиков, так и инженеров являлся математический анализ и дифференциальные уравнения, то на современном этапе все большую роль играют такие разделы, как дискретная математика и численные методы.

Этот крен в сторону большей значимости дискретных моделей приводит к тому, что многие курсы – в особенности прикладного характера – на самой ранней стадии изложения вводят не только дифференциальную модель, но и как минимум параллельно рассматривают соответствующую разностную [5].

В русскоязычной литературе эта тенденция только обозначилась, а за рубежом наряду с курсами дифференциальных уравнений существуют курсы разностных уравнений [4]. Рекуррентные уравнения иногда рассматриваются в расширенных курсах дискретной математики [3], дифференциальных уравнений, даже в научно-популярных работах [1], однако места для систематического изложения этого интересного и полезного раздела пока не найдено.

В данной работе предлагается подход к изложению основ теории рекуррентных уравнений на основе аналогии со стандартным материалом из курса линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Продемонстрированы преимущества поиска точных решений на основе изложенной методики применительно к решению систем рекуррентных уравнений в теории Марковских цепей.

Постановка задачи. Одной из простейших задач на рекуррентные уравнения является задача о вычислении явной формулы для n-го члена последовательности Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{1}$$

$$a_0 = a_1 = 1 \tag{2}$$

Легко заметить, что $a_n = \lambda^n$ удовлетворяет уравнению (1), если только λ является корнем (характеристического) уравнения $\lambda^2 = \lambda + 1$. Поскольку у квадратного уравнения имеются два корня $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, то получаем с учетом линейности так называемое общее решение (1)

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3}$$

Подстановка в формулу (3) начальных условий (2) позволяет найти коэффициенты A и B:

$$n = 0 \Longrightarrow 1 = A + B$$

$$n = 1 \Longrightarrow 1 = A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

В итоге получаем известную формулу общего члена последовательности Фибоначчи:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Если же при изложении некоторого раздела требуется решать много рекуррентных уравнений, как однородных, так и неоднородных то разумнее создать некоторую теоретическую базу. Для учебных целей в большинстве случаев достаточно рассмотреть уравнения второго порядка

$$ay_{k+1} + by_k + cy_{k-1} = f_k, k = 1, 2, \dots, \qquad (4)$$

связывающие соседние значения неизвестной последовательности $\{y_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$, посредством известных постоянных коэффициентов a, b, c и известной последовательности f_k.

В случае $f_k \equiv 0$ уравнение (4) становится однородным.

Точные решения рекуррентных уравнений второго порядка. **В** курсе дифференциальных уравнений достаточно подробно рассматриваются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Основные утверждения из этого раздела легко переносятся на дискретный случай с естественной заменой показательной функции $y = e^{\lambda x}$ на степень с переменным показателем λ^k.

Представим для наглядности несколько основных параллелей в виде таблицы.

