МАТЕМАТИКА

УДК 512.55

DOI 10.25730/VSU.0536.20.001

Полукольца и их связи. III*

Е. М. Вечтомов[1], В. В. Сидоров[2]

[1]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: vecht@mail.ru

[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Аннотация. Приведены основные результаты исследований 2019 года по научному проекту «Полукольца и их связи» и указаны наиболее значимые результаты, полученные авторами по данному проекту в целом. Описаны все изоморфизмы решеток подалгебр (любых, а также с единицей) полуполей непрерывных положительных функций, как с обычным сложением, так и с max-сложением. Получены первые результаты о полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций с расширенным сложением. Установлено, что изоморфизмы полуколец всех непрерывных соответствий на любых топологических пространствах индуцируются гомеоморфизмами этих пространств.

Ключевые слова: полукольцо, топологическое пространство, полукольцо непрерывных функций, изоморфизм решеток подалгебр, частичная функция, соответствие.

Настоящая статья содержит обзор результатов исследований по научному проекту «Полукольца и их связи» за 2019 год, а также перечень основных результатов, полученных нами по проекту в 2017–2019 годы. Работа продолжает исследования по проекту 2017 и 2018 годов, отраженные в научных отчетах [27; 28] и обзорных статьях [29; 30].

Объект исследования – полукольца непрерывных действительнозначных функций и полукольца непрерывных соответствий на топологических пространствах.

Цель исследования – получение новых результатов по теории подалгебр полуколец непрерывных числовых функций, по полукольцам непрерывных частичных числовых функций и по полукольцам непрерывных соответствий.

Методы исследования: полукольцевые, полугрупповые, решеточные, функционально-алгебраические, общетопологические.

Получены новые нетривиальные результаты по теме исследования:

– описаны все изоморфизмы решеток подалгебр (как всевозможных, так и с единицей) полуполей непрерывных положительных функций, рассматриваемых с обычным поточечным сложением, на топологических пространствах;

– описаны все изоморфизмы решеток подалгебр (как любых, так и с единицей) полуполей непрерывных положительных функций с max-сложением;

– начато исследование полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций с расширенным сложением;

– положено начало изучению полуколец соответствий на произвольном множестве;

– показано, что изоморфизмы полуколец всех непрерывных соответствий на любых топологических пространствах индуцируются гомеоморфизмами этих пространств;

– как следствие из предыдущей теоремы вытекает абсолютная определяемость всякого топологического пространства полукольцом всех непрерывных соответствий на нем.

Результаты работы изложены в трех параграфах научного обзора. Они принадлежат к фундаментальному направлению современной математики, в котором изучаются взаимосвязи между топологическими пространствами и ассоциированными с ними алгебраическими системами функций.

Степень внедрения: полученные результаты опубликованы и доложены на международных и всероссийских математических конференциях и семинарах [11–17; 38–40]; изданы методические

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.

работы [1; 2; 10; 18; 31; 32; 35]. Они будут использованы в дальнейших исследованиях по функциональной алгебре и теории полуколец, в совершенствовании курсов для студентов и аспирантов.

Статья посвящена исследованию задач функциональной алгебры. Полученные результаты относятся к теории полуколец, ее связям и применениям. Полукольца используются как в самой математике: абстрактной алгебре, дискретной математике, идемпотентном анализе, тропической математике, общей топологии, так и в приложениях: криптографии, теории оптимального управления, математической лингвистике.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с ассоциативными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Это самое общее определение полукольца дано Вандивером в 1934 году. Нейтральные элементы по сложению и умножению (если они существуют) называются *нулем* и *единицей* и обозначаются через 0 и 1. При наличии нуля в полукольце S дополнительно требуется, чтобы $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ для всех $a \in S$.

В тексте статьи мы используем следующие книги [9; 22; 34; 41–43]. Теории полуколец непрерывных функций посвящена пионерская работа [5], двухтомник [20; 21] и научный обзор [23].

1. Изоморфизмы решеток подалгебр полуполей непрерывных положительных функций

Результаты этого параграфа опубликованы в статьях [39; 40].

1.1. Исходные понятия. Полукольцо S с нулем и единицей, отличное от кольца, называется *полуполем с нулем*, если $\langle S \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ – коммутативная группа. Легко показать, что если S – полуполе с нулем, то $ab \neq 0$, $a + b \neq 0$ для любых $a, b \in S \setminus \{0\}$. Поэтому множество $S \setminus \{0\}$ с теми же операциями сложения и умножения образует алгебраическую структуру, которая называется *полуполем*. См. [9; 22; 43].

Пусть $\mathbf{R}$ – поле действительных чисел. Его подмножества $\mathbf{R}_+$ неотрицательных действительных чисел и $\mathbf{P}$ положительных действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения являются полуполем с нулем и полуполем соответственно. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$ положим $a \vee b = \max\{a, b\}$. Если в $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{P}$ заменить обычное сложение на max-сложение, то получим полуполе с нулем $\mathbf{R}^{\vee}_+$ и полуполе $\mathbf{P}^{\vee}_+$.

Замечание 1.1. Везде далее S – это $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}^{\vee}_+$ или $\mathbf{P}^{\vee}_+$.

Обозначим через $C(X, S)$ *полукольцо всех непрерывных* S-значных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечными операциями сложения и умножения функций (S рассматриваем с интервальной топологией; в случае $S = \mathbf{R}^{\vee}_+$ или $S = \mathbf{P}^{\vee}_+$ под сложением подразумеваем max-сложение). Положим, $C^+(X) = C(X, \mathbf{R}_+)$, $U(X) = C(X, \mathbf{P})$, $C^{\vee}(X) = C(X, \mathbf{P}^{\vee}_+)$ и $U^{\vee}(X) = C(X, \mathbf{P}^{\vee}_+)$. Отметим, что $U^+(X)$ и $U^{\vee}(X)$ – полуполя.

Кольцо $C(X)$ непрерывных $\mathbf{R}$-значных функций на X является алгеброй над полем $\mathbf{R}$. Подалгеброй в $C(X)$ будет любое его непустое подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из $\mathbf{R}$. По аналогии назовем непустое подмножество $A \subseteq C(X, S)$ *подалгеброй*, если $f + g$, $(f \vee g)$, fg, $rf \in A$ для любых $f, g \in A$ и $r \in S$. Таким образом, мы будем употреблять термин «подалгебра» в более широком смысле, нежели кольцо, одновременно являющееся векторным пространством.

Обозначим через $\mathbf{A}(C(X, S))$ – *решетку всех подалгебр полукольца* $C(X, S)$ по отношению включения $\subseteq$, а через через $\mathbf{A_1}(C(X, S))$ – *ее подрешетку всех подалгебр с* 1 (строгое включение будем обозначать символом $\subset$).

Замечание 1.2. Легко видеть, что точная нижняя грань произвольного непустого семейства подалгебр $\{A_i\}_{\{i \in I\}}$ равна их пересечению $\bigcap_{i \in I} A_i$, а точная верхняя грань состоит из конечных сумм функций вида $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$, где $f_1, \ldots, f_n \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $n \in \mathbf{N}$. В случае $S = \mathbf{P}$ или $S = \mathbf{P}^{\vee}_+$ пересечение $\bigcap_{i \in I} A_i$, возможно, пусто. Поэтому *договоримся считать пустое множество* $\varnothing$ *подалгеброй полуполей* $U(X)$ *и* $U^{\vee}(X)$. Легко видеть, что подалгебра $\varnothing$ является нулем решеток $\mathbf{A}(U(X))$ и $\mathbf{A}(U^{\vee}(X))$.

Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любых непустого замкнутого множества $F \subset X$ и точки $x \in X \setminus F$ найдется функция $f \in C(X)$ или, что равносильно, $f \in C(X, S)$, такая, что $f(F) = \{a\}$, $f(x) = b$ и $a \neq b$. Идеал M кольца $C(X)$ называется $\mathbf{R}$-*идеалом*, если факторкольцо $C(X)/M$ изоморфно полю $\mathbf{R}$ действительных чисел. Идеалы $M_x = \{f \in C(X): f(x) = 0\}$, $x \in X$, называются *фиксированными максимальными идеалами*. Тихоновское пространство X называется *хьюиттовским*, если все $\mathbf{R}$-идеалы кольца $C(X)$ являются фиксированными максимальными идеалами.

Известны следующие характеризации (см. [42]): топологическое пространство является тихоновским (хьюиттовским) тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) тихоновской степени пространства **R**. Хьюиттовскими пространствами будут, например, компакты, т. е. компактные хаусдорфовы пространства.

