УДК 517.983 DOI 10.25730/VSU.0536.20.004

Апостериорная погрешность приближенного решения операторного линейного уравнения. Пример: уравнение в частных производных гиперболического типа

В. А. Онегов

кандидат физико-математических наук, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: netadresa2@mail.ru

Аннотация. В первой части этой статьи рассматривается общий подход к построению апостериорной оценки погрешности приближенного решения линейного операторного уравнения.

Вторая часть посвящена подробной реализации изложенного общего подхода к построению апостериорной погрешности к дифференциальному уравнению гиперболического типа.

Ключевые слова: операторное уравнение, приближенное решение, априорная погрешность, апостериорная погрешность, ограниченный линейный оператор, дифференциальное уравнение гиперболического типа, задачи для уравнения гиперболического типа, функция Грина.

В вычислительной математике существуют две связанные задачи: нахождение приближенного решения некоторого уравнения и оценка погрешности полученного приближенного решения – при этом к решению второй задачи имеют место два подхода.

При первом подходе используется специфика приближенного метода, с помощью которого было получено это приближенное решение. При этом подходе в окончательную оценку входит точное решение исследуемого уравнения. Ясно, что такая оценка погрешности (априорная) имеет лишь теоретическое значение и дает представление о качестве использованного приближенного метода.

Во втором подходе считается, что метод получения приближенного решения может быть неизвестен. При построении такой оценки погрешности (апостериорной) используются только свойства рассматриваемого уравнения. Получаемая при этом оценка погрешности гарантирована. Понятна практическая ценность такой оценки.

В первой части рассматривается построение апостериорной оценки погрешности линейного операторного уравнения. Во второй части этот же подход реализуется на одной из задач для уравнения в частных производных гиперболического типа.

Часть I. Рассмотрим операторное уравнение

$$Px = y, \tag{1}$$

где $P\colon R \to S$, $R \subset X$, $S \subset Y$. Пространства X и Y – полные нормированные пространства (Банаха). Ясно, что $x \in R$, а $y \in S$.

Будем считать оператор P линейным.

Приведем без доказательств несколько важных свойств линейного оператора (см. [1; 2]).

1) Оператор P называется линейным, если из соответствия $Px_j = y_j$, $x_j \in R$, $y_j \in S$, $(j = 1, 2)$ следует, что

$$P(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1y_1 + c_2y_2,\ c_1x_1 + c_2x_2 \in R,\ c_1y_1 + c_2y_2 \in S,$$

где c_j – элементы числового поля K.

2) Оператор P называется ограниченным, если имеет место

$$\|Px_1 - Px_2\| \le A \cdot \|x_1 - x_2\|,$$

где $x_1, x_2 \in R$, A – положительная постоянная.

Отметим, что наименьшее значение постоянной A в последнем неравенстве называется нормой оператора P и обозначается $\|P\|$.

3) Если оператор P обладает свойством биекции, то существует обратный оператор $P^{-1}\colon S \to R$, оператор P^{-1} тоже линеен.

Итак, пусть в уравнении (1) оператор P – линейный, ограниченный, обладающий свойством биекции (каждому элементу $x \in R$ соответствует один элемент $y \in S$ и наоборот). Из свойства биекции вытекает существование обратного оператора P^{-1}, а также существование и единственность решения уравнения (1). Это точное решение будем обозначать $x^* \in R$.

Кроме того, будем предполагать, что оператор P^{-1} ограничен. Далее пусть каким-то образом найдено приближенное решение $x^{(0)} \in R$. Найти апостериорную оценку погрешности этого приближенного решения α:

$$\alpha = x^* - x^{(0)}.$$

Непосредственно из линейности оператора P следует:

$$Px^* - Px^{(0)} = y - Px^{(0)} = \beta \text{ – невязка приближенного решения;}$$

$$P(x^* - x^{(0)}) = \beta;\ P\alpha = \beta.$$

Из ограниченности обратного оператора следует

$$\left\| x^* - x^{(0)} \right\| = \left\| \alpha \right\| = \left\| P^{-1}\beta \right\| \le \left\| P^{-1} \right\| \cdot \left\| \beta \right\|.$$

