УДК 37.016:51 DOI 10.25730/VSU.0536.20.011

Формирование базовых умений у школьников при обучении поиску доказательства математических утверждений

Л. И. Токарева

доктор педагогических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии,
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород).
Россия, г. Великий Новгород. E-mail: rnv1952@mail.ru

Аннотация. В статье представлены общие приемы поиска доказательства: анализ текста математического утверждения, развертывание условия математического утверждения, последовательный анализ заключения и условия математического утверждения.

Ключевые слова: математическое утверждение, поиск доказательства, общие приемы поиска доказательства математических утверждений.

Сформировать у учащихся глубокие, прочные, осознанные знания, научить применять полученные знания в различных учебных ситуациях – важнейшая задача, которая на современном этапе стоит перед учебными заведениями различных типов.

В курсе геометрии учащиеся решают различные задачи: на вычисление, на доказательство, на построение, но обязательным этапом решения каждой из них является доказательство того или иного положения. Поэтому очень важно сформировать у учащихся учебное умение доказывать [8].

Формированию учебного умения доказывать посвящено немало работ – как методических, так и психологических (А. К. Артемов, Г. И. Батурина, М. И. Бурда, М. Б. Волович, В. М. Туркина, И. С. Якиманская и др.). В исследованиях указанных авторов выдвигались и по возможности решались проблемы: формирование умения оперировать математическими понятиями при доказательстве; формирование умения работать с чертежом. Большинство авторов отмечают, что центральным звеном в обучении доказательству математических утверждений, а также решения задач является формирование умения его искать [2; 8].

Проводимые нами многолетние теоретико-экспериментальные исследования в различных городах и регионах (Великий Новгород, Саратов, Магнитогорск, Санкт-Петербург, Уфа, Нальчик, Гродно, Алматы) позволили установить, что учащиеся не только не умеют самостоятельно решать задачи на доказательство и доказывать теоремы, но часто оказываются не в состоянии осуществить простое воспроизведение доказательства известной теоремы, если чертеж расположен иначе по сравнению с первоначальным доказательством теоремы учителем.

Нами была предпринята попытка на основе анализа учебного умения доказывать: 1) раскрыть структуру этого учебного умения; 2) организовать усвоение учащимися компонентов, составляющих это учебное умение.

Выполнение геометрического доказательства возможно лишь при условии владения учащимися некоторой предварительной системой геометрических знаний и умений. Как известно, геометрическая теорема (а также задача на доказательство) состоит из условия и заключения. Существует довольно большая категория теорем (включая и вузовские курсы), доказательство которых сводится к обоснованию наличия в условиях этих теорем того или иного геометрического понятия. Доказать такую теорему – значит подвести заданные в ее условии геометрические объекты под искомое понятие: проверить, обладают ли геометрические объекты, заданные в условии, всеми необходимыми и достаточными признаками понятия, которое содержится в заключении. При конъюнктивной структуре признаков для доказательства должны быть обнаружены все необходимые и достаточные признаки, а при дизъюнктивной структуре операция проверки ограничивается обнаружением хотя бы одного из признаков [1; 2; 3; 5; 6; 8]. Под методом доказательства мы будем понимать способ связи аргументов от условия к заключению суждения. В школьном курсе геометрии методы доказательства можно представить по двум основаниям: 1) по тому, как строится обоснование тезиса (прямое или косвенное); 2) по тому, какой математический аппарат используется для доказательства [3; 5; 8].

Под учебным умением доказывать истинность математического утверждения мы понимаем сложное умение, состоящее из следующих умений [5; 8]:

1) умения искать доказательство (в данном случае доказательство выступает как процесс поиска действий и последовательности их выполнения);

2) умения проводить доказательство (здесь доказательство также выступает как процесс, где требуется выполнить известные действия в известной последовательности);

3) умения оформить доказательство (в этом случае доказательство выступает как результат).

Представленные учебные умения взаимосвязаны и взаимозависимы.

