УДК 517.16 DOI 10.25730/VSU.0536.20.005

Неравенство Ки Фана и аффинные преобразования вещественной прямой

А. В. Ястребов[1], К. Е. Шитуева[2]
[1]доктор педагогических наук, профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского. Россия, г. Ярославль. E-mail: alexander.yastrebov47@gmail.com
[2]студент, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского. Россия, г. Ярославль. E-mail: shituewa2011@yandex.ru

Аннотация. На конфигурацию U положительных чисел вещественной прямой действует аффинное преобразование, переводящее ее в конфигурацию U'. Для арифметико-геометрических средних этих конфигураций исследуются неравенства, аналогичные классическому мультипликативному неравенству Ки Фана.

Ключевые слова: аффинное преобразование, кривая Ки Фана, неравенство Ки Фана, область Ки Фана, парадоксальное неравенство Ки Фана, парадоксальная область Ки Фана.

Постановка задач и обозначения. Воспроизведем классическую конструкцию Ки Фана для двух чисел [1, гл. 4] и придадим ей геометрический смысл.

Пусть числа a_1 и a_2 принадлежат промежутку $(0, 0.5]$. Построим числа $a_i' = 1 - a_i$. Обозначим через A и G соответственно среднее арифметическое и среднее геометрическое первой пары чисел, а через A' и G' – аналогичные средние второй пары чисел. В этих условиях справедливо неравенство $\frac{G}{G'} \leq \frac{A}{A'}$, называемое мультипликативным неравенством Ки Фана.

В статье [4] было сделано следующее геометрическое наблюдение: преобразование $a_i \to a_i'$ является центральной симметрией с центром 0.5. Геометрическая точка зрения позволяет расширить подход к неравенствам Ки Фана и рассматривать другие расположения центра симметрии относительно конфигурации точек, а также другие геометрические преобразования. Так, в статьях [2; 4] рассматривалась связь неравенства Ки Фана с параллельными переносами, гомотетиями и симметриями с произвольными центрами. В статье [3] была описана педагогическая переработка процесса постановки математической задачи в учебный проект для школьников.

В данной статье сделан следующий естественный шаг: конфигурация точек вещественной прямой подвергается аффинному преобразованию, а затем для двух конфигураций, исходной и новой, сравнивается отношение их средних геометрических и средних арифметических.

Введем необходимые обозначения. Пусть $U = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – конечная непостоянная последовательность чисел (конфигурация точек), удовлетворяющая неравенствам

$$0 < a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = b. \tag{1}$$

Условимся обозначать среднее арифметическое этих чисел одним из равноправных символов $A = A(U) = A(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 + a_2, + \cdots + a_n)/n$. Аналогично, среднее геометрическое обозначим одним из символов $G = G(U) = G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

Пусть $\mathcal{A}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – аффинное преобразование вещественной прямой. Известно (и это легко доказать), что оно задается равенством $\mathcal{A}(x) = px + q$, где $p \neq 0$. В частности,

$$a_i' = pa_i + q, \ i = \overline{1, n} \tag{2}$$

Если образы всех точек исходной конфигурации являются положительными числами, то в этом случае можно рассмотреть конфигурацию $U' = (a_1', a_2', \dots, a_n')$, вычислить арифметико-геометрические средние $G(U)$, $A(U)$, $G(U')$, $A(U')$ и сравнить величины $\frac{G(U)}{G(U')}$ и $\frac{A(U)}{A(U')}$. Впрочем, сделать это можно далеко не всегда, что показывает простой пример: $U = (1, 3)$, $\mathcal{A}(x) = x - 2$. В этом случае $U' = (-1, 1)$, а значит, мы не можем вычислить среднее геометрическое $G(U')$. Этот пример дает основания для нижеследующего определения и для первой из задач, решаемых в данной статье.

Определение 1. Аффинное преобразование называется допустимым относительно нетривиальной конфигурации положительных чисел, если образы всех чисел конфигурации положительны.

Задача 1. Для конфигурации U найти ограничения на коэффициенты аффинного преобразования $\mathcal{A}$, которые были бы необходимы и достаточны для того, чтобы это аффинное преобразование было допустимым.