Таким образом, имеем известные и легко вычислимые величины:

$$x^{(0)},\ y,\ Px^{(0)},\ \beta.$$

Для завершения построения апостериорной оценки необходимо найти оценку нормы обратного оператора $\left\| P^{-1} \right\|$. Окончательный результат

$$\left\| \alpha \right\| \le \left\| P^{-1} \right\| \cdot \left\| \beta \right\|. \tag{2}$$

Часть II. Будем иметь дело с уравнением:

$$Pu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x). \tag{3}$$

Уравнение (3) – дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка двух переменных, обычно называемое волновым. Это уравнение хорошо описано и исследовано в [4; 5]. Для полной характеристики дифференциального уравнения (3) дополнительно задаются начальные условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \tag{4}$$

и граничные условия,

$$u(t,0) = u(t,1) = 0. \tag{5}$$

Если в начальных условиях обе функции тождественно равны нулю, то такие условия называются однородными.

Пусть имеем дело с операторным уравнением, которое определяется уравнением (3), однородными начальными условиями (4) и граничными условиями (5).

Отметим, что искомое решение $u(t, x)$ поставленной задачи определено в области D:$\{0 \le t \le T;\ 0 \le x \le 1\}$.

Так как существование и единственность такой задачи известна, то нашей задачей будет установление в неравенстве (2) из первой части этой статьи оценки нормы обратного оператора P^{-1}.

Будем конструктивно строить решение сформулированной задачи. Воспользуемся методом Фурье.

Выберем полную, ортонормированную систему функций

$$\{\sqrt{2}\, Sink\pi x\}. \tag{6}$$

Решение будем строить в виде разложения вряд по функциям системы (6)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} a_k(t) \cdot Sink\pi x. \tag{7}$$

Правую часть уравнения (3) представим в виде разложения в ряд

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} f_k(t) \cdot Sink\pi x,\ f_k(t) = \int_0^1 f(t,x)\sqrt{2} Sink\pi x dx. \tag{8}$$

Подставляя выражения (7) и (8) в уравнение (3), учитывая ортогональность системы (6) приходим к уравнениям

$$a_k^{//}(t) + k^2\pi^2 a_k(t) = f_k(t), k = 1,\ldots,\infty. \tag{9}$$

Согласно общей теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, общее решение уравнения (9) имеет вид

$$a_k(t) = C_1^{(k)} Cosk\pi t + C_2^{(k)} Sink\pi t + \overline{u}_k(t). \qquad (10)$$

Отметим, что функция $\overline{u}_k(t)$ – частное решение уравнения (9), которое надлежит найти. Нахождение частного решения оформим в виде следующей леммы.

Лемма. Решение уравнения

$$y^{//}(t) + k^2\pi^2 \cdot y(t) = g(t) \qquad (11)$$

при начальных условиях *y(0) = 0*, $y^{/}(0) = 0$ задается формулой

$$y(t) = \frac{1}{k\pi}\int_0^t g(\tau)\cdot Sink\pi(t-\tau)d\tau\,. \qquad (12)$$

Доказательство. Воспользуемся методом вариации постоянной. Будем искать решение уравнения (11) в виде

$$y(t) = C(t)\cdot e^{ik\pi t}. \qquad (13)$$

Подставляя решение (13) в уравнение (11), приходим к уравнению

$$C^{//}(t) + 2ik\pi C^{/}(t) = e^{-ik\pi t}\cdot g(t). \qquad (14)$$

Функция $D(t) = C^{/}(t)$ является решением уравнения

$$D^{/}(t) + 2ik\pi D(t) = e^{-ik\pi t}\cdot g(t). \qquad (15)$$

Решение линейного уравнения (15) хорошо известно:

$$D(t) = e^{-2ik\pi t}\int_0^t g(\tau)\cdot e^{ik\pi\tau}d\tau\,. \qquad (16)$$

Тогда

$$C(t) = \int_0^t e^{-2ik\pi\tau}\cdot\Big[\int_0^{\tau} g(\theta)e^{ik\pi\theta}d\theta)\Big]d\tau\,. \qquad (17)$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу (17), получим

$$C(t) = \frac{1}{2ik\pi}\int_0^t\Big[-e^{-2ik\pi t+ik\pi\tau} + e^{-ik\pi\tau}\Big]\cdot g(\tau)d\tau \qquad (18)$$

Возвращаясь к формуле (13), имеем

$$y(t) = \frac{1}{2ik\pi}\int_0^t\Big[-e^{-ik\pi t+ik\pi\tau} + e^{-ik\pi\tau+ik\pi t}\Big]\cdot g(\tau)d\tau\,. \qquad (19)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2ik\pi}\Big[-e^{ik\pi(-t+\tau)} + e^{ik\pi(t-\tau)}\Big] = \frac{2i}{2ik\pi}Sink\pi(t-\tau) = \frac{1}{k\pi}Sink\pi(t-\tau),$$

а функция *g(t)* – вещественная, то лемма доказана.