Проблема обучения учащихся поиску доказательства математических утверждений рассматривалась в литературе с разных точек зрения: 1) формирование геометрических образов и понятий; 2) роль чертежа в применении геометрических теорем; 3) общие приемы работы с теоремой.

Предметом настоящего исследования является обучение учащихся поиску доказательства математических утверждений, а также решения задач на доказательство.

Так как процесс поиска доказательства представляет собой частный случай поиска решения задачи, то он также осуществляется циклически, что и легло в основу выделенных приемов поиска доказательства математических утверждений.

1. Анализ текста математического утверждения.
2. Развертывание условия математического утверждения.
3. Последовательный анализ заключения и условия математического утверждения.

Дадим краткую характеристику каждому из выделенных приемов.

Первый прием – анализ текста математического утверждения. Цель формирования данного приема заключается в том, чтобы научить обучаемых проводить тщательный анализ текста утверждения с тем, чтобы установить необходимые связи, зависимости (возможно, закономерности) между условием и заключением. Данный прием включает следующую последовательность действий: а) внимательное прочтение формулировки математического утверждения; б) выполнение чертежа; в) выделение условия и заключения утверждения; г) представление разъяснительной части условия и заключения.

Данный прием можно считать сформированным, если учащиеся при полной самостоятельности могут выполнять каждое из представленных действий.

Второй прием – развертывание условия математического утверждения. Цель формирования приема заключается в том, чтобы научить учащихся последовательно находить следствия из непосредственных данных, уметь выводить вторичные следствия: делать новые обобщенные выводы из вновь полученных. Данный прием включает следующие учебные действия: а) подведение под известное математическое понятие; б) выведение следствий из факта принадлежности объекта понятию [7].

Данный прием можно считать сформированным, если учащиеся: 1) знают определения понятий, о которых идет речь в математическом утверждении; 2) понимают связь признаков в определении; 3) понимают, с какими другими понятиями то или иное понятие связано; 4) могут при полной самостоятельности сконструировать требуемое математическое понятие.

Третий прием – последовательный анализ заключения и условия математического утверждения. Цель введения и последующего формирования данного приема заключается в том, чтобы научить школьников последовательно находить достаточные условия для выполнения заключения, а также необходимые следствия из условия; находить вторичные достаточные условия и вторичные необходимые следствия. Прием включает следующие учебные действия: а) выявление условий, достаточных для требуемого заключения (формулировка промежуточных рассуждений и заключений); б) получение аргументированных выводов из условия математического утверждения (четкая мысленная фиксация всех промежуточных выводов); в) обоснованное сравнение полученного окончательного вывода с тем, что требовалось доказать в математическом утверждении.

Данный прием можно считать сформированным у учащихся, если они: 1) смогут при полной самостоятельности выделять операционную структуру действий, входящих в прием; 2) будут понимать, какой математический факт заложен в основу выполнения соответствующей операции; 3) смогут при полной самостоятельности делать окончательные обоснованные выводы. В результате многократного выполнения указанных действий обучаемые учатся находить доказательство математического утверждения [7].

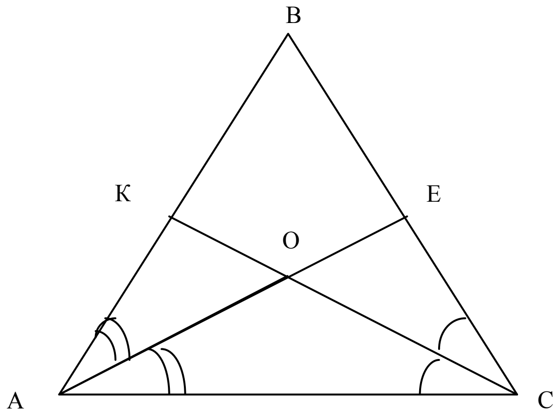
Таким образом, нами выделены такие общие приемы поиска доказательства, которые возможно формировать в самом начале изучения систематического курса геометрии.