Задачу 1 можно переформулировать, если учесть, что множество аффинных преобразований находится в биективном соответствии с множеством точек координатной плоскости pOq, из которой удалена ось ординат.

Задача 1А. На плоскости pOq преобразований найти область допустимых аффинных преобразований.

Рассмотрим еще несколько примеров, которые подведут нас к другим определениям и другим задачам, решаемым в данной статье. Подвергнем конфигурацию $U = (1, 3)$ трем разным аффинным преобразованиям: $\mathcal{A}_1(x) = 2x$, $\mathcal{A}_2(x) = x + 1$, $\mathcal{A}_3(x) = x - 0.5$. *В первом случае* мы получим, что $U' = (2, 6)$, поэтому $\frac{G(U)}{G(U')} = \frac{1}{2} = \frac{A(U)}{A(U')}$. Оказывается, что в неравенстве Ки Фана равенство может достигаться даже для нетривиальной конфигурации. *Во втором случае* $U' = (2, 4)$, поэтому $\frac{G(U)}{G(U')} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \frac{2}{3} = \frac{A(U)}{A(U')}$. Этот результат можно считать естественным. *В третьем случае* $U' = (0.5, 2.5)$, поэтому $\frac{G(U)}{G(U')} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} > \frac{4}{3} = \frac{A(U)}{A(U')}$. Оказывается, что в неравенстве Ки Фана имеет место противоположный знак. Теперь становятся естественными следующие определения.

Определение 2. Кривой Ки Фана нетривиальной конфигурации U называется множество всех точек в области допустимых преобразований, для которых выполняется равенство $\frac{G(U)}{G(U')} = \frac{A(U)}{A(U')}$.

Определение 3. Областью Ки Фана нетривиальной конфигурации U называется множество всех точек в области допустимых преобразований, для которых выполняется неравенство $\frac{G(U)}{G(U')} < \frac{A(U)}{A(U')}$.

Определение 4. Парадоксальной областью Ки Фана нетривиальной конфигурации U называется множество всех точек в области допустимых преобразований, для которых выполняется неравенство $\frac{G(U)}{G(U')} > \frac{A(U)}{A(U')}$.

Вторая из решаемых нами задач формулируется следующим образом.

Задача 2. В области допустимых преобразований найти кривую Ки Фана, а также область и парадоксальную область Ки Фана.

Область допустимых преобразований. В нижеследующих теоремах содержится решение поставленных задач.

Теорема 1. Аффинное преобразование $\mathcal{A}(x) = px + q$ является допустимым относительно конфигурации U тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов выполняется одна из двух систем неравенств $\begin{cases} p < 0 \\ q > -bp \end{cases}$ или $\begin{cases} p > 0 \\ q > -ap \end{cases}$. Здесь b и a – наибольшее и наименьшее числа конфигурации соответственно.

Доказательство. При $p > 0$ соотношения (1) и (2) влекут за собой неравенства $a'_1 \le a'_2 \le \dots \le a'_n$. Все образы чисел исходной конфигурации положительны тогда и только тогда, когда $a'_1 > 0$. Другими словами, $pa_1 + q > 0$, откуда $q > -a_1 p = -ap$.

При $p < 0$ соотношения (1) и (2) влекут за собой неравенства $a'_1 \ge a'_2 \ge \dots \ge a'_n$. Все образы чисел исходной конфигурации положительны тогда и только тогда, когда $a'_n > 0$. Другими словами, $pa_n + q > 0$, откуда $q > -a_n p = -bp$.

Существование кривой Ки Фана

Теорема 2. Для любого числа $p_0 \ne 0$ существует и единственно такое число q_0, что точка (p_0, q_0) на плоскости преобразований принадлежит кривой Ки Фана.