Возвращаясь к началу исследования в этой части, учитывая доказанную лемму и равенство (10), имеем

$$a_k(t) = \frac{1}{k\pi}\int_0^t f_{k(\tau)\cdot Sink\pi(t-\tau)d\tau}\,. \qquad (20)$$

Легко непосредственно установить, что решение (20) удовлетворяет однородным начальным условиям. Сейчас можно, завершая построение решения задач (3), (4), (5), выписать его в явном виде. Имеем

$$u(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} Sink\pi x\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\tau)Sink\pi(t-\tau)d\tau\,. \qquad (21)$$

Кроме формулы (21), можно привести эквивалентную формулу

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^1\left[\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}Sink\pi x\cdot Sink\pi\xi\frac{1}{k}Sink\pi(t-\tau)\right]\cdot f(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

В квадратной скобке последней формулы стоит функция Грина *G(t-τ; x, ξ)*. Тогда последнюю формулу можно записать в виде

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^1 G(t-\tau;x,\xi)\cdot f(\tau,\xi)d\xi d\tau. \qquad (22)$$

Формулой (22) задается обратный оператор P^{-1} для оператора *P,* задаваемого уравнением (3) и однородными начальными и граничными условиями. Таким образом, имеем

$u\in X, f\in Y, u = P^{-1}f.$

Требуемая оценка погрешности может быть получена из (22), если в пространствах *X* и *Y* выбраны подходящие нормировки элементов.

В пространстве *X* естественно выбрать следующую норму элемента *u(t, x)*:

$$\|u\| = \max|u(t,x)| : (t;x)\in D. \qquad (23)$$

Норму элемента *f(t, x)* пространства Y удобно выбрать так:

$$\|f\|=\int_0^t\sqrt{\int_o^1 f^2(\tau,\xi)d\xi}\,d\tau. \qquad (24)$$

Конечно, формула (24) применима тогда, когда для функции *f(t ,x)* все участвующие в этой формуле интегралы существуют.

Теорема. В выбранных метриках имеет место неравенство

$$\|u\|\le\frac{1}{\sqrt{3}}\|f\|. \qquad (25)$$

Доказательство. Используя неравенство Коши – Буняковского, оценим абсолютную величину внутреннего интеграла в формуле (22):

$$\left|\int_0^1 G(t-\tau;x,\xi)\cdot f(\tau,\xi)d\varsigma\right|\le\sqrt{\int_0^1 f^2(\tau,\xi)d\xi}\sqrt{\int_0^1 G^2(t-\tau;x,\xi)d\xi}.$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\int_0^1(\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cdot Sink\pi\xi)^2d\xi=\int_0^1(\sum_{k,j=1}^{\infty}b_k\cdot b_j\cdot Sink\pi\xi\cdot Sinj\pi\xi)d\xi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b^2{}_k\,.$$

Это вытекает из свойства ортогональности системы $\{Sink\ \pi x\}$.

Используя приведенное свойство, получаем

$$\int_0^1 G^2(t-\tau;x,\xi)d\xi=\frac{4}{\pi^2}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}Sink\pi x\cdot Sink\pi\xi\frac{1}{k}\cdot Sink\pi(t-\tau)\right)^2d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}Sin^2k\pi x\frac{1}{k^2}\cdot Sin^2k\pi(t-\tau)\le\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Возвращаясь к формуле (22), получим

$$|u(t,x)|\le\int_0^t\left|\int_0^1 G(t-\tau;x,\xi)\cdot f(\tau,\xi)d\xi\right|d\tau\le\frac{1}{\sqrt{3}}\|f\|.$$

Теорема доказана.