Рассмотрим более подробно формирование приема «Последовательный анализ заключения и условия математического утверждения» на примере решения задач на доказательство. К данному моменту учащиеся уже овладели двумя приемами поиска доказательства математических утверждений, поэтому они понимают необходимость овладения еще одним приемом поиска доказательства [5; 8].

Для первоначального ознакомления с приемом учебной работы «Последовательный анализ заключения и условия математического утверждения» целесообразно использовать задачу.

Задача (7 класс. Тема: «Треугольники»)

В треугольнике проведены две биссектрисы. Доказать, что если их отрезки от точки пересечения до вершин равны, то этот треугольник равнобедренный (рис. 1).



Дано: ΔABC
AE, KC – биссектрисы углов A и C
O – точка пересечения биссектрис; $AO = CO$.
Доказать: ΔABC равнобедренный.

Рис. 1. Треугольник, заданный в условии

Поиск доказательства:

1. Начинаем с анализа заключения. Требуется доказать, что данный треугольник равнобедренный. Для этого достаточно установить равенство двух сторон или равенство двух углов.

2. Анализируем условие задачи. В условии говорится о биссектрисах углов A и C. Сделаем промежуточные выводы.

$$\angle OAC = \frac{1}{2}\angle A; \quad \angle OCA = \frac{1}{2}\angle C, \quad AO = CO,$$

тогда ΔAOC равнобедренный (по определению).

3. Сравним полученный результат с требованием задачи. Мы пока не доказали, что $\angle A = \angle C$. Так как ΔAOC равнобедренный, то $\angle OAC = \angle OCA$ (по свойству равнобедренного треугольника).

4. Сделаем окончательный вывод: так как $\angle BAE = \angle EAC$ и $\angle BCK = \angle KCA \Rightarrow \angle A = \angle C$. Следовательно, ΔABC равнобедренный (по свойству). Доказательство найдено. Поиск завершен.

На основе анализа выполненных действий можно выделить операционный состав приема, который представим в виде следующей обобщающей схемы (схема 1) [8; 9].

Первый этап в формировании приема «Последовательный анализ заключения и условия математического утверждения» можно считать завершенным, если учащиеся [5; 6; 8]:

1) с помощью учителя могут выделить операционную структуру приема;

2) осознают взаимосвязь и взаимозависимость входящих в прием операций;