Хьюиттовские пространства играют важную роль в теории колец $C(X)$ и связанных с ними алгебраических систем непрерывных функций. Отметим

Предложение 1.1. [42, theorems 3.9 и 8.7] *Для произвольного топологического пространства X найдутся тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца $C(X, S)$, $C(\tau X, S)$ и $C(\nu\tau X, S)$, а также решетки их подалгебр (подалгебр с единицей).*

1.2. Мотивировка и основные результаты. В теории колец $C(X)$ важен и интересен вопрос о том, насколько топологическое пространство X или отдельные его свойства определяются теми или иными алгебраическими свойствами кольца $C(X)$ и связанных с ним алгебраических систем $A(X)$. Сюда же относится задача определяемости топологических пространств. *Определяемость топологического пространства X* в классе K топологических пространств некоторой производной алгебраической структурой $A(X)$ означает, что для произвольного топологического пространства $Y \in K$ изоморфизм структур $A(X)$ и $A(Y)$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y.

Согласно знаменитой теореме Гельфанда-Колмогорова (см. [33]), произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$. Эта теорема была впоследствии распространена на все действительно-компактные (теперь называемые хьюиттовскими) топологические пространства (см. [44, theorem 57]). Впоследствии было доказано (см. [8, теорема 1], что в теореме Хьюитта можно заменить кольцо $C(X)$ на решетку $\mathbf{A}(C(X))$ его подалгебр. Мы перенесли этот результат на случай решеток $\mathbf{A}(C(X, S))$ и $\mathbf{A_1}(C(X, S))$ полуколец $C(X, S)$ (см. [25; 36; 37; 47; 48]).

Отсюда и из предложения 1 получаем, что для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbf{A}(C(X, S))$ и $\mathbf{A}(C(Y, S))$ или их подрешеток $\mathbf{A_1}(C(X, S))$ и $\mathbf{A_1}(C(Y, S))$ влечет изоморфизм полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$. Возникают следующие естественные вопросы.

Вопрос 1.1. Как устроены изоморфизмы полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, индуцирующие изоморфизмы решеток их подалгебр (подалгебр с единицей)?

Вопрос 1.2. Как устроены изоморфизмы решеток подалгебр (подалгебр с единицей) полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$? В частности, существуют ли изоморфизмы этих решеток, не индуцированные изоморфизмами самих полуколец?

Ответы на вопросы 1.1 и 1.2 для $S = \mathbf{R}_+$ даны в работе [25], для $S = \mathbf{R}^{\vee}_+$ в случае решеток всех подалгебр полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$ – в работе [37] (случае решеток подалгебр с единицей рассмотрен и находится в печати), для $S = \mathbf{P}^{\vee}_+$ в случае $|X| = 3$ – в работе [40] (общий случай разобран и подан к печати), наконец, для $S = \mathbf{P}$ – в работе [39]. Рассмотрим подробнее случай $S = \mathbf{P}$.

Перед тем как дать точный ответ на вопросы 1.1 и 1.2, опишем изоморфизмы полуполей $U(X)$ и $U(Y)$.

Теорема 1.1. *Для любых топологических пространств X и Y каждый изоморфизм полуполей $U(X)$ и $U(Y)$ индуцируется некоторым единственным гомеоморфизмом хьюиттовских пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$.*

Доказательство. Пусть для произвольных топологических пространств X и Y полуполя $U(X)$ и $U(Y)$ изоморфны. Тогда канонически изоморфные им полуполя $U(\nu\tau X)$ и $U(\nu\tau Y)$ также изоморфны. Поскольку кольца $C(\nu\tau X)$ и $C(\nu\tau Y)$ являются кольцами разностей полуполей $U(\nu\tau X)$ и $U(\nu\tau Y)$ соответственно, а элементы данных полуполей суть квадраты обратимых элементов этих колец, изоморфизм полуполей $U(\nu\tau X)$ и $U(\nu\tau Y)$ однозначно продолжается до изоморфизма колец $C(\nu\tau X)$ и $C(\nu\tau Y)$, который индуцируется некоторым единственным гомеоморфизмом хьюиттовских пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$. Последнее утверждение является следствием более общего факта – двойственности Хьюитта (см. [42, theorem 10.6]): категория хьюиттовских пространств X и их непрерывных отображений антиэквивалентна категории колец $C(X)$ и их гомоморфизмов, сохраняющих 1.

Теорема 1.1 вместе со следующей теоремой дают исчерпывающий ответ на вопросы 1.1 и 1.2 в случае $S = \mathbf{P}$.

Теорема 1.2. *Для любых топологических пространств X и Y справедливы следующие утверждения*:

1) *каждый изоморфизм решеток $\mathbf{A_1}(U(X))$ и $\mathbf{A_1}(U(Y))$ индуцируется некоторым однозначно определенным изоморфизмом полуполей $U(X)$ и $U(Y)$*;

2) *если $|\tau X| \neq 2$ (равносильно $|\tau Y| \neq 2$), то каждый изоморфизм решеток $\mathbf{A}(U(X))$ и $\mathbf{A}(U(Y))$ индуцируется некоторым однозначно определенным изоморфизмом полуполей $U(X)$ и $U(Y)$*;

3) *если $|\tau X| = |\tau Y| = 2$, то изоморфизмы решеток $\mathbf{A}(U(X))$ и $\mathbf{A}(U(Y))$ порождаются парами автоморфизмов цепи $[0,1]$ и двумя биекциями между τX и τY.*

Будем говорить, что *в решетке имеется решеточная характеризация некоторого свойства*, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки. В качестве примера укажем решеточные характеризации подалгебры констант **P** в решетках $\mathbf{A}(U(X))$ и $\mathbf{A_1}(U(X))$.

Элемент A решетки с нулем 0 называется *атомом*, если нет такого элемента B данной решетки, что $0 < B < A$.

Лемма 1.1. *Подалгебра* **P** *– единственный атом решетки* $\mathbf{A}(U(X))$ *и нуль решетки* $\mathbf{A_1}(U(X))$.

Наименьшую подалгебру полукольца $C(X, S)$, содержащую функцию f, назовем *однопорожденной* и обозначим через $\langle f \rangle$. Через $[f]$ обозначим наименьшую подалгебру полукольца $C(X, S)$, содержащую функции 1 и f; при работе в решетке $\mathbf{A_1}(C(X, S))$ подалгебру $[f]$ для краткости также будем называть однопорожденной.

Дадим решеточную характеризацию однопорожденных подалгебр.

Лемма 1.2. *Подалгебры* $\langle f \rangle$ *и* $[f]$ *– это в точности* $\vee$*-неразложимые компактные элементы решеток* $\mathbf{A}(U(X))$ *и* $\mathbf{A_1}(U(X))$ *соответственно.*

Доказательство теоремы 1.2 опирается на *технику однопорожденных подалгебр*, которую мы впервые применили в работах [25; 36], где описали изоморфизмы решеток подалгебр полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$ для $S = \mathbf{R}_+$ и для $S = \mathbf{R}^{\vee}{}_+$; случай $S = \mathbf{P}$ оказался значительно сложнее (корневая причина – отсутствие нуля в **P**). В общих чертах суть техники однопорожденных подалгебр состоит в том, что мы описываем свойства подалгебр в терминах решеточных свойств однопорожденных подалгебр, точной верхней гранью которых они являются.

2. Полукольца частичных числовых функций с расширенным сложением

Параграф посвящен дальнейшему развитию теории полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций, начатому в работах [3; 4; 11; 19; 21 (глава 8)].

2.1. Предварительные сведения. Здесь под *полукольцом* понимается полукольцо с коммутативными операциями сложения и умножения с нулем и единицей. Поле **R** всех действительных чисел является коммутативным полукольцом с делением с нулем 0 и единицей 1.

Пусть X – топологическое пространство, $C(X) = C(X, \mathbf{R})$ – кольцо всех непрерывных действительнозначных функций на X с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций, $F(X) = \mathbf{R}^X$ – множество всех функций (отображений) $X \to \mathbf{R}$ и $PF(X) = \cup\{F(Y) \colon Y \subseteq X\}$ – множество всевозможных частичных действительнозначных функций на X, включая $C(X)$ и пустую функцию $\varnothing$. Обозначим через $D(f)$ область определения частичной функции f из X в **R**. Положим $CPF(X) = \cup\{C(Y) \colon Y$ – открыто-замкнутое множество в $X\} = \{f \in C(Y) \colon Y = D(f)$ открыто-замкнуто в $X\}$.