Таблица 1

Параллели между рекуррентными и дифференциальными уравнениями

	Дифференциальное уравнение 2-го порядка	Рекуррентное уравнение 2-го порядка
Однородное уравнение	$ay'' + by' + cy = 0$	$ay_{k+1} + by_k + cy_{k-1} = 0$
Характеристическое уравнение	$y = e^{\lambda_0 x}$ – решение $\Leftrightarrow$ $\lambda = \lambda_0$ – корень $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$	$y_k = \lambda_0^k$ – решение $\Leftrightarrow$ $\lambda = \lambda_0$ – корень $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
Общее решение однородного уравнения в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$	$y_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k$
Общее решение для кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2$	$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$	$y_k = (C_1 + C_2 k)\lambda_1^k$
Граничные условия (Задача Коши)	$y(0) = A, y'(0) = B$	$y_0 = A, y_1 = B$
Граничные условия (Краевая задача)	$y(0) = A, y(N) = B$	$y_0 = A, y_N = B$
Неоднородное уравнение	$ay'' + by' + cy = f(x)$, $f(x)$ – известная функция	$ay_{k+1} + by_k + cy_{k-1} = f_k$, f_k – известная последовательность
Общее решение неоднородного уравнения	$y(x) = y^{\text{одн}}(x) + \tilde{y}(x)$ $\tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения	$y_k = y_k^{\text{одн}} + y_k^{\text{ч}}$ $y_k^{\text{ч}}$ – частное решение неоднородного уравнения
Вид частного решения для правой части специального вида (общий случай)	Если α не является корнем характеристического уравнения $f(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow$ $\tilde{y}(x) = Ae^{\alpha x}$	Если α не является корнем характеристического уравнения $f_k = \alpha^k \Longrightarrow y_k^{\text{ч}} = A\alpha^k$
Правая часть специального вида (случай резонанса 1)	Если α является корнем характеристического уравнения кратности 1 $f(x) = e^{\alpha x} \Longrightarrow$ $\tilde{y}(x) = Axe^{\alpha x}$	Если α является корнем характеристического уравнения кратности 1 $f_k = \alpha^k \Longrightarrow y_k^{\text{ч}} = Ak\alpha^k$
Правая часть специального вида (случай резонанса 2)	Если α является корнем характеристического уравнения кратности 2 $f(x) = e^{\alpha x} \Longrightarrow$ $y_{\text{ч}} = Ax^2 e^{\alpha x}$	Если α является корнем характеристического уравнения кратности 2 $f_k = \alpha^k \Longrightarrow y_k^{\text{ч}} = Ak^2\alpha^k$

Две теоремы из теории Марковских цепей. Рассмотрим однородную Марковскую цепь $\{\xi_n\}, n = 0, 1, \dots$ со множеством состояний $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, пусть $P = (p_{ij})$ – матрица переходных вероятностей этой цепи. Если в момент времени k цепь находится в состоянии S_i, то кратко записываем этот факт как $\xi_k = i$. Выделим некоторое подмножество состояний $A = \{S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_l}\}, l < m$. Для удобства обозначений перенумеруем состояния так, чтобы $A = \{S_1, S_2, \dots, S_l\}$. Если цепь в момент времени k находится в одном из состоянии S_i, $i = \overline{1, l}$, то пишем $\xi_k \in A$.

Введем обозначения:

$H^A = \inf\{n \geq 0 : \xi_n \in A\}$ – момент первого достижения подмножества состояний A,

$h_k^A = P(H^A < \infty | \xi_0 = k)$ – вероятность когда-либо достичь подмножества A из состояния S_k,

$\mu_k^A = M(H^A | \xi_0 = k)$ – среднее время достижения подмножества A из состояния S_k.

Приведем две теоремы о вычислении h_k^A и μ_k^A [2].

Теорема 1 (о вероятностях достижения подмножества состояний). Если $A \subset \mathcal{S}$ – некоторое подмножество состояний, то вероятности h_k^A являются минимальными неотрицательными решениями системы:

$$\begin{cases} h_k^A = 1, S_k \in A & (5) \\ h_k^A = \sum_{j=1}^{m} p_{kj} h_k^A, S_k \notin A & (6) \end{cases}$$

Теорема 2 (о средних временах достижения множества состояний). Если $A \subset \mathcal{S}$, то величины μ_k^A являются минимальными неотрицательными решениями системы:

$$\begin{cases} \mu_k^A = 0, S_k \in A & (7) \\ \mu_k^A = 1 + \sum_{j=l+1}^{m} p_{kj} \mu_k^A, S_k \notin A & (8) \end{cases}$$

При известной матрице $P = (p_{ij})$ уравнения (6) и (8) представляют собой рекуррентные соотношения, связывающие члены неизвестных последовательностей h_k^A и μ_k^A , а равенства (5) и (7) представляют собой варианты граничных условий: $n + 1$.

Примеры применения.

1. Рассмотрим процесс рождения и гибели, задаваемый графом, изображенным на рисунке 1. Здесь индекс состояния S_j совпадает с численностью популяции. За один шаг с вероятностью p в популяцию добавляется новая особь, с вероятностью $1 - p$ одна из особей гибнет.