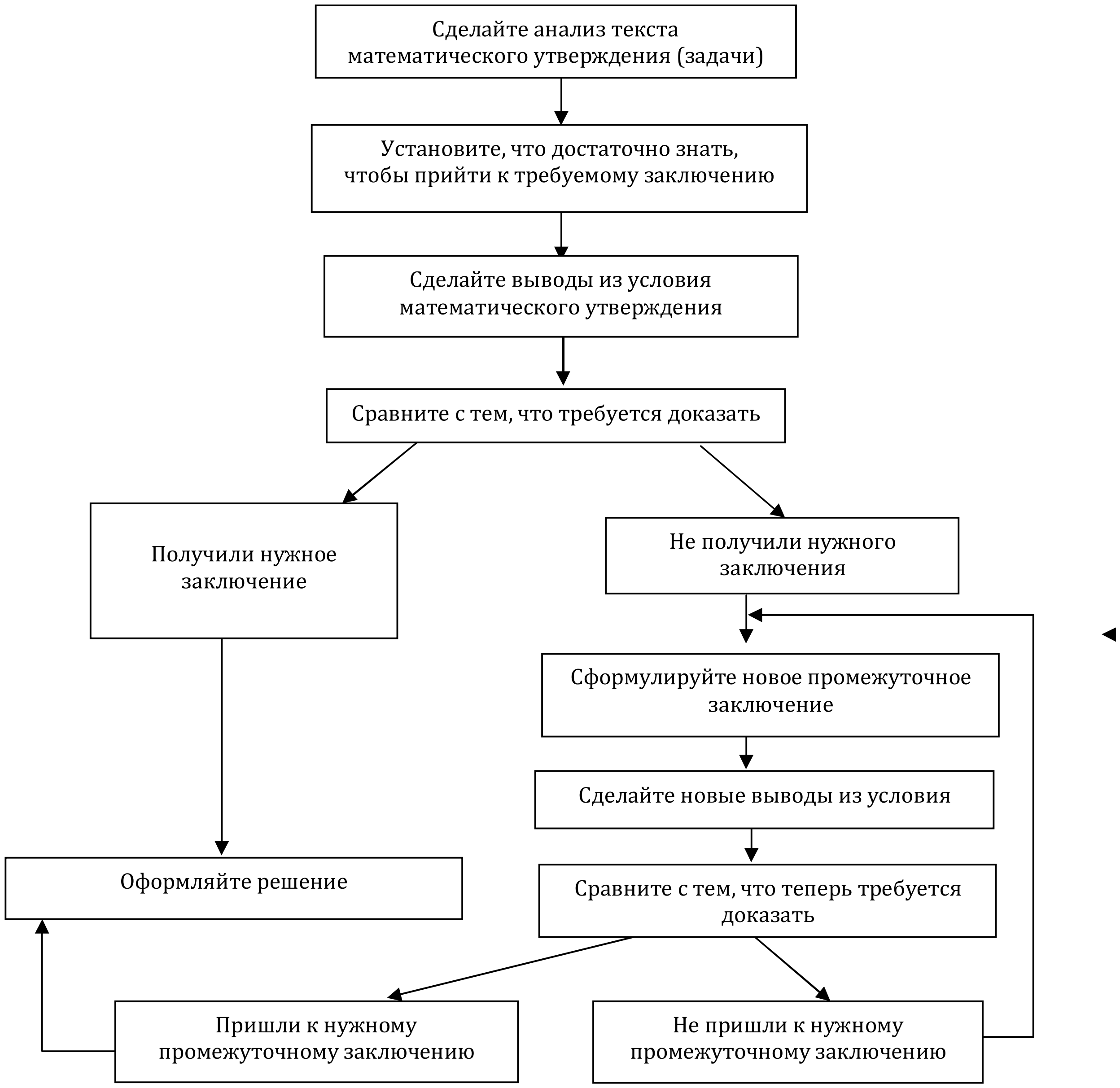
3) понимают, какой математический факт заложен в основу выполнения соответствующей операции.

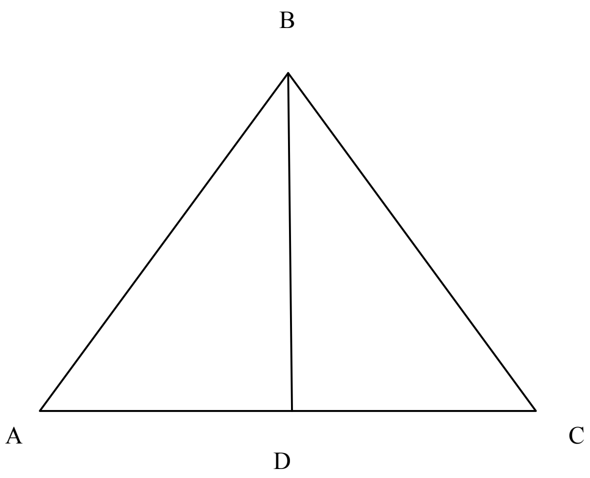
Второй этап – освоение приема. На данном этапе для освоения и закрепления приема можно использовать поиск доказательства теоремы о свойстве медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию: «В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой».

Выполняем чертеж, записываем условие и заключение теоремы.

Схема 1

Операционный состав приема





Дано:
ΔABC равнобедренный,
BD – медиана, проведенная к основанию.
Доказать:
1) BD – биссектриса,
2) BD – высота.