На множестве $PF(X)$ зададим операции сложения и умножения частичных функций поточечно: для $f, g \in PF(X)$ имеем $D(f + g) = D(f) \cup D(g)$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ при $x \in D(f) \cap D(g)$, $f + g = f$ на $D(f) \setminus D(g)$ и $f + g = g$ на $D(g) \setminus D(f)$, $D(fg) = D(f) \cap D(g)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ при $x \in D(f) \cap D(g)$. Относительно введенных операций $PF(X)$ становится полукольцом с коммутативным умножением с нулем $\varnothing$ и единицей – функцией-константой 1 на X, подполукольцами которого служат полукольцо $CPF(X)$ и кольцо $F(X)$.

Пусть $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$ – полукольцо, полученное добавлением к полю **R** действительных чисел нового нулевого элемента $\varnothing$. При одноэлементном множестве X полукольцо $PF(X)$ изоморфно $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$. Наделим множество $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$ топологией, оставляя топологию на **R** естественной и считая одноточечное множество $\{\varnothing\}$ открыто-замкнутым. В результате получаем топологическое полукольцо $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$, при этом $CPF(X) = C(X, \mathbf{R} \cup \{\varnothing\})$ будет полукольцом всех непрерывных функций на топологическом пространстве X со значениями в топологическом полукольце $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$. Если пространство X связно, то $CPF(X) = C(X) \cup \{\varnothing\}$. Если же X дискретно, то $CPF(X) = PF(X)$ [11]. Естественно рассматривать случай нульмерных пространств X. Напомним, что хаусдорфово пространство называется: нульмерным, если открыто-замкнутые множества образуют в нем открытую базу; тихоновским (хьюиттовским), если оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) прямой степени числовой прямой **R**. Нульмерные пространства являются тихоновскими. См. [41].

Замечание 2.1. Ранее мы изучали полукольцо $\mathbf{R}P^X$ всех непрерывных частичных **R**-значных функций на X, когда сумма частичных функций f и g определена, как и произведение, на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$ [3; 4; 19; 21 (глава 8)]. При одноэлементном множестве X имеем полукольцо $\mathbf{R}P^X = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, являющееся расширением поля **R** при помощи поглощающего (по обеим операциям) элемента ∞. Мы изучаем алгебраические свойства полукольца $CPF(X)$, в том числе решетки его идеалов, конгруэнций и подалгебр. Эти свойства существенно отличаются от случая полукольца $\mathbf{R}\mathrm{P}^X$.

Подполукольцо A полукольца $CPF(X)$ называется подалгеброй, если A выдерживает умножение на числа из **R**. Пустое множество $\varnothing$ также считаем подалгеброй в $CPF(X)$.

Для тихоновского пространства X через βX обозначается его компактификация Стоуна – Чеха, а через νX – расширение Хьюитта. Отметим, что для всякого топологического пространства X полукольца $CPF(X)$, $CPF(\tau X)$ и $CPF(\nu\tau X)$ канонически изоморфны, где τX – так называемая тихоновизация пространства X.

2.2. Максимальные идеалы, максимальные конгруэнции и максимальные подалгебры. Пусть $[Y]$ – замыкание в βX множества $Y \subseteq \beta X$. Возьмем в βX точки $p \neq q$. Определим множества:

$$M^p = \{f \in CPF(X)\colon p \in [f^{-1}(0)] \text{ или } p \notin [D(f)]\},$$
$$A^q = \{f \in CPF(X)\colon q \in [D(f)]\},$$
$$A^{pq} = M^p \cup A^q.$$

В полукольце $CPF(X)$ получаем идеал M^p, $C(X)$-полумодуль A^q и подалгебру A^{pq}. Если $p, q \in X$ и $p \neq q$, то $M^p = M_p = \{f \in CPF(X)\colon f(p) = 0 \text{ или } p \notin D(f)\}$, $A^q = A_q = \{f \in CPF(X)\colon f(q) \text{ – число}\}$ и $A_{pq} = \{f \in CPF(X)\colon f(p) = 0 \text{ или } \varnothing, f(q) \neq \varnothing\}$.

Множество всех максимальных идеалов полукольца $CPF(X)$ с топологией Стоуна – Зариского называется его максимальным спектром.

Теорема 2.1. *Для любого тихоновского пространства X множествами M^p по всем точкам $p \in \beta X$ исчерпываются все максимальные идеалы полукольца $CPF(X)$. Более того, максимальный спектр полукольца $CPF(X)$ гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βX.*

Данная теорема является аналогом классической теоремы Гельфанда – Колмогорова о строении максимальных идеалов колец непрерывных действительнозначных функций [42, theorem 7.3].

Отношением Берна по идеалу J полукольца S называется такая конгруэнция ρ на S, что для любых $s, t \in S$ имеем: $s\rho t$ тогда и только тогда, когда $s + a = t + b$ для некоторых $a, b \in J$.

Теорема 2.2. *Всякая максимальная конгруэнция на полукольце $CPF(X)$ над произвольным топологическим пространством X либо двухклассовая, либо является отношением Берна по некоторому максимальному идеалу полукольца $CPF(X)$.*

Теорема 2.3. *Для любого тихоновского пространства X подалгебры вида A^{pq}, $p \neq q$ из βX, являются максимальными подалгебрами полукольца $CPF(X)$.*

Замечание 2.2. Полукольцо $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$ имеет:

три идеала $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, 0\} \subset \mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$;

четыре конгруэнции – отношение равенства (наименьшая), с двумя классами $\{\varnothing\}$ и $\mathbf{R}$, с одним неодноэлементным классом $\{\varnothing, 0\}$, одноклассовую (наибольшая), причем вторая и третья конгруэнции – максимальные;

шесть подалгебр – $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$, $\{\varnothing, 0\}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$, из которых $\{\varnothing, 0\}$, $\mathbf{R}$ – максимальные.

Теорема 2.4. *Для n-элементного дискретного топологического пространства X ($n \in \mathbf{N}$) имеют место следующие утверждения:*

1) *решетка идеалов полукольца $CPF(X)$ есть прямое произведение n трехэлементных цепей, значит, содержит 3^n элементов;*

2) *решетка конгруэнций полукольца $CPF(X)$ есть прямое произведение $2n$ двухэлементных цепей, стало быть, содержит 4^n элементов;*

3) *максимальные подалгебры полукольца $CPF(X)$ суть в точности подалгебры A_{xy} по различным точкам x, y пространства X, следовательно, их число равно $n(n-1)$.*

2.3. Изоморфизмы и определяемость.

Теорема 2.5. *Для любых топологических пространств X и Y каждый изоморфизм полуколец $CPF(X)$ и $CPF(Y)$ индуцирован некоторым единственным гомеоморфизмом топологических пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$.*

Следствие 2.1. *Произвольное хьюиттовское пространство X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, своим полукольцом $CPF(X)$.*

Отметим, что проблеме определяемости топологических пространств различными алгебраическими системами непрерывных функций на них посвящены обзорные статьи [6; 7 (параграф 1)].

3. Полукольца соответствий

Результаты данного параграфа отражены в публикациях [12; 15–17].

3.1. Соответствия на множествах. Двойственности. Пусть даны произвольные множества X и Y. Через $\mathbf{B}(X)$ обозначим *булеан множества X*, то есть множество всех подмножеств множества X.

Соответствием (*бинарным отношением*) между множествами X и Y называется произвольное подмножество ρ прямого произведения множеств X и Y, т. е. $\rho \subseteq X \times Y$. Точнее говоря, соответствие – это тройка $\langle X, \rho, Y\rangle$, где $\rho \subseteq X \times Y$ называют также *графиком* соответствия ρ. Запись $x\rho y$ означает, что элементы $x \in X$ и $y \in Y$ находятся в отношении ρ.

Пусть ρ – произвольное соответствие между множествами X и Y.

Образом подмножества A множества X при соответствии ρ называется множество $\rho(A) = \{y\in Y: \exists x\in A\ x\rho y\}\subseteq Y$. *Областью определения* соответствия ρ называется множество $D(\rho) = \rho^{-1}(B)$. *Множеством значений* (*образом*) соответствия ρ будет множество $R(\rho) = \rho(A) = D(\rho^{-1})$. Отметим, что

$$\rho = \cup_{x\in X}(\{x\} \times \rho(\{x\}).$$

Обычным образом определяются тождественное соответствие 1_X, обратное соответствие ρ^{-1} и композиция $\rho\sigma$ соответствия ρ между множествами X и Y и соответствия σ между множествами Y и Z.

Булеан $\mathbf{B}(X)$ произвольного множества X относительно отношения включения $\subseteq$ (с операциями объединения $\cup$ и пересечения $\cap$) является булевой решеткой с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом X. При этом пустое множество будем называть нулем и обозначать 0, а само множество X – единицей 1 булеана $\mathbf{B}(X)$. Булеан $\mathbf{B}(X)$ является полной атомной решеткой, атомы которой суть в точности одноэлементные подмножества в X.