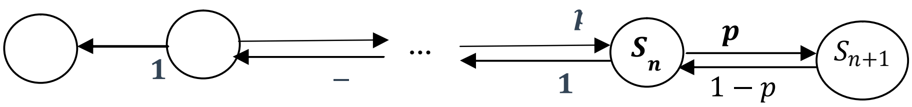

Рис. 1

Найдем вероятность h_k вырождения популяции, если в начальный момент времени ее численность составляет k особей. Для наглядности выпишем матрицу переходных вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1-p & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & & & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда система $(5) - (6)$ для вероятностей h_k достижения состояния вырождения S_0 при старте из состояния S_k приобретает вид

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = (1-p)h_0 + ph_2 \\ h_2 = (1-p)h_1 + ph_3 \\ \dots. \\ h_k = (1-p)h_{k-1} + ph_{k+1} \\ \dots. \end{cases} . \qquad (9)$$

Для нахождения точных решений системы (9) рассмотрим характеристическое уравнение $p\lambda^2 - \lambda + (1 - p) = 0$. Его корни действительные, поскольку дискриминант неотрицателен:

$$D = 1 - 4p(1 - p) = (2p - 1)^2 \geq 0.$$

В случае $\boldsymbol{p} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ собственные значения равны $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \frac{1-p}{p} > 1$, что дает общее решение: $h_k = c + d\left(\frac{1-p}{p}\right)^k$. В силу вероятностного смысла задачи $(0 \leq h_k \leq 1)$ постоянная d не может быть ни положительной, ни отрицательной. Следовательно, $d = 0$, а очевидное начальное условие $h_0 = 1$ приводит к $c + d = 1$, или $c = 1$. Откуда все $h_k = 1$, что означает вырождение популяции в вероятностью 1?

Если $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$, то имеем случай кратных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, что приводит к решению $h_k = c + dk$, и аналогично предыдущему случаю получаем вырождение популяции: $h_k = 1$.

Если же $\boldsymbol{p} > \frac{1}{2}$. то $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1-p}{p} < 1$, получаем $h_k = c + d\left(\frac{1-p}{p}\right)^k$. Найдем минимальные решения:

$$h_0 = 1 \Rightarrow c + d = 1 \Rightarrow d = 1 - c \Rightarrow$$
$$c + d\left(\frac{1-p}{p}\right)^k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k + c\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right) \geq \left(\frac{1-p}{p}\right)^k = h_k.$$

Таким образом, вероятность вырождения популяции в этом случае равна $h_k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$ и уменьшается с ростом k.

Далее найдем среднее время вырождения популяции μ_k, если в начальный момент ее численность составляет k особей. Выпишем систему (8) для рассматриваемого процесса:

$$\begin{cases} \mu_0 = 0 \\ \mu_1 = 1 + (1-p)\mu_0 + p\mu_2 = 1 + p\mu_2 \\ \mu_k = 1 + (1-p)\mu_{k-1} + p\mu_{k+1}, k \geq 2 \end{cases} \quad (10)$$

Если $p \neq 1/2$, то неоднородное уравнение (10) имеет частное решение вида $\mu_k^{ч} = C \cdot k$. Постоянная C легко вычисляется:

$$C \cdot k = 1 + (1-p)C(k-1) + pC(k+1),$$
$$C \cdot k = 1 + Ck - C + pC(k + 1 - k + 1),$$
$$C = \frac{1}{1-2p}.$$

Следовательно, общее решение (10) записывается в виде:

$$\mu_k = a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^k + \frac{k}{1-2p}.$$

Начальное условие $\mu_0 = 0$ дает $a + b = 0$.

В случае $p < \frac{1}{2}$ наименьшее неотрицательное решение получаем при $b = 0$:

$$\mu_k = a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^k + \frac{k}{1-2p} = b\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - 1\right) + \frac{k}{1-2p} \geq \frac{k}{1-2p}$$

Таким образом, среднее время вырождения популяции $\mu_k = \frac{k}{1-2p}$ прямо пропорционально ее численности в начальный момент.