Рис. 2. Свойство медианы равнобедренного треугольника

Поиск доказательства:

1. Начинаем с анализа заключения. Требуется доказать, что медиана является биссектрисой и высотой. Докажем первый математический факт: медиана BD является высотой в треугольнике ABC. Достаточно установить, что $\angle ABD = \angle CBD$.

2. Анализируем условие теоремы. BD – медиана, следовательно, AD = CD (по определению медианы). Также ΔABC равнобедренный, поэтому AB = CB (по определению); $\angle BAC = \angle BCA$ (по свойству равнобедренного треугольника).

3. Делаем первый вывод: $\Delta ABD = \Delta CBD$ (по первому признаку равенства треугольников).

4. Делаем второй вывод: $\angle ABD = \angle CBD$ (как углы в равных треугольниках).

5. Делаем третий вывод: BD является биссектрисой.

6. Переходим к доказательству второго математического факта: BD – высота треугольника ABC. Для этого необходимо доказать, что $\angle ADB = \angle CDB = 90^0$.

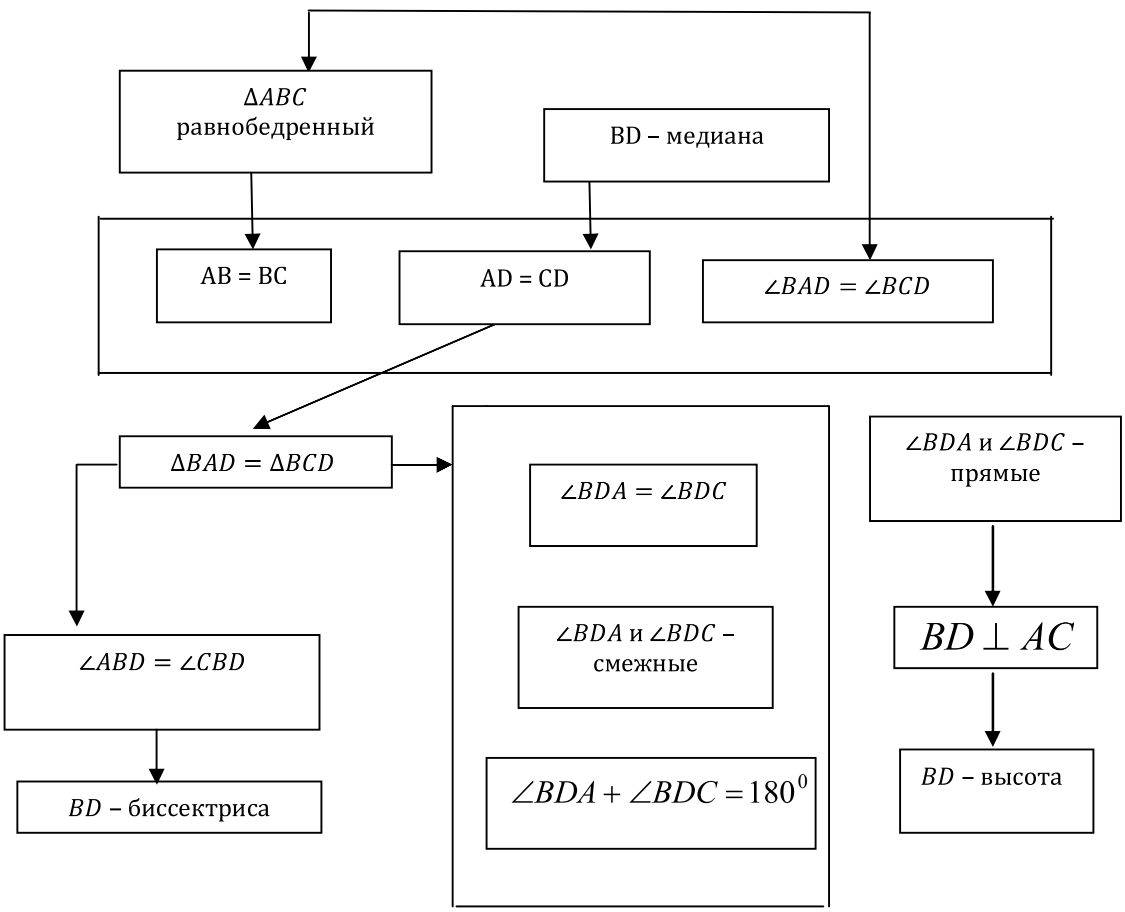
7. Делаем четвертый вывод: так как $\Delta ABD = \Delta CBD \Rightarrow \angle ADB = \angle CDB$, но $\angle ADB + \angle CDB = 180^0$ (по свойству смежных углов), то $\angle ADB = \angle CDB = 90^0$.