Снова возьмем произвольное бинарное отношение ρ между множествами X и Y. Рассмотрим отображение взятия образов при действии ρ:

$$\boldsymbol{\rho}: \mathbf{B}(X)\to\mathbf{B}(Y),\ \boldsymbol{\rho}(A) = \rho(A) \text{ для любого } A\subseteq X,$$

булеана $\mathbf{B}(X)$ в булеан $\mathbf{B}(Y)$. Очевидно, что $\boldsymbol{\rho}$ является *полным* $\vee$*-гомоморфизмом* булеанов, то есть $\boldsymbol{\rho}(\varnothing) = \varnothing$ и $\boldsymbol{\rho}(\cup A_i) = \cup\boldsymbol{\rho}(A_i)$ для любого непустого семейства $(A_i)_{i\in I}$ подмножеств A_i множества X.

Обратно, пусть α – полный $\vee$-гомоморфизм булеана $\mathbf{B}(X)$ в булеан $\mathbf{B}(Y)$. Определим соответствие $\rho = \rho(\alpha)$ между множествами X и Y, положив:

$$x\rho y \Leftrightarrow y\in\alpha(\{x\}) \text{ для любых } x\in X \text{ и } y\in Y.$$

Легко видеть, что $\alpha = \boldsymbol{\rho}$. Получаем

Предложение 3.1. *Для любых множеств X и Y переходы $\rho\to\boldsymbol{\rho}$ и $\alpha\to\rho(\alpha)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между соответствиями ρ между множествами X и Y и полными $\vee$-гомоморфизмами α булеана $\mathbf{B}(X)$ в булеан $\mathbf{B}(Y)$.*

Установим двойственности для категории множеств и соответствий между ними и для категории соответствий и их 2-морфизмов.

Теорема 3.1. *Категория всех множеств с соответствиями между множествами в качестве морфизмов эквивалентна категории булеанов всевозможных множеств и их полных $\vee$-гомоморфизмов.*

Рассмотрим теперь категорию, объектами которой служат всевозможные соответствия $\langle X, \rho, Y\rangle$, а морфизм тройки $\langle X, \rho, Y\rangle$ в тройку $\langle U, \sigma, V\rangle$ определяется как упорядоченная пара отображений (f, g), такая, что $f: X\to U$, $g: Y\to V$ и $f\sigma = \rho g$. Такой морфизм назовем 2-*морфизмом*. При 2-морфизме (f, g) соответствия ρ в соответствие σ соотношение $x\rho y$ преобразуется в соотношение $f(x)\sigma g(y)$. Действительно, если $x\rho y$, то $x(\rho g)g(y)$, откуда $x(f\sigma)g(y)$, то есть $f(x)\sigma g(y)$. Единичным морфизмом тройки $\langle X, \rho, Y\rangle$ будет пара тождественных отображений $(1_X, 1_Y)$.

Теперь возьмем категорию всех полных $\vee$-гомоморфизмов булеанов. Назовем 2-$\vee$*-морфизмом* полного $\vee$-гомоморфизма $\boldsymbol{\rho}: \mathbf{B}(X)\to\mathbf{B}(Y)$ в полный $\vee$-гомоморфизм $\boldsymbol{\sigma}: \mathbf{B}(U)\to\mathbf{B}(V)$ пару (α, β) сохраняющих атомы полных $\vee$-гомоморфизмов $\alpha: \mathbf{B}(X)\to\mathbf{B}(U)$ и $\beta: \mathbf{B}(Y)\to\mathbf{B}(V)$, для которых $\alpha\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho}\beta$. Единичным морфизмом объекта $\boldsymbol{\rho}: \mathbf{B}(X)\to\mathbf{B}(Y)$ этой категории служит пара тождественных отображений $(1_{\mathbf{B}(X)}, 1_{\mathbf{B}(Y)})$.

Теорема 3.2. *Категория всех соответствий и их* 2-*морфизмов эквивалентна категории полных $\vee$-гомоморфизмов булеанов и* 2-$\vee$*-морфизмов между ними.*

3.2. Полукольцо всех соответствий. Рассмотрим далее множество $\boldsymbol{R}(X)$ всевозможных соответствий на непустом множестве X. Относительно операций объединения $\cup$ (сложение) и композиции $\cdot$ (умножение) множество $\boldsymbol{R}(X)$ оказывается аддитивно идемпотентным полукольцом с нулем $\varnothing$ и единицей 1_X. Поскольку на полукольце $\boldsymbol{R}(X)$ имеется естественный порядок $\subseteq$, согласованный с операциями, то $\langle \boldsymbol{R}(X), \cup, \cdot, \subseteq\rangle$ оказывается упорядоченным полукольцом с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом – полным соответствием $X\times X$. Упорядоченное множество $\boldsymbol{R}(X)$ совпадает с булеаном $\boldsymbol{B}(X\times X)$. Поэтому упорядоченное полукольцо $\boldsymbol{R}(X)$ будет *решеточно упорядоченным полукольцом*.

Предложение 3.2. *Для любого непустого множества A алгебраическая система $\langle \boldsymbol{R}(A), \cup, \cdot, \subseteq\rangle$ является решеточно упорядоченным полукольцом.*

Предложение 3.3. *Отображение $\rho\to\rho^{-1}$, $\rho\in \boldsymbol{R}(X)$, является антиавтоморфизмом полукольца $\boldsymbol{R}(X)$.*

Замечание 3.1. Для соответствий выполняется **принцип двойственности**: *если имеется некоторое предложение о соответствиях и операциях объединения и композиции над ними, то, заме-*

няя соответствия на обратные к ним, сохраняя объединения и переставляя сомножители в композициях, получим двойственное предложение, эквивалентное исходному предложению.

Введем в рассмотрение некоторые важные и интересные подполукольца полукольца $\boldsymbol{R}(X)$. Положим: $\boldsymbol{DR}(X)$ – множество всех всюду определенных соответствий на X; $\boldsymbol{IR}(X)$ – множество всех сюръективных соответствий на X; $\boldsymbol{SR}(X)$ – множество всех симметричных соответствий ρ на X ($\rho^{-1}\subseteq\rho$, равносильно, $\rho^{-1} = \rho$). Ясно, что множества $\boldsymbol{DR}(X)$ и $\boldsymbol{IR}(X)$ будут подполукольцами с единицей и без нуля в полукольце $\boldsymbol{R}(X)$, а $\boldsymbol{SR}(X)$ – коммутативным подполукольцом с нулем и единицей в полукольце $\boldsymbol{R}(X)$.

Соответствие ρ назовем *полным*, если $\rho = D(\rho) \times R(\rho)$. Полными соответствиями на множестве X служат *константные отображения* π_x $X\to\{x\}$, $x\in X$. Константные отображения являются минимальными элементами упорядоченного множества всех полных всюду определенных соответствий ρ (т. е. $\rho = X \times R(\rho)$) относительно включения $\subseteq$.

Напомним некоторые полукольцевые понятия. Элемент s полукольца S с единицей 1 называется *обратимым*, если $st = ts = 1$ для некоторого элемента $t\in S$. Полукольцо с тождеством $x + x = x$ называется (аддитивно) *идемпотентным*. Полукольцо с коммутативным умножением само называется *коммутативным*. Элемент a полукольца S называется *правым* (*левым*) *поглощающим* элементом, если $sa = a$ ($as = a$) для всех $s\in S$. Если S – полукольцо с нулем 0 и $s\in S$, то $Ann_l\, s = \{t\in S: ts = 0\}$, $Ann_r\, s = t\in S: st = 0\}$ – соответственно левый и правый аннуляторы элемента s в полукольце S.

Имеют место следующие леммы:

Лемма 3.1. *Для соответствия $\rho\in\boldsymbol{R}(X)$ верны следующие утверждения*:

1. $\rho\in\boldsymbol{DR}(X) \Leftrightarrow Ann_l\,\rho = \{\varnothing\}$.
2. $\rho\in\boldsymbol{IR}(X) \Leftrightarrow Ann_r\,\rho = \{\varnothing\}$.
3. *ρ является правым поглощающим элементом полукольца $\boldsymbol{DR}(X) \Leftrightarrow \rho$ есть полное всюду определенное соответствие*.
4. *ρ является левым поглощающим элементом полукольца $\boldsymbol{IR}(X) \Leftrightarrow \rho$ есть полное сюръективное соответствие*.

Лемма 3.2. *Для произвольного соответствия $\rho\in \boldsymbol{R}(X)$ следующие утверждения эквивалентны*:

1. *ρ есть константное отображение, т. е. $\rho = \pi_x$ для некоторого элемента $x\in X$.*
2. *ρ – минимальный элемент упорядоченного множества всех полных всюду определенных соответствий на множестве X.*
3. *ρ всюду определено и существует единственное ненулевое соответствие $\sigma\in\boldsymbol{R}(X)$, для которого $D(\sigma) \subseteq R(\rho)$ и $R(\sigma) \subseteq R(\rho)$.*

Лемма 3.3. *Соответствие $\rho\in \boldsymbol{R}(X)$ является обратимым элементом полукольца $\boldsymbol{R}(X) \Leftrightarrow \rho$ есть биекция множества X на само себя*.