Если же $\boldsymbol{p} > \frac{1}{2}$, то $2p - 1 > 0$, $\frac{1-p}{p} < 1$ и, следовательно,

$$\mu_k = a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^k + \frac{k}{1-2p} = a\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right) - \frac{k}{2p-1}.$$

Неотрицательно только при $a = \infty$, что значит $\mu_k = \infty$ при всех $k \geq 1$.

В случае $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$ получается аналогичный результат. Уравнение (10) имеет частное решение вида $\mu_k^{ч} = C \cdot k^2$, причем подстановка дает отрицательное значение C: $C \cdot k^2 = 1 + \frac{1}{2}C(k-1)^2 + \frac{1}{2}C(k+1)^2, C = -1$. Тогда общее решение (10) имеет вид $\mu_k = a + bk - k^2$, и поскольку из условия $\mu_0 = 0$ следует $a = 0$, то необходимо $b = \infty$, что приводит к бесконечному среднему времени вырождения популяции $\mu_k = \infty$ при $k \geq 1$.

2. Рассмотрим случайное блуждание на бесконечной решетке вида $\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$. Из вершин вида $(k, 2)$ частица за один шаг перемещается вправо или влево с вероятностью $1/2$, из вершин вида $(k, 1)$ – вверх с вероятностью $1/2$ и вправо, влево или вниз с вероятностями $1/6$, из вершин вида $(k, 0)$ – с вероятностью 1 влево, если k четно, и вправо, если k нечетно. Найдем вероятности h_k попадания в (0,0) из вершин $(k, 1)$. По условию задачи в вершину (0,0) можно попасть из соседней с ней вершины (0,1) среднего ряда и вершины $(-1{,}0)$, расположенной слева, при этом совокупность (0,0) и $(-1{,}0)$ образуют поглощающее множество состояний. Рассмотрим на рисунке 2 часть графа, смежную с (0,0).

Из соображений симметрии заключаем, что $h_{-k-1} = h_k$, также для $k \geq 1$ можем записать $h_k = \frac{1}{6}h_{k+1} + \frac{1}{6}h_{k-1}$, в то время как для вершины (0,1) соответствующая вероятность h_0 очевидно удовлетворяет соотношению $h_0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}h_1 + \frac{1}{6}h_{-1}$, причем по общему свойству $h_{-1} = h_0$. Найдем общее решение полученного уравнения: $h_k = \frac{1}{6}h_{k+1} + \frac{1}{6}h_{k-1}$.

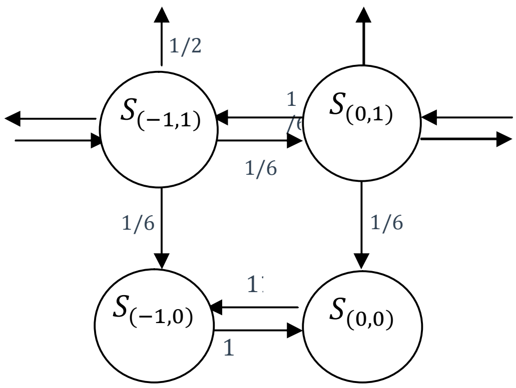

Рис. 2

Из соображений симметрии заключаем, что $h_{-k-1} = h_k$, также для $k \geq 1$ можем записать $h_k = \frac{1}{6}h_{k+1} + \frac{1}{6}h_{k-1}$, в то время как для вершины (0,1) соответствующая вероятность h_0 очевидно удовлетворяет соотношению $h_0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}h_1 + \frac{1}{6}h_{-1}$, причем по общему свойству $h_{-1} = h_0$. Найдем общее решение полученного уравнения: $h_k = \frac{1}{6}h_{k+1} + \frac{1}{6}h_{k-1}$.

Перепишем характеристическое уравнение $\lambda = \frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{1}{6}$ в виде

$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ и найдем корни $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$.