8. Делаем окончательный вывод: BD – высота. Пришли к нужному заключению. Теорема доказана полностью.

Учащиеся при большей самостоятельности (возможно с небольшой помощью учителя) могут представить схему доказательства всей теоремы (схема 2).

Схема 2

Доказательство теоремы в схематическом виде



Заключение (1) доказано Заключение (2) доказано

Второй этап в формировании приема «Последовательный анализ заключения и условия математического утверждения» можно считать завершенным, если учащиеся:

1) понимают и могут представить как в устной, так и в письменной форме операционную структуру действий, входящих в прием;

2) понимают взаимозависимость и взаимообусловленность выполняемых операций;

3) аргументированно формулируют промежуточные заключения и могут сделать выводы из них;

4) могут представить весь процесс доказательства теоремы (или задачи на доказательство) в виде логических схем, обобщающих таблиц или опорных конспектов.

Третий этап – этап самостоятельного применения приема учащимися не только в тех ситуациях, в которых проходил процесс формирования, но и в новых (нестандартных).

Формирование приема можно считать завершенным, если обучаемые без помощи учителя и без опоры на знаковые модели смогут осуществить поиск доказательства математического утверждения (задачи на доказательство).

Выполненные нами теоретические и экспериментальные исследования показали, что учащиеся экспериментальных классов в разные периоды обучения проявляли прочные и осознанные знания. Подтверждением этому являются полученные результаты: коэффициенты обобщенности теоретических знаний в контрольных и экспериментальных классах в разные периоды.

К (к) = 0,2214; К (к) = 0,1763; К (к) = 0,4719;

К (э) = 0,8125; К (э) = 0,8921; К (э) = 0,9763.

Список литературы

1. Геометрия 7–9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций с прилож. на электрон. носителе / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов [и др.]. 3-е изд. М. : Просвещение, 2014. 383 с. : ил.

2. *Далингер В. А.* Обучение учащихся доказательству теорем : учеб. пособие. Омск : ОГПИ, 1990. 127 с.

3. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студ. физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко [и др.] ; под ред. Е. И. Лященко. М. : Просвещение, 1988. 223 с. : ил.

4. *Талызина Н. Ф.* Формирование познавательной деятельности младших школьников : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1988. 175 с.

5. *Токарева Л. И.* Усвоение учащимися приемов аналитико-синтетической деятельности при решении геометрических задач // Математический Вестник педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. Вып. 16 / Вят. гос. гум. ун-т. Киров, 2014. С. 278–284.

6. *Токарева Л. И.* Формирование систем математических понятий у учащихся общеобразовательных школ : дис. … д-ра пед. наук : 13.00.02. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010. 404 с.

7. *Токарева Л. И.* Формирование системы понятий «Тождества, уравнения, неравенства» в курсе математики средней школы // Математический Вестник педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. Вып. 16 / Вят. гос. гум. ун-т. Киров, 2014. С. 266–278.

8. *Туркина В. М.* О формировании общих приемов поиска доказательства математических утверждений // Приемы активизации обучения математике. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1985. С. 38–45.