Лемма 3.4. *Для любых соответствий ρ, $\sigma\in \boldsymbol{R}(X)$ равносильны следующие утверждения*:

1. *$\rho\subseteq\sigma$.*
2. *$R(\pi\rho)\subseteq R(\pi\sigma)$ для всякого константного отображения π из $\boldsymbol{R}(X)$.*

Лемма 3.5. *Соответствие $\rho\in \boldsymbol{R}(X)$ является полным $\Leftrightarrow$ соответствие $\pi\rho$ будет полным всюду определенным соответствием для любого константного соответствия $\pi\in \boldsymbol{R}(X)$, такого, что $\pi\rho\neq\varnothing$.*

Лемма 3.6. *Каждое соответствие $\rho\in\boldsymbol{R}(X)$ однозначно определяется включениями $\pi_x\rho\supseteq\pi_y$, где $x, y\in X$.*

Действительно, для любых $x, y\in X$ имеем: $x\rho y \Leftrightarrow y\in R(\pi_x\rho) \Leftrightarrow \pi_x\rho\supseteq\pi_y$.

Замечание 3.2. Приведенные леммы показывают, что свойства соответствий на произвольном непустом множестве X выражается на языке операции композиции, т. е. в терминах мультипликативной полугруппы полукольца $\boldsymbol{R}(X)$. Но если вместо полукольца $\boldsymbol{R}(X)$ взять его подполукольцо $\boldsymbol{DR}(X)$, то в лемме 3.2 для алгебраического описания константных отображений годится только утверждение 2, использующее порядок $\subseteq$ (определяемый операцией объединения $\cup$), т. е. константные отображения на множестве X характеризуются в терминах именно полукольца $\boldsymbol{DR}(X)$.

Изоморфизмы полуколец соответствий

Опишем все изоморфизмы полуколец $\boldsymbol{R}(X)$ и $\boldsymbol{R}(Y)$ соответствий на любых (непустых) множествах X и Y.

Возьмем произвольную биекцию f: $X\to Y$. Она индуцирует изоморфизм α_f полукольца $\boldsymbol{R}(X)$ на полукольцо $\boldsymbol{R}(Y)$ по следующему правилу:

$$f(x)\alpha_f(\rho)f(y) \Leftrightarrow x\rho y \text{ для любых } \rho\in \boldsymbol{R}(A),\ x, y \in X.$$

Кроме того, имеем биекцию $f\times f$: $X\times X\to Y\times Y$, $(f\times f)(x, y)=(f(x), f(y))$, которая порождает изоморфизм $\boldsymbol{f\times f}$: $\boldsymbol{B}(X\times X)\to\boldsymbol{B}(Y\times Y)$ булеана $\boldsymbol{B}(X\times X)$ на булеан $\boldsymbol{B}(Y\times Y)$. В результате $\alpha_f = \boldsymbol{f\times f}$ – *индуцированная* – биекцией f – биекция между полукольцами $\boldsymbol{R}(X)$ и $\boldsymbol{R}(Y)$.

Предложение 3.4. *Для любой биекции f: $X \to Y$ индуцированная биекция α_f является изоморфизмом полукольца $\boldsymbol{R}(X)$ на полукольцо $\boldsymbol{R}(Y)$.*

Доказательство. Остается проверить, что α_f сохраняет операцию композиции соответствий, т. е. $\alpha_f(\rho\sigma) = \alpha_f(\rho)\alpha_f(\sigma)$ при любых $\rho, \sigma \in \boldsymbol{R}(X)$. В силу приведенных выше определений имеем:

$$\alpha_f(\rho\sigma) = (\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f})(\rho\sigma) = \{(f(x), f(y)): x(\rho\sigma)y\} = \{(f(x), f(y)): \exists z\in A\ (x\rho z\ \&\ z\sigma y\}=$$
$$= \{(f(x), f(y)): \exists f(z)\in B\ (f(x)\alpha_f(\rho)f(z)\ \&\ f(z)\alpha_f(\sigma)f(y))\} =$$
$$= \{(f(x), f(y)): f(x)(\alpha_f(\rho)\alpha_f(\sigma))f(y)\} = \alpha_f(\rho)\alpha_f(\sigma).$$

Полукольцевые изоморфизмы α_f : $\boldsymbol{R}(X) \cong \boldsymbol{R}(Y)$ по биекциям f: $X \to Y$ будем называть *индуцированными*.

Предложение 3.5. *Изоморфизмы полукольца $\boldsymbol{R}(X)$ на полукольцо $\boldsymbol{R}(Y)$ совпадают с индуцированными изоморфизмами.*

Доказательство. В силу предложения 3.4 индуцированные изоморфизмы α_f являются полукольцевыми изоморфизмами.

Обратно, пусть α: $\boldsymbol{R}(X)\to\boldsymbol{R}(Y)$ – произвольный полукольцевой изоморфизм. Определим биекцию f: $X\to Y$, для которой $\alpha = \alpha_f$. В силу леммы 3.2 изоморфизм α устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\{\pi_x$: $x\in X\}$ константных отображений полукольца $\boldsymbol{R}(X)$ и множеством $\{\pi_y$: $b\in Y\}$ константных отображений полукольца $\boldsymbol{R}(Y)$. Получаем биекцию f: $X\to Y$, такую, что $f(x) = y \Leftrightarrow \alpha(\pi_x) = \pi_y$ для любых $x\in X$ и $y\in Y$.

Покажем, что $\alpha(\rho) = \alpha_f(\rho)$ для каждого $\rho\in \boldsymbol{R}(X)$. Пусть b , $d \in Y$, $f(a) = b$ и $f(c) = d$ для подходящих a, $c \in X$. Тогда $\alpha(\pi_a) = \pi_b$ и $\alpha(\pi_c) = \pi_d$. В силу уже установленных соотношений получаем:

$$b\alpha_f(\rho)d \Leftrightarrow f(a)\alpha_f(\rho)f(c) \Leftrightarrow a\rho c \Leftrightarrow \pi_a\rho \supseteq \pi_c \Leftrightarrow \alpha(\pi_a\rho) \supseteq \alpha(\pi_c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\pi_a)\alpha(\rho) \supseteq \alpha(\pi_c) \Leftrightarrow \pi_b\alpha(\rho) \supseteq \pi_d \Leftrightarrow b\alpha(\rho)d$$

3.3. Полукольцо непрерывных соответствий. Соответствие ρ между топологическими пространствами X и Y назовем *непрерывным* (*конепрерывным*), если прообразы при соответствии ρ открытых (замкнутых) в Y множеств открыты (замкнуты) в пространстве X. Приведенное понятие непрерывного соответствия является естественным обобщением определения непрерывного отображения топологических пространств. Для соответствий понятия непрерывности и конепрерывности не эквивалентны; они равносильны для однозначных соответствий.

Если X – топологическое пространство, то можно рассмотреть полукольцо $\boldsymbol{CR}(X)$ всех непрерывных соответствий на X с теми же операциями объединения и композиции соответствий. Легко видеть, что объединение и композиция любых двух непрерывных соответствий на топологическом пространстве суть непрерывные соответствия на этом пространстве. Полукольцо $\boldsymbol{CR}(X)$ решеточно упорядоченное и является подполукольцом полукольца $\boldsymbol{R}(X)$. Отметим, что полные всюду определенные соответствия на X являются непрерывными, в частности непрерывными будут константные отображения π_x, $x \in X$.

Подобно предложению 3.5 доказывается следующая теорема.

Теорема 3.3. *Для любых топологических пространств X и Y изоморфизмы полуколец $\boldsymbol{CR}(X)$ и $\boldsymbol{CR}(Y)$ их непрерывных соответствий совпадают с изоморфизмами α_f по различным гомеоморфизмам f: $X\to Y$.*

Следствие 3.1. *Каждое топологическое пространство X однозначно, с точностью до гомеоморфизма, определяется полукольцом $\boldsymbol{CR}(X)$ всех непрерывных соответствий на нем.*

Заметим, что теорема 3.3 и следствие 3.1 верны и для полуколец всех конепрерывных соответствий на топологических пространствах.