Доказательство. Начнем с того, что перепишем уравнение кривой Ки Фана $\frac{G(U)}{G(U')} = \frac{A(U)}{A(U')}$ в удобном для нас виде $\frac{A(U')}{G(U')} = \frac{A(U)}{G(U)}$. Арифметико-геометрические средние исходной конфигурации, которые не зависят от p и q, обозначим для краткости как A и G соответственно, а элементы левой части предыдущего равенства запишем подробно. Предыдущее равенство примет вид

$$\frac{A(pa_1+q, pa_2+q, \dots, pa_n+q)}{G(pa_1+q, pa_2+q, \dots, pa_n+q)} = \frac{A}{G} \tag{3}$$

По определению среднего арифметического получаем, что числитель левой части имеет вид $pA + q$. Таким образом, уравнение (3) кривой Ки Фана приобретает вид

$$\frac{pA+q}{\sqrt[n]{(pa_1+q)(pa_2+q,)\cdots(pa_n+q)}} = \frac{A}{G} \tag{4}$$

Заметим, что выражение $A(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ можно рассматривать как функцию двух переменных p и q, поскольку эти переменные участвуют в задании чисел a'_i в соответствии с формулой (2).

В дальнейшем будем обозначать его как $A'(p,q)$ или просто как A'. Аналогично, выражение $G(a_1', a_2', \dots, a_n')$ будем обозначать как $G'(p,q)$ или как G'.

Дальнейшее доказательство будет состоять из трех частей. Сначала мы докажем существование искомой точки q для $p_0 < 0$, затем ее существование для $p_0 > 0$, а затем единообразно докажем ее единственность.

1) Зафиксируем число $p_0 < 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(q) := \frac{A'(p_0,q)}{G'(p_0,q)} = \frac{p_0A+q}{\sqrt[n]{(p_0a_1+q)(p_0a_2+q,)\cdots(p_0a_n+q)}}$ (здесь символ $:=$ означает равенство по определению). Для нее вычислим два предела при стремлении q к границам области определения этой функции: $\lim_{q\to+\infty}\varphi(q)$ и $\lim_{q\to w+0}\varphi(q)$. Здесь w – это ордината точки на границе области допустимых преобразований, которая соответствует точке p_0 и выражается равенством $w = -bp_0 = -a_np_0$.

Вычисляя первый предел, предварительно поделим числитель и знаменатель на q и внесем делитель q под знак радикала. Получим, что $\lim_{q\to+\infty}\varphi(q) = \lim\limits_{q\to+\infty}\frac{p_0A/q+1}{\sqrt[n]{(p_0a_1/q+1)(p_0a_2/q+1,)\cdots(p_0a_n/q+1)}} = 1$.

Вычисляя второй предел, выпишем отдельно последний сомножитель под знаком радикала, соответствующий наибольшему числу в конфигурации точек: $\lim_{q\to w+0}\varphi(q) = \lim\limits_{q\to w+0}\frac{p_0A+q}{\sqrt[n]{(p_0a_1+q)\cdots(p_0a_{n-1}+q)(p_0a_n+q)}}$.

Прежде всего, предел числителя положителен, поскольку $\lim\limits_{q\to w+0}(p_0A+q) = p_0(A-b) > 0$. Кроме того, пределы всех сомножителей под знаком радикала, *кроме последнего*, положительны: $\lim\limits_{q\to w+0}(p_0a_i+q) = p_0(a_i-b) > 0$. Предел последнего сомножителя равен нулю: $\lim\limits_{q\to w+0}(p_0a_n+q) = \lim\limits_{q\to w+0}(p_0b+q) = p_0(b-b) = 0$. поскольку знак последнего сомножителя положителен, получаем, что $\lim_{q\to w+0}\varphi(q) = +\infty$.

Поскольку функция $\varphi(q)$ непрерывна, она принимает все промежуточные значения между двумя вычисленными пределами, то есть все значения из промежутка $(1,+\infty)$. В частности, при некотором q_0 она принимает значение $\frac{A}{G} > 1$. Итак, при фиксированных $p_0 < 0$ и q_0 равенство (4) выполняется.

2) Зафиксируем теперь число $p_0 > 0$. В этом случае доказательство можно рассуждать так же, как в пункте 1), с той разницей, что к нулю будет стремиться первый (а не последний) сомножитель под знаком радикала.

3) Доказательство единственности числа q_0 основано на двух леммах, алгебраической и дифференциальной.