В общем решении $h_k = A\left(3+\sqrt{8}\right)^k + B\left(3-\sqrt{8}\right)^k$ в силу вероятностного смысла задачи нужно оставить только второе слагаемое, поскольку $\left(3+\sqrt{8}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

Из системы $\begin{cases} h_1 = \frac{1}{6}h_2 + \frac{1}{6}h_0 \\ h_0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}h_1 + \frac{1}{6}h_0 \end{cases}$ находим постоянную B и вероятности h_k:

$\begin{cases} 6h_1 = h_2 + h_0 \\ 5h_0 = 1 + h_1 \end{cases}, \begin{cases} 30h_1 = 5h_2 + 5h_0 \\ 5h_0 = 1 + h_1 \end{cases}, \begin{cases} 30h_1 = 5h_2 + 1 + h_1 \\ 5h_0 = 1 + h_1 \end{cases}, 29h_1 - 5h_2 = 1,$

$$29B\left(3-\sqrt{8}\right) - 5\left(3-\sqrt{8}\right)^2 = 1,\ B = \frac{1}{2+\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(3-\sqrt{8}\right) = \frac{5\sqrt{2}-7}{2},\ h_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Таким образом, для любого $k \geq 0$ получаем $h_k = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(3-\sqrt{8}\right)^k$.

Численно, $h_0 = h_{-1} \approx 0.2071$, $h_1 = h_{-2} \approx 0.0355$, $h_2 = h_{-3} \approx 0.0061$ и так далее.

3. Из лаборатории поступают две независимые последовательности наблюдений $Y_1, Y_2, \dots$ и $Z_1, Z_2, \dots$. Они представляют собой результаты испытаний Бернулли с неизвестными вероятностями успеха p и q соответственно. Для того чтобы решить, какая из вероятностей больше, применяется следующий критерий. Выбирается натуральное число M и наблюдения продолжаются до такого момента времени n, когда впервые

$$\sum_{k=1}^{n}(Y_k - Z_k) = M$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}(Y_k - Z_k) = -M$$

В первом случае мы принимаем решение о том, что $p > q$, во втором наоборот.

Найдем вероятность принять ошибочное решение, если на самом деле $p > q$ (ошибка второго рода). Для этого определим на множестве состояний

$$\{-M, -M+1, \dots, M-1, M\}$$

Марковскую цепь $X_n = \sum_{k=1}^{n}(Y_k - Z_k)$ с переходными вероятностями

$$p_{i,i+1} = p(1-q),$$
$$p_{i,i-1} = q(1-p),$$
$$p_{i,i} = 1 - p(1-q) - q(1-p),$$
$$i = -M+1, \dots, M-1$$

и поглощающими состояниями M и $-M$.

Для решения задачи нам нужно найти вероятность h_0 достижения состояния $-M$ из нулевого состояния, если $p > q$. Пусть h_i– вероятность достижения состояния $-M$ из состояния i. Тогда

$$\begin{cases} h_{-M} = 1 \\ h_i = p_{i,i+1}h_{i+1} + p_{i,i}h_i + p_{i,i-1}h_{i-1}, \\ -M+1 \le i \le M-1 \\ h_M = 0 \end{cases}$$

Подставляя переходные вероятности, получаем рекуррентное соотношение

$$0 = p(1-q)h_{i+1} - [p(1-q) + q(1-p)]h_i + q(1-p)h_{i-1}$$

Корнями характеристического уравнения

$$0 = p(1-q)\lambda^2 - [p(1-q) + q(1-p)]\lambda + q(1-p)$$

будут $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \frac{q(1-p)}{p(1-q)} = \alpha < 1$. Из общего решения $h_i = A + B\alpha^i$ находим постоянные, подставляя краевые условия:

$$i = -M \Longrightarrow 1 = A + B\alpha^{-M}$$
$$i = M \Longrightarrow 0 = A + B\alpha^{M}$$

Откуда $B = \frac{1}{\alpha^{-M} - \alpha^M}$, $A = \frac{-\alpha^M}{\alpha^{-M} - \alpha^M}$, $h_i = \frac{\alpha^i - \alpha^M}{\alpha^{-M} - \alpha^M}$. В частности,

$$h_0 = \frac{1-\alpha^M}{\alpha^{-M} - \alpha^M} = \frac{1}{1+\alpha^{-M}}.$$

3.4. Рассмотрим матрицу $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ и вычислим P^n.