Ранее изучались изоморфизмы полугрупп соответствий с замкнутыми графиками на некоторых классах топологических пространств. Замкнутые соответствия на топологическом пространстве X, т. е. соответствия, являющиеся замкнутыми подмножествами тихоновского произведения $X\times X$, изучал K. Maggil [45]. Он назвал T_1-пространство X σ-пространством в случае, когда композиция любых двух замкнутых соответствий на X также будет замкнутым соответствием, и обозначил через $\sigma[X]$ полугруппу всех замкнутых соответствий на σ-пространстве X с операцией композиции соответствий. Отметим, что объединение двух замкнутых соответствий на топологическом пространстве всегда будет замкнутым соответствием. Поэтому $\sigma[X]$ является подполукольцом полукольца $\boldsymbol{R}(X)$ для всякого σ-пространства X.

K. Maggil описал все изоморфизмы полугрупп $\sigma[A]$ и $\sigma[B]$, доказав следующую теорему [45, theorem (3.3)]:

Для любой биекции α между полугруппами $\sigma[X]$ и $\sigma[Y]$ замкнутых соответствий на произвольных σ-пространствах X и Y эквивалентны следующие утверждения: α – изоморфизм; существует гомеоморфизм f пространства X на пространство Y, такой, что $\alpha(\rho) = f^{-1}\rho f$ для всех соответствий $\rho\in \sigma[X]$; $\alpha = \alpha_f$ для некоторого гомеоморфизма f пространства X на пространство Y.

Для дискретного пространства X имеем $\sigma[X] = \boldsymbol{R}(X)$. Поэтому из данной теоремы и предложения 3.4 вытекает предложение 3.5, а также

Следствие 3.2. *Мультипликативные изоморфизмы полуколец $\boldsymbol{R}(X)$ и $\boldsymbol{R}(Y)$ являются полукольцевыми изоморфизмами*.

В статье [46] доказана определяемость хаусдорфовых пространств полугруппой всех своих замкнутых соответствий с компактными образами.

Заключение

Сформулируем наиболее важные результаты исследований по проекту «Полукольца и их связи» за 2019 год.

1. Описаны все изоморфизмы решеток подалгебр (как всевозможных, так и с единицей) полуполей непрерывных положительных функций, рассматриваемых с обычным поточечным сложением, на топологических пространствах.

2. Описаны все изоморфизмы решеток подалгебр (как любых, так и с единицей) полуполей непрерывных положительных функций с max-сложением.

3. Начато исследование полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций с расширенным сложением.

4. Начато изучение полуколец соответствий на произвольном множестве.

5. Доказано, что изоморфизмы полуколец всех непрерывных соответствий на любых топологических пространствах индуцируются гомеоморфизмами этих пространств.

6. Установлена абсолютная определяемость всякого топологического пространства полукольцом всех непрерывных соответствий на нем.

7. На базе выполненных в 2019 году исследований сделаны доклады (Арзамас, Казань, Киров, Москва, Самара, Сыктывкар) на международных и всероссийских математических конференциях и семинарах. Всего по теме проекта в 2019 году опубликовано 11 новых работ [11–17; 38–40; 48], включая 4 плановые статьи [4 (в печати); 39; 40; 48] в базах данных Scopus, Web of Science.

8. В рамках госзадания 2019 года написаны методические работы [1; 2; 10; 18; 31; 32], переиздано учебное пособие [35].

В целом по теме «Полукольца и их связи», проект № 1.5879/БЧ (2017–2019), решены следующие задачи:

(1) завершено описание изоморфизмов решеток подалгебр полуколец и полуполей непрерывных числовых функций на топологических пространствах;

(2) получены новые результаты по теории полуколец непрерывных частичных числовых функций, как с обычным сложением, так и с расширенным сложением;

(3) продолжено исследование структуры конечных полуколец с циклическим умножением (с коммутативным и с некоммутативным сложением);

(4) начато систематическое изучение полуколец непрерывных соответствий на топологических пространствах;

(5) опубликовано 5 статей (и 2 приняты к печати) в математических журналах из баз данных Web of Science, Scopus;

(6) все основные результаты, полученные в рамках проекта, доложены на международных и всероссийских научных конференциях;

(7) опубликован целый ряд математических и методических статей (РИНЦ), переизданы 4 учебных пособия для студентов вузов (Юрайт);

(8) по тематике проекта под руководством Е. М. Вечтомова защищены кандидатские диссертации И. В. Орловой «Циклические полукольца с некоммутативным сложением» в 2017 г. и О. В. Чермных «Решеточно упорядоченные полукольца и их функциональные представления» в 2018 г., В. В. Сидоров готовит к защите докторскую диссертацию «Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных действительнозначных функций».

Полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в рамках следующих направлений:

1) построение общей теории подалгебр полуколец непрерывных числовых функций;

2) развитие теории полуколец непрерывных частичных числовых функций, в частности нахождения двойственностей для категории таких полуколец;

3) изучение структурных свойств полуколец соответствий, как на произвольных множествах, так и полуколец непрерывных соответствий на топологических пространствах.

Результаты работы будут востребованы в дальнейших исследованиях по функциональной алгебре и теории полуколец, могут быть использованы в качестве материала при разработке новых математических курсов, в проведении научных алгебраических конференций и семинаров, послужат источником для подготовки новых монографий и учебных пособий по общей теории полуколец и теории полуколец непрерывных числовых функций.

Список литературы

1. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Английский язык в математическом образовании и науке // XXXVIII международный научный семинар преподавателей математики и информатики педвузов и университетов : сб. матер. М. ; Самара : Самарский филиал МГПУ. С. 95–98.
2. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Кировская научно-методическая школа по математическому образованию // 3-я Национальная (Всероссийская) научная конференция «Математическое моделирование и информационные технологии : сб. матер. Сыктывкар : Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. С. 52–54.
3. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Подалгебры в полукольцах непрерывных частичных числовых функций // Междунар. алгебр. конф., посв. 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша : тезисы докл. М. : МГУ, 2018. С. 49–50.
4. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Подалгебры в полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2020. Т. 23. 0,8 п. л. (в печати).
5. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.* Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып 2. С. 493–510.
6. *Вечтомов Е. М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. М. : ВИНИТИ, 1990. Т. 28. С. 3–46.
7. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. М. : ВИНИТИ, 1991. Т. 29. С. 119–191.
8. *Вечтомов Е. М.* Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 687–693.
9. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца. Киров : Изд-во Вятского государственного педагогического университета, 2000. 44 с.
10. *Вечтомов Е. М.* Нерешенные проблемы российского математического образования // Математический вестник педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. 2019. Вып. 21. С. 25–36.
11. *Вечтомов Е. М.* О полукольцах частичных функций с расширенным сложением // Междунар. конф., посв. 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ : тезисы докл. М. : Мехмат МГУ им. М. В. Ломоносова, 2019. С. 18–19.
12. *Вечтомов Е. М.* Бинарные отношения и гомоморфизмы булеанов // Вестник СыктГУ. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (30). С. 3–15.
13. *Вечтомов Е. М.* Алгебраические характеризации дискретности тихоновских пространств // Материалы междунар. конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посв. 125-летию Н. Г. Чеботарева и 75-летию М. М. Арсланова. Казань : КФУ, 2019. С. 92–93.
14. *Вечтомов Е. М.* От стоунова представления дистрибутивных решеток к функциональным представлениям полуколец // XV Колмогоровские чтения : сб. статей участников Междунар. научно-практ. конф., посв. памяти профессора М. И. Зайкина. Арзамас : Арзамас. филиал ННГУ, 2019. С. 175–180.
15. *Вечтомов Е. М.* О непрерывных соответствиях между топологическими пространствами // Advanced science. 2019. № 3. С. 4–9.
16. *Вечтомов Е. М.* Определяемость топологических пространств полугруппой непрерывных соответствий // 3-я Национальная (Всероссийская) научная конференция «Математическое моделирование и информационные технологии : сб. матер. Сыктывкар : Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. С. 51–52.
17. *Вечтомов Е. М.* О полукольце всех соответствий на множестве // Advanced science. 2019. № 4. С. 4–8.
18. *Вечтомов Е. М., Абрамова И. В., Шилова З. В.* Методика преподавания порядковых структур в обучении студентов вуза // Перспективы науки и образования. 2019. № 5. С. 170–188.
19. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций // CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications" Yekaterinburg, Russia, February 5–11, 2017. С. 20–29.
20. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 1 / под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. 384 с.
21. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 2 / под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. 316 с.
22. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2012. 218 с.
23. *Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В.* Полукольца непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.
24. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр // Вестник Сыктывкар. ун-та. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 11. С. 112–125.
25. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16. № 3. С. 63–103.
26. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Определяемость хьюиттовских пространств решетками подалгебр полуполей непрерывных положительных функций с max-сложением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. Вып. 3. С. 78–88.

27. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Отчет о научно-исследовательской работе по теме «Полукольца и их связи» (базовая часть государственного задания Минобрнауки РФ, № 1.5879.2017/БЧ, 2017–2019), промежуточный отчет. Киров : ВятГУ, 2018. 30 с.

28. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Отчет о научно-исследовательской работе по теме «Полукольца и их связи» (базовая часть государственного задания Минобрнауки РФ, № 1.5879.2017/БЧ, 2017–2019), промежуточный отчет. Киров : ВятГУ, 2019. 30 с.

29. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Полукольца и их связи. I // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2018. Вып. 20. С. 73–89.

30. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Полукольца и их связи. II // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2019. Вып. 21. С. 68–86.

31. *Вечтомов Е. М., Тулупов С. Н.* Представления конечных дистрибутивных решеток // Математический вестник педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. 2019. Вып. 21. С. 113–132.

32. *Вечтомов Е. М., Шувалов К. И.* Построение конечных топологических пространств // Advanced science. 2019. № 1. С. 5–14.

33. *Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н.* О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.

34. *Гретцер Г.* Теория решеток / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 456 с.

35. *Лубягина Е. Н., Вечтомов Е. М.* Линейная алгебра : уч. пособие для вузов. М. : Юрайт, 2019. 150 с.

36. *Сидоров В. В.* Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций с max-сложением // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19. Вып. 6. С. 153–189.

37. *Сидоров В. В.* Определяемость полуполей непрерывных положительных функций решетками их подалгебр // Математический сборник. 2016. Т. 207. № 9. С. 91–110.

38. *Сидоров В. В.* Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных действительнозначных функций с max-сложением // Материалы междунар. конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посв. 125-летию Н. Г. Чеботарева и 75-летию М. М. Арсланова. Казань : КФУ, 2019. С. 160–162.

39. *Сидоров В. В.* Изоморфизмы решеток подалгебр полуполей непрерывных положительных функций // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60. № 3. С. 676–694.

40. *Сидоров В. В.* Изоморфизмы решеток подалгебр полуполей непрерывных положительных функций с max-сложением // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 1493–1530.

41. *Энгелькинг Р.* Общая топология / пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.

42. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. N. Y. : Springer-Verlang, 1976. 300 p.

43. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

44. *Hewitt E.* Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64. No. 1. Pp. 45–99.

45. *Maggil K. D.* Isomorphisms of triform semigroups // J. Austral Math. Soc. 1969. Vol. 10. Pp. 185–193.

46. *O'Reilly S. B.* The characteristic semigroup of a topological space // General Topology and Applications. 1975. Vol. 5. № 2. Pp. 95–106.

47. *Sidorov V. V.* Determinability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras with unit of semifields of continuous positive functions with max-plus // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 4. Pp. 741–750.

48. *Sidorov V. V.* Determinability of semirings of continuous nonnegative functions with max-plus by the lattices of their subalgebras // Lobachevscii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. No. 1. Pp. 90–100.

Semi-rings and their relationship. III

E. M. Vechtomov[1], V. V. Sidorov[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru

[2]PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Abstract. The main results of research in 2019 on the scientific project "Semicircles and their connections" are presented, and the most significant results obtained by the authors on this project as a whole are indicated. All isomorphisms of lattices of subalgebras (any, as well as with unity) of semifields of continuous positive functions, both with normal addition and with max-addition, are described. The first results on semi-rings of continuous partial real-valued functions with extended addition are obtained. It is established that isomorphisms of semi-rings of all continuous correspondences on any topological spaces are induced by homeomorphisms of these spaces.

Keywords: semi-ring, the topological space of the semi-ring of continuous functions, isomorphism of lattices of subalgebras of partial function, compliance.

References

1. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Anglijskij yazyk v matematicheskom obrazovanii i nauke* [English in mathematical education and science] // *XXXVIII mezhdunarodnyj nauchnyj seminar prepodavatelej matematiki i informatiki pedvuzov i universitetov: sb. mater.* – XXXVIII international scientific seminar of teachers of mathematics and informatics of pedagogical universities : coll. mater. M. ; Samara. Samara branch of MSPU. Pp. 95–98.

2. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Kirovskaya nauchno-metodicheskaya shkola po matematicheskomu obrazovaniyu* [Kirov scientific and methodological school for mathematical education] // *3-ya Nacional'naya (Vserossijskaya) nauchnaya konferenciya "Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye tekhnologii: sb. mater."* – 3rd national (all-Russian) scientific conference "Mathematical modeling and information technologies : coll. mater." Syktyvkar. SSU n. a. Pitirim Sorokin. 2019. Pp. 52–54.

3. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Podalgebry v polukol'cah nepreryvnyh chastichnyh chislovyh funkcij* [Subalgebras in semi-rings of continuous partial numerical functions] // *Mezhdunar. algebr. konf., posv. 110-letiyu so dnya rozhdeniya professora A. G. Kurosha : tezisy dokl.* – International algebra conf., dedicated to the 110th anniversary of the birth of Professor A. G. Kurosh : theses of the Moscow State University. 2018. Pp. 49–50.

4. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Podalgebry v polukol'cah nepreryvnyh chastichnyh dejstvitel'noznachnyh funkcij* [Subalgebras in semi-rings of continuous partial real-valued functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2020. Vol. 23. 0,8 p. l. (in print).

5. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Semenova I. A. Polukol'ca nepreryvnyh neotricatel'nyh funkcij: delimost', idealy, kongruencii* [Semi-rings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 1998. Vol. 4. Is. 2. Pp. 493–510.

6. *Vechtomov E. M. Voprosy opredelyaemosti topologicheskih prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnyh funkcij* [Questions of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions] // *Itogi nauki i tekhn. Algebra. Topologiya. Geometriya* – Results of science and technology. Algebra. Topology. Geometry. M. All-Russian Institute of scientific and technical information. 1990. Vol. 28. Pp. 3–46.

7. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij. Algebraicheskie aspekty* [Rings of continuous functions. Algebraic aspects] // *Itogi nauki i tekhn. Algebra. Topologiya. Geometriya* – Results of science and technology Algebra. Topology. Geometry. M. All-Russian Institute of scientific and technical information. 1991. Vol. 29. Pp. 119–191.

8. *Vechtomov E. M. Reshetka podalgebr kolec nepreryvnyh funkcij i h'yuittovskie prostranstva* [Lattice of subalgebras of rings of continuous functions and Hewitt spaces] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1997. Vol. 62. No. 5. Pp. 687–693.

9. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca* [Introduction to the semi-rings]. Kirov. Vyatka State Pedagogical University. 2000. 44 p.

10. *Vechtomov E. M. Nereshennye problemy rossijskogo matematicheskogo obrazovaniya* [Unsolved problems of Russian mathematical education] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i un-tov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical colleges and universities of the Volga-Vyatka region. 2019. Is. 21. Pp. 25–36.

11. *Vechtomov E. M. O polukol'cah chastichnyh funkcij s rasshirennym slozheniem* [On semi-rings of partial functions with extended addition] // *Mezhdunar. konf., posv. 90-letiyu kafedry vysshej algebry mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta MGU : tezisy dokl.* – International conf., dedicated to the 90th anniversary of the Department of higher algebra of the faculty of mechanics and mathematics of the Moscow State University : theses of the reports. Mech.-math. faculty of M. V. Lomonosov Moscow State University. 2019. Pp. 18–19.

12. *Vechtomov E. M. Binarnye otnosheniya i gomomorfizmy buleanov* [Binary relations and Boolean homomorphisms] // *Vestnik SyktGU. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar State University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2019. Is. 1 (30). Pp. 3–15.

13. *Vechtomov E. M. Algebraicheskie harakterizacii diskretnosti tihonovskih prostranstv* [Algebraic characterizations of discreteness of Tikhonov spaces] // *Materialy mezhdunar. konf. "Algebra i matematicheskaya logika: teoriya i prilozheniya", posv. 125-letiyu N. G. Chebotareva i 75-letiyu M. M. Arslanova* – Proceedings of the international conference "Algebra and mathematical logic: theory and applications", dedicated to the 125th anniversary of N. G. Chebotarev and the 75th anniversary of M. M. Arslanov. Kazan. KFU. 2019. Pp. 92–93.

14. *Vechtomov E. M. Ot stounova predstavleniya distributivnyh reshetok k funkcional'nym predstavleniyam polukolec* [From Stone representations of distributive lattices to functional representations of half-rings] // *XV Kolmogorovskie chteniya : sb. statej uchastnikov Mezhdunar. nauchno-prakt. konf., posv. pamyati professora M. I. Zajkina* – XV Kolmogorov readings: collection of articles of participants of the international conference. scientific and practical conf., dedicated to the memory of Professor M. I. Zaikin. Arzamas. Arzamas branch of NNSU. 2019. Pp. 175–180.