Лемма 1. Для положительных чисел $u_1, u_2, \dots, u_n$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_n = \frac{nG^n}{H}, \tag{5}$$

где G и H – среднее геометрическое и среднее гармоническое этих чисел соответственно.

Для доказательства леммы 1 достаточно преобразовать определение среднего гармонического: $H := \left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_1}+\dots+\frac{1}{u_n}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^u u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_n}{nu_1\cdots u_n}\right)^{-1} = \frac{nG^n}{\sum_{i=1}^u u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_n}$. Выразив отсюда сумму, получим равенство (5).

Лемма 2. Для функции $G'(p_0,q)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial G'}{\partial q} = \frac{G'}{H'}. \tag{6}$$

Для доказательства леммы 2 воспользуемся сначала правилами дифференцирования: $\frac{\partial G'}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left((a_1'a_2'\cdots a_n')^{1/n}\right) = \frac{1}{n}(a_1'a_2'\cdots a_n')^{\frac{1}{n}-1}\frac{\partial}{\partial q}(a_1'a_2'\cdots a_n') = \frac{1}{n}(G')^{1-n}(\sum_{i=1}^n a_1'\cdots a_{i-1}'\frac{\partial a_i'}{\partial q}a_{i+1}'\cdots a_n')$. Теперь заметим, что все производные под знаком суммы одинаковы и равны единице: $\frac{\partial a_i'}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(p_0a_i+q) = 1$. Воспользовавшись формулой (5), получим формулу (6).

Продолжаем доказательство теоремы 2. Покажем, что функция $\varphi(q) := \frac{A'(p_0,q)}{G'(p_0,q)}$ монотонно убывает. Для этого найдем ее производную. По правилам дифференцирования и формуле (6) получим, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A'}{G'}\right) = \frac{\frac{\partial A'}{\partial q}G' - A'\frac{\partial G'}{\partial q}}{(G')^2} = \frac{1\cdot G' - A'\cdot\frac{G'}{H'}}{(G')^2} = \frac{H'-A'}{H'G'}.$$

Очевидно, что знаменатель дроби положителен, а числитель $H' - A'$ отрицателен. Таким образом, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$ отрицательна, следовательно, функция $\frac{A'(p_0,q)}{G'(p_0,q)}$ монотонно убывает и принимает значение $\frac{A}{G}$ точно один раз.

Теперь мы можем сказать, что на плоскости аффинных преобразований существует кривая Ки Фана $q = F(p)$, которая определена на множестве $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ее график $\mathcal{F}$ состоит из двух ветвей: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Ветвь $\mathcal{F}_1$ лежит в правой полуплоскости координатной плоскости pOq, а ветвь $\mathcal{F}_2$ лежит во втором квадранте. Эти две ветви, в совокупности с положительной полуосью Oq, делят область допустимых преобразований на четыре части, две из которых лежат ниже кривой, а две другие выше нее. Вычисления пунктов 1) и 2) доказательства теоремы показывают, что первые две области образуют парадоксальную область Ки Фана, а две вторые образуют область Ки Фана.

Пока мы не знаем, каким уравнением задается кривая Ки Фана и как выглядит ее график. Решению этой задачи посвящен следующий раздел.

Уравнение кривой Ки Фана

Теорема 3. Ветвь $\mathcal{F}_1$ графика кривой Ки Фана является положительной полуосью Op. Ветвь $\mathcal{F}_2$ графика кривой Ки Фана является лучом во втором квадранте, который задается системой $\begin{cases} q = \theta p \\ p < 0 \end{cases}$, где θ – это корень уравнения

$$(A^n - G^n)z^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(A^n\sigma_k - C_n^k A^k G^n)z^{n-k-1} = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющий неравенству

$$\theta < -b = -a_n \tag{8}$$

Здесь C_n^k – это число сочетаний из n элементов по k, а σ_k – это значение элементарной симметрической функции степени k от аргументов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Доказательство. 1) Доказательство проведем в несколько этапов. Начнем с того, что перепишем уравнение кривой Ки Фана в удобном для нас виде:

$$\frac{pA+q}{G(U')} = \frac{A}{G} \tag{9}$$

2) Возведем равенство (9) в степень n; это можно сделать, т. к. все выражения, из которых образованы арифметико-геометрические средние, положительны. Получим, что $\frac{(pA+q)^n}{(pa_1+q)(pa_2+q)\cdots(pa_n+q)} = \frac{A^n}{G^n}$.