Обозначим $p_{11}^{(n)}$ – элемент матрицы P^n, стоящий в первой строке и первом столбце. Тогда из соотношения $P^n = P^{n-1}P$ находим

$$p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)}(1-\alpha) + p_{12}^{(n-1)}\beta$$

В силу стохастичности любой степени стохастической матрицы $p_{12}^{(n-1)} = 1 - p_{11}^{(n-1)}$, откуда устанавливаем рекуррентную связь между $p_{11}^{(n)}$ и $p_{11}^{(n-1)}$:

$$p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)}(1-\alpha-\beta) + \beta \tag{11}$$

Неоднородное рекуррентное уравнение первого порядка (11) имеет общее решение: $p_{11}^{(n)} = A(1-\alpha-\beta)^n + p_ч$, где A – произвольная постоянная , а $p_ч$ – частное решение уравнения (11). Найдем $p_ч = C$:

$$C = C(1-\alpha-\beta) + \beta, C = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = p_ч, \text{ откуда}$$

$$p_{11}^{(n)} = A(1-\alpha-\beta)^n + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \tag{12}$$

Подставим в (12) $n = 0$ и с учетом $p_{11}^{(0)} = 1$ найдем $A = 1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (подстановка $n = 1$ дает тот же результат). Итак,

$$p_{11}^{(n)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Аналогично $p_{22}^{(n)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Остальные элементы находим из условия стохастичности матрицы:

$$p_{12}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n - \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n$$

$$p_{21}^{(n)} = 1 - p_{22}^{(n)} = 1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n$$

Тогда $P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$.

5. Пролет лестницы состоит из N ступенек. Лягушка, начиная движение от подножия лестницы, пытается взобраться на верхнюю ступень, совершая серию независимых прыжков со случайным исходом. Если лягушка находится на n-й ступеньке, то в результате прыжка она с одинаковыми вероятностями $\alpha, 0 < \alpha < 1/2$, перемещается на $(k-1)$ или на $(k+1)$ ступень, а с вероятностью $1-2\alpha$ остается на той же ступени. Если лягушка находится внизу лестницы, то в результате прыжка она с вероятностью β перемещается на первую ступеньку, а с вероятностью $(1-\beta)$ остается на прежнем месте. Найдите математическое ожидание числа прыжков до достижения верхнего положения.

Выпишем систему (7)–(8) для математического ожидания μ_k времени достижения верхней ступени, если движение начинается с -й ступеньки:

$$\begin{cases} \mu_N = 0 \\ \mu_0 = 1 + \beta\mu_1 + (1-\beta)\mu_0 \\ \mu_k = 1 + \alpha\mu_{k-1} + \alpha\mu_{k+1} + (1-2\alpha)\mu_k, \\ 1 \leq k \leq N-1 \end{cases} \tag{13}$$

После упрощения уравнение (13) можно переписать в виде:

$$\alpha\mu_{k+1} - 2\alpha\mu_k + \alpha\mu_{k-1} + 1 = 0. \tag{14}$$

Соответствующее характеристическое уравнение $\alpha\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = 1$, поэтому общее решение уравнения (14) имеет вид

$\mu_k = A + Bk + C \cdot k^2$, где $\mu_k^{\text{ч}} = C \cdot k^2$ – частное решение.