15. *Vechtomov E. M. O nepreryvnyh sootvetstviyah mezhdu topologicheskimi prostranstvami* [On continuous correspondences between topological spaces] // *Advanced science* – Advanced science. 2019. No. 3. Pp. 4–9.

16. *Vechtomov E. M. Opredelyaemost' topologicheskih prostranstv polugruppoj nepreryvnyh sootvetstvij* [Definability of topological spaces by a semigroup of continuous correspondences] // *3-ya Nacional'naya (Vserossijskaya) nauchnaya konferenciya "Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye tekhnologii : sb. mater."* – 3rd national (all-Russian) scientific conference "Mathematical modeling and information technologies : coll. mater." Syktyvkar. SSU n. a. Pitirim Sorokin. 2019. Pp. 51–52.

17. *Vechtomov E. M. O polukol'ce vsekh sootvetstvij na mnozhestve* [On the half-ring of all correspondences on the set] // *Advanced science* – Advanced science. 2019. No. 4. Pp. 4–8.

18. *Vechtomov E. M., Abramova I. V., Shilova Z. V. Metodika prepodavaniya poryadkovyh struktur v obuchenii studentov vuza* [Methods of teaching ordinal structures in the training of University students] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya* – Perspectives of science and education. 2019. No. 5. Pp. 170–188.

19. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Polukol'ca nepreryvnyh chastichnyh dejstvitel'noznachnyh funkcij* [Semirings of continuous partial real-valued functions] // CEUR-WS. org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications" Yekaterinburg, Russia, February 5–11, 2017. Pp. 20–29.

20. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Elementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 1* [Elements of functional algebra : monograph : in 2 vols. Vol. 1] / ed. by E. M. Vechtomov. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 384 p.

21. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Elementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 2* [Elements of functional algebra : monograph : in 2 vols. Vol. 2] / ed. by E. M. Vechtomov. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 316 p.

22. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnyh V. V. Elementy teorii polukolec : monografiya* [Elements of the semi-ring theory : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 218 p.

23. *Vechtomov E. M., Mihalev A. V., Sidorov V. V. Polukol'ca nepreryvnyh funkcij* [Semi-rings of continuous functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2016. Vol. 21. Is. 2. Pp. 53–131.

24. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Opredelyaemost' polukolec nepreryvnyh funkcij reshetkoj ih podalgebr* [Definability of semi-rings of continuous functions by the lattice of their subalgebras] // *Vestnik Syktyvkar. un-ta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2010. Is. 11. Pp. 112–125.

25. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Izomorfizmy reshetok podalgebr polukolec nepreryvnyh neotricatel'nyh funkcij* [Isomorphisms of lattices of subalgebras of semi-rings of continuous nonnegative functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2010. Vol. 16. No. 3. Pp. 63–103.

26. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Opredelyaemost' h'yuittovskih prostranstv reshetkami podalgebr polupolej nepreryvnyh polozhitel'nyh funkcij c max-slozheniem* [Definability of Hewitt spaces by lattices of subalgebras of semifields of continuous positive functions with max-addition] // *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* – Proceedings of Institute of mathematics and mechanics UrB RAS. 2015. Vol. 21. Is. 3. Pp. 78–88.

27. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Otchet o nauchno-issledovatel'skoj rabote po teme "Polukol'ca i ih svyazi" (bazovaya chast' gosudarstvennogo zadaniya Minobrnauki RF, № 1.5879.2017/БЧ, 2017–2019), promezhutochnyj otchet* [Report on research work on "Semi-rings and their relationship" (basic part of state task of the Ministry of education of the Russian Federation, No. 1.5879.2017/БЧ, 2017-2019), interim report]. Kirov. VyatSU. 2018. 30 p.

28. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Otchet o nauchno-issledovatel'skoj rabote po teme "Polukol'ca i ih svyazi" (bazovaya chast' gosudarstvennogo zadaniya Minobrnauki RF, № 1.5879.2017/БЧ, 2017–2019), promezhutochnyj otchet* [Report on research work on the topic "Semi-rings and their relations" (basic part of the state task of the Ministry of education and science of the Russian Federation, no.1.5879.2017/БЧ, 2017-2019), interim report]. Kirov. VyatSU. 2019. 30 p.

29. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Polukol'ca i ih svyazi. I* [Semi-rings and their reltions. I] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutions and universities of the Volga-Vyatka region. 2018. Is. 20. Pp. 73–89.

30. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Polukol'ca i ih svyazi. II* [Semi-rings and their relations. II] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutions and universities of the Volga-Vyatka region. 2019. Is. 21. Pp. 68–86.

31. *Vechtomov E. M., Tulupov S. N. Predstavleniya konechnyh distributivnyh reshetok* [Representations of finite distributive lattices] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i un-tov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical colleges and universities of the Volga-Vyatka region. 2019. Is. 21. Pp. 113–132.

32. *Vechtomov E. M., Shuvalov K. I. Postroenie konechnyh topologicheskih prostranstv* [Construction of finite topological spaces] // *Advanced science* – Advanced science. 2019. No. 1. Pp. 5–14.

33. *Gelfand I. M., Kolmogorov A. N. O kol'cah nepreryvnyh funkcij na topologicheskih prostranstvah* [On rings of continuous functions on topological spaces] // *Dokl. AN SSSR* – Report AS USSR. 1939. Vol. 22. No. 1. Pp. 11–15.

34. *Gretzer G. Teoriya reshetok* [Theory of lattices] / transl. from Engl. M. Mir. 1982. 456 p.

35. *Lubyagina E. N., Vechtomov E. M. Linejnaya algebra : uch. posobie dlya vuzov* [Linear algebra : textbook for universities]. M. Yurayt. 2019. 150 p.

36. *Sidorov V. V. Izomorfizmy reshetok podalgebr polukolec nepreryvnyh neotricatel'nyh funkcij s max-slozheniem* [Isomorphisms of lattices of subalgebras of semi-rings of continuous nonnegative functions with max-addition] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2014. Vol. 19. Is. 6. Pp. 153–189.

37. *Sidorov V. V. Opredelyaemost' polupolej nepreryvnyh polozhitel'nyh funkcij reshetkami ih podalgebr* [Definability of semifields of continuous positive functions by lattices of their subalgebras] // *Matematicheskij sbornik* – Mathematical collection. 2016. Vol. 207. No. 9. Pp. 91–110.

38. *Sidorov V. V. Izomorfizmy reshetok podalgebr polukolec nepreryvnyh dejstvitel'noznachnyh funkcij s max-slozheniem* [Isomorphisms of lattices of subalgebras of semi-rings of continuous real-valued functions with max-addition] // *Materialy mezhdunar. konf. "Algebra i matematicheskaya logika: teoriya i prilozheniya", posv. 125-letiyu N. G. Chebotareva i 75-letiyu M. M. Arslanova* – Proceedings of the international conference "Algebra and mathematical logic: theory and applications", dedicated to the 125th anniversary of N. G. Chebotarev and the 75th anniversary of M. M. Arslanov. Kazan. KFU. 2019. Pp. 160–162.

39. *Sidorov V. V. Izomorfizmy reshetok podalgebr polupolej nepreryvnyh polozhitel'nyh funkcij* [Isomorphisms of lattices of subalgebras of semifields of continuous positive functions] // *Sibirskij matematicheskij zhurnal* – Siberian mathematical journal. 2019. Vol. 60. No. 3. Pp. 676–694.

40. *Sidorov V. V. Izomorfizmy reshetok podalgebr polupolej nepreryvnyh polozhitel'nyh funkcij s max-slozheniem* [Isomorphisms of lattices of subalgebras of semifields of continuous positive functions with max-addition] // *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* – Siberian electronic mathematical news. 2019. Vol. 16. Pp. 1493–1530.

41. *Engelking R. Obshchaya topologiya* [General topology] / transl. from Engl. M. Mir. 1986. 752 p.

42. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. N. Y. : Springer-Verlang, 1976. 300 p.

43. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

44. *Hewitt E.* Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64. No. 1. Pp. 45–99.

45. *Maggil K. D.* Isomorphisms of triform semigroups // J. Austral Math. Soc. 1969. Vol. 10. Pp. 185–193.

46. *O'Reilly S. B.* The characteristic semigroup of a topological space // General Topology and Applications. 1975. Vol. 5. No. 2. Pp. 95–106.

47. *Sidorov V. V.* Determinability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras with unit of semifields of continuous positive functions with max-plus // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 4. Pp. 741–750.

48. *Sidorov V. V.* Determinability of semirings of continuous nonnegative functions with max-plus by the lattices of their subalgebras // Lobachevscii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. No. 1. Pp. 90–100.