3) Приравняв произведение крайних членов и произведение средних членов данной пропорции, получим, что

$$G^n(pA+q)^n = A^n(pa_1+q)(pa_2+q)\cdots(pa_n+q) \tag{10}$$

4) В обеих частях равенства (10) из каждого сомножителя вынесем за скобки $p \neq 0$ и поделим обе части равенства на p^n. Получим, что

$$G^n(A + \tfrac{q}{p})^n = A^n\left(a_1 + \frac{q}{p}\right)\left(a_2 + \frac{q}{p}\right)\cdots\left(a_n + \frac{q}{p}\right). \tag{11}$$

5) Введем новое переменное z с помощью равенства

$$z = \frac{q}{p}. \tag{12}$$

В новых обозначениях равенство (11) можно переписать в виде

$$G^n(z+A)^n = A^n(z+a_1)(z+a_2)\cdots(z+a_n). \tag{13}$$

6) Раскроем скобки в обеих частях равенства (13) и приведем подобные члены. При этом отдельно выделим старший член уравнения и его свободный член. Получим, что

$$(A^n - G^n)z^n + \sum_{k=1}^{n-1}(A^n\sigma_k - C_n^k A^k G^n)z^{n-k} + (A^n\sigma_n - A^n G^n) = 0. \tag{14}$$

7) Очевидно, что $\sigma_n = a_1 a_2 \cdots a_n = G^n$, поэтому свободный член уравнения равен нулю. Это означает, что уравнение (14) имеет нулевой корень. Подставив его в равенство (12), получим, что $q = 0$, то есть получим ось Oq. Отрицательная полуось лежит вне области допустимых преобразований, а положительная полуось дает нам ветвь $\mathcal{F}_1$ кривой Ки Фана. Заметим, что других ветвей в правой полуплоскости не существует в силу теоремы 2.

8) Сократив уравнение (14) на z, получим, что

$$(A^n - G^n)z^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(A^n\sigma_k - C_n^k A^k G^n)z^{n-k-1} = 0. \tag{15}$$

9) Очевидно, что для любого корня z_0 уравнения (15) выполняется равенство $\frac{q}{p} = z_0$, или $q = z_0 p$. Рассматривая график этой линии при отрицательных p, мы видим следующее: при $z_0 \geq -b = -a_n$ график лежит вне области допустимых преобразований, а при $z_0 = \theta < -b$ (см. неравенство (8)) он лежит внутри этой области. Другими словами, луч $\begin{cases} q = \theta p \\ p < 0 \end{cases}$ образует ветвь $\mathcal{F}_2$ кривой

Ки Фана. Заметим, что существование корня $\theta < -b$ и его единственность обеспечиваются теоремой 2.

Пример. Для чисел $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ найдем явное уравнение ветви $\mathcal{F}_2$ кривой Ки Фана.

Решение. По формуле (7) получаем уравнение $(A^3 - G^3)z^2 + (A^3\sigma_1 - C_3^1 AG^3)z + (A^3\sigma_2 - C_3^2 A^2 G^3) = 0$. Прямыми вычислениями получаем, что $A = 3$, $G = \sqrt[3]{12}$, $\sigma_1 = 9$, $\sigma_2 = 20$, $C_3^1 = C_3^2 = 3$. Подставляя эти числа в уравнение, получим, что $5z^2 + 45z + 72 = 0$. Решив это уравнение, найдем два корня: $z_1 = 0.3(\sqrt{65} - 15) \approx -2.08$ и $z_2 = -0.3(\sqrt{65} + 15) \approx -6.92$. Нетрудно доказать, что первый корень не удовлетворяет неравенству $z_0 < -6$, а второй корень – удовлетворяет. (Впрочем, это видно и из приближенных значений.) Итак, $\theta = -0.3(\sqrt{65} + 15)$и ветвь $\mathcal{F}_2$ кривой Ки Фана – это график функции $q = -0.3(\sqrt{65} + 15)p$ при $p < 0$.