Сначала найдем постоянную C:

$$\alpha C(k+1)^2 - 2\alpha Ck^2 + \alpha C(k-1)^2 + 1 = 0, C = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Затем подставим краевые условия:

$$\mu_k = A + Bk - \frac{1}{2\alpha}k^2$$

$$k = N \Longrightarrow 0 = A + BN - \frac{1}{2\alpha}N^2$$

$$k = 0 \Longrightarrow 0 = 1 + \beta\left(A + B - \frac{1}{2\alpha}\right) - \beta A.$$

Решаем систему и находим μ_k:

$$\begin{cases} A + BN - \frac{1}{2\alpha}N^2 = N \\ \beta\left(B - \frac{1}{2\alpha}\right) + 1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} A = \frac{1}{2\alpha}N^2 - \frac{N}{2\alpha} + \frac{N}{\beta} \\ B = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\beta} \end{cases}, \mu_k = \frac{N^2-k^2}{2\alpha} - \frac{N-k}{2\alpha} + \frac{N-k}{\beta}.$$

В частности, искомое среднее время равно $\mu_0 = \frac{N(N-1)}{2\alpha} + \frac{N}{\beta}$.

Заключение. Изложенная методика поиска точных решений рекуррентных уравнений, как следует из разобранных примеров, не выдвигает чрезмерных требований к математической подготовке студентов, естественным образом распространяется на уравнения более высокого порядка и может найти свое применение и в других разделах математики.

Список литературы

1. *Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.* Комбинаторика. М. : ФИМА, МЦНМО, 2006. 400 с.
2. *Кельберт М. Я., Сухов Ю. М.* Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. М. : МЦНМО, 2010. 560 с.
3. *Селезнева С. Н.* Лекции по «Избранным вопросам дискретной математики». URL: http://mk.cs.msu.ru/images/6/6d/Dm_lection8.pdf.
4. *Lakshmikanthan V., Trigiante D.* Theory of difference equations: Numerical Methods and Applications. CRC Press, 2002. 2nd edition. 320 p.
5. *Sergey S. Stepanov.* Stochastic World, Springer, 2013. ISBN-10: 3319000705. 370 p.

On the application of recurrent equations in the course of Markov chains

T. V. Oblakova
PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Bauman Moscow State Technical University.
Russia, Moscow. E-mail: obltvu@bmstu.ru

Abstract. The article presents a new methodological approach to the presentation of the foundations of the theory of recurrent equations as a special case of difference equations with constant coefficients. The main parallels between methods of searching for exact solutions of recurrent equations and linear differential equations with constant coefficients are traced and formulated. These methods include the problem statement, the use of a characteristic equation, and the search for partial solutions of inhomogeneous equations with the right part of a special form. The advantages of the proposed method of searching for exact solutions in the course of the theory of random processes in relation to the study and solution of systems of recurrent equations are demonstrated. Examples of applications of the theory of Markov chains with discrete time and a discrete set of states, such as the calculation of probabilities and the average time to reach a certain subset of states, are considered in various problems.

Keywords: recurrent equations, general and particular solutions, Markov chain, probabilities of achievement.

References

1. *Vilenkin N. Ya., Vilenkin A. N., Vilenkin P. A. Kombinatorika* [Combinatorics]. M. FIMA, Moscow Center for continuing mathematical education. 2006. 400 p.

2. *Kel'bert M. Ya., Suhov Yu. M. Markovskie cepi kak otpravnaya tochka teorii sluchajnyh processov i ih prilozheniya* [Markov chains as a starting point of the theory of random processes and their applications]. M. Moscow Center for continuing mathematical education. 2010. 560 p.

3. *Selezneva S. N. Lekcii po "Izbrannym voprosam diskretnoj matematiki"* [Lectures on "Selected issues of discrete mathematics"]. Available at: http://МК.ЗС.МСУ.ру/картинки/6/6д/Dm_lection8.формат PDF.

4. *Lakshmikanthan V., Trigiante D*. Theory of difference equations: Numerical Methods and Applications. CRC Press, 2002. 2nd edition. 320p.

5. *Sergey S. Stepanov.* Stochastic World, Springer, 2013. ISBN-10: 3319000705. 370 p.