9. *Якиманская И. С.* Развитие пространственного мышления школьников. М. : Педагогика, 1980. 240 с.

Formation of basic skills of students when learning to search for proof of mathematical statements

L. I. Tokareva
Doctor of Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of algebra and geometry,
Yaroslav the Wise Novgorod State University (Veliky Novgorod).
Russia, Veliky Novgorod. E-mail: rnv1952@mail.ru

Abstract. The article presents general methods for finding proof: analysis of the text of a mathematical statement, expansion of the condition of a mathematical statement, sequential analysis of the conclusion and conditions of a mathematical statement.

Keywords: mathematical statement, proof search, general techniques for finding proof of mathematical statements.

References

1. *Geometriya 7–9 klassy: ucheb. dlya obshcheobrazovat. organizacij s prilozh. na elektron. nositele* – Geometry for grades 7–9 : textbook for general education. organizations with an app. on an electron. media / L. S. Atanasyan, V. F. Butuzov [et al.]. 3rd ed. M. Prosveshchenie. 2014. 383 p. : Il.

2. *Dalinger V. A. Obuchenie uchashchihsya dokazatel'stvu teorem : ucheb. posobie* [Teaching students to prove theorems : tutorial]. Omsk. OSPI. 1990. 127 p.

3. *Laboratornye i prakticheskie raboty po metodike prepodavaniya matematiki: ucheb. posobie dlya stud. fiz.-mat. spec. ped. in-tov* – Laboratory and practical work on methods of teaching mathematics: tutorial for students of physics and mathematics. spec. of ped. universities / E. I. Lyashchenko, K. V. Zobkova, T. F. Kirichenko [et al.] ; ed. E. I. Lyashchenko. M. Prosveshchenie. 1988. 223 p. : Il.

4. *Talyzina N. F. Formirovanie poznavatel'noj deyatel'nosti mladshih shkol'nikov: kn. dlya uchitelya* [Formation of cognitive activity of younger schoolchildren: book for teachers]. M. Prosveshchenie. 1988. 175 p.

5. *Tokareva L. I. Usvoenie uchashchimisya priemov analitiko-sinteticheskoj deyatel'nosti pri reshenii geometricheskih zadach* [Assimilation of analytical and synthetic activity techniques in solving geometric problems by students] // *Matematicheskij Vestnik pedvuzov i un-tov Volgo-Vyatskogo regiona. Vyp. 16* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 16 / Vyat. State Hum. Un-ty. Kirov. 2014. Pp. 278–284.

6. *Tokareva L. I. Formirovanie sistem matematicheskih ponyatij u uchashchihsya obshcheobrazovatel'nyh shkol : dis. … d-ra ped. nauk : 13.00.02* [Formation of systems of mathematical concepts in students of secondary schools : dis. ... Doctor of Pedagogical Sciences : 13.00.02]. M. Lomonosov Moscow State University. 2010. 404 p.

7. *Tokareva L. I. Formirovanie sistemy ponyatij "Tozhdestva, uravneniya, neravenstva" v kurse matematiki srednej shkoly* [Formation of the system of concepts "Identities, equations, inequalities" in the course of high school mathematics] // *Matematicheskij Vestnik pedvuzov i un-tov Volgo-Vyatskogo regiona. Vyp. 16* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 16] / Vyat. State Hum. Un-ty. Kirov. 2014. Pp. 266–278.

8. *Turkina V. M. O formirovanii obshchih priemov poiska dokazatel'stva matematicheskih utverzhdenij* [On the formation of general methods for searching for proof of mathematical statements] // *Priemy aktivizacii obucheniya matematike. L. : LGPI im. A. I. Gercena* – Methods of activation of teaching mathematics. L. LSPI n. a. A. I. Herzen. 1985. Pp. 38–45.

9. *Yakimanskaya I. S. Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkol'nikov* [Development of spatial thinking of schoolchildren]. M. Pedagogika. 1980. 240 p.