Следствие. Из доказанной теоремы следует

$$\|P^{-1}\|\le\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример. Пусть правая часть уравнения (3) $f(t, x) = Sin\pi x$. Начальные условия (4) однородные условия (5) тоже однородные. Точное решение этой задачи – функция

$$u^*(t,x) = \frac{2}{\pi^2} Sin\pi x \cdot Sin^2 \frac{\pi t}{2}. \qquad (26)$$

В качестве приближенного решения возьмем $u(t, x) = u^*(t, x) - \alpha(t, x)$,

$$\alpha(t,x) = \frac{1}{\pi(\pi^2 - 1)} \left(\pi S\,\mathrm{int} - Sin\pi t\right) \cdot Sin\pi x. \qquad (27)$$

Погрешность приближенного решения $u(t, x)$ равна

$$u^*(t, x) - u(t, x) = \alpha(t, x).$$

В силу линейности уравнения (3) погрешность удовлетворяет этому же уравнению с правой частью (невязкой), равной:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = S\,\mathrm{int} \cdot Sin\pi t = \beta(t,x). \qquad (28)$$

Вычислим норму невязки

$$\|\beta\| = \int_0^t \left(\sqrt{\int_0^1 Sin^2\pi x \cdot Sin^2\tau dx} \right) . d\tau \qquad (29)$$

Произведя вычисления в соответствии с формулой (29), получаем

$$\|\beta\| = \sqrt{2} Sin^2 \frac{t}{2} \le \sqrt{2}. \qquad (30)$$

Из общей теории линейных операторных уравнений известно, что имеет место соотношение $\|\alpha\| \le \|P^{-1}\| \cdot \|\beta\|$, а по следствию к доказанной выше теоремы мы имеем $\|P^{-1}\| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда вместе с формулой (30) из этих фактов получим:

$$\|\alpha\| \le \sqrt{\frac{2}{3}} Sin^2 \frac{t}{2} \le \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}811\ldots.$$

В силу определения нормы в пространстве X из последнего неравенства следует $|\alpha(t,x)| \le 0{,}811\ldots$, $t \in [0; 10]$.

Численное исследование абсолютной величины погрешности $\alpha(t,x)$ на [0; 10] показало, что ее значение не превышает 0,15. Таким образом, полученная оценка погрешности превышает фактическую примерно в пять с половиной раз. Это в численных методах вполне приемлемо.

В рассмотренном примере приближенное решение было задано в аналитической форме. В большинстве реальных случаев приближенные методы решения уравнений дают приближенное решение в виде таблиц. В этих случаях, чтобы применить изложенный подход построения апостериорной погрешности, необходимо сначала перейти от табличного задания приближенного решения к аналитическому решению. Обычно используются разные приемы интерполирования, например, [3].

Список литературы

1. *Каторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М. : Физматгиз, 1959.
2. *Коллатц А.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М. : Мир, 1969.
3. *Онегов В. А.* Интерполирование Эрмита для функций двух переменных // Вестник ЛГУ. Математика. № 13. 1970. С. 21–28.
4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. : Физматгиз, 1961. 400 с.
5. *Тихонов Н. А, Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1972. 724 с.

A posteriori error of the approximate solution of the operator linear equation. Example: hyperbolic partial differential equation

V. A. Onegov
PhD of Physical and Mathematical Sciences, Vyatka State University.
Russia, Kirov. E-mail: netadresa2@mail.ru

Abstract. In the first part of this article, we consider a general approach to constructing a posteriori error estimation for an approximate solution of a linear operator equation.

The second part is devoted to the detailed implementation of the general approach to the construction of a posteriori error to a hyperbolic differential equation.

Keywords: operator equation, approximate solution, a priori error, a posteriori error, bounded linear operator, hyperbolic type differential equation, problems for hyperbolic type equation, Green's function.

References

1. *Katorovich L. V., Akilov G. P. Funkcional'nyj analiz v normirovannyh prostranstvah* [Functional analysis in normalized spaces]. M. Fizmatgiz. 1959.

2. *Kollatc A. Funkcional'nyj analiz i vychislitel'naya matematika* [Functional analysis and computational mathematics]. M. Mir. 1969.

3. *Onegov V. A. Interpolirovanie Ermita dlya funkcij dvuh peremennyh* [Hermite interpolation for functions of two variables] // *Vestnik LGU. Matematika* – LSU herald. Mathematics. No. 13. 1970. Pp. 21–28.

4. *Petrovskij I. G. Lekcii ob uravneniyah s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on partial differential equations]. M. Fizmatgiz. 1961. 400 p.

5. *Tihonov N. A, Samarskij A. A. Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. M. Nauka. 1972. 724 p.