Центр Ки Фана конфигурации точек. Мы видели, что каждая конфигурация U точек на вещественной прямой порождает число θ – угловой коэффициент ветви $\mathcal{F}_2$ кривой Ки Фана. Покажем, что число

$$\mathscr{f} \coloneqq -\frac{\theta}{2} \tag{16}$$

имеет особый геометрический смысл. Он вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть конфигурация точек U' получена из нетривиальной конфигурации точек U в результате действия допустимой симметрии $\mathcal{S}$ с центром λ. Четыре арифметико-геометрических средних $A(U)$, $A(U')$, $G(U)$, $G(U')$ связаны между собой следующим образом:

1) если $\mathscr{f} < \lambda$, то средние величины связаны неравенством Ки Фана;

2) если $\lambda < \mathscr{f}$, то средние величины связаны парадоксальным неравенством Ки Фана;

3) если $\lambda = \mathscr{f}$, то средние величины связаны равенством Ки Фана.

Доказательство. Симметрия $\mathcal{S}$ с центом λ задается равенством $\mathcal{S}(x) = x' = -x + 2\lambda$. В этом случае $p = -1$ и $q = 2\lambda$. Теперь очевидно, что имеет место следующая цепочка эквиваленций: $\mathscr{f} < \lambda \Leftrightarrow -\frac{\theta}{2} < \lambda \Leftrightarrow \theta(-1) < 2\lambda \Leftrightarrow \theta p < q$. Последнее неравенство означает, что образ симметрии $\mathcal{S}$ на плоскости преобразований лежит выше кривой Ки Фана, то есть принадлежит области Ки Фана, так что выполняется «нормальное» неравенство Ки Фана. Два других случая доказываются аналогично.

Теорема 4 дает определенные основания для того, чтобы дать точке $\mathscr{f}$ особое имя – центр Ки Фана.

Важно, что теорема 3 и формула (16) дают вычислительные алгоритмы для нахождения центра Ки Фана конфигурации с любой наперед заданной степенью точности.

Список литературы

1. *Калинин С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана : учеб. пособие по спецкурсу. Киров : Изд-во ВГГУ, 2002.

2. *Ястребов А. В.* Мультипликативные неравенства Ки Фана и гомотетии вещественной прямой // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Вып. 14. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2012. С. 203–221.

3. *Ястребов А. В.* Неравенства Ки Фана в исследованиях школьников // Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования : материалы Междунар. науч. конф. (Архангельск, 16–21 ноября 2014 г.). Архангельск : САФУ, 2014. С. 126–131.

4. *Ястребов А. В.* Неравенства Ки Фана и геометрические преобразования вещественной прямой // Информатика. Математика. Язык : науч. журнал. Вып. 6. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2010. С. 162–169.

Ki Fan inequality and affine transformations of the real line

A. V. Yastrebov[1], K. E. Shitueva[2]

[1]Doctor of Pedagogical Sciences, professor, Yaroslavl State Pedagogical University n. a. K. D. Ushinsky.
Russia, Yaroslavl. E-mail: alexander.yastrebov47@gmail.com

[2]student, Yaroslavl State Pedagogical University n. a. K. D. Ushinsky.
Russia, Yaroslavl. E-mail: shituewa2011@yandex.ru

Abstract. The configuration of U positive numbers of a real line is affected by an affine transformation that converts it to a configuration U'. For arithmetic-geometric averages of these configurations, we study inequalities similar to the classical multiplicative Ki Fan inequality.

Keywords: affine transformation, Ki Fan curve, Ki Fan inequality, Ki Fan domain, Ki Fan paradoxical inequality, Ki Fan paradoxical domain.

References

1. *Kalinin S. I. Srednie velichiny stepennogo tipa. Neravenstva Koshi i Ki Fana : ucheb. posobie po speckursu* [Average values of power type. Cauchy and Ki Fan inequalities : tutorial for the special course]. Kirov. VSHU. 2002.

2. *Yastrebov A. V. Mul'tiplikativnye neravenstva Ki Fana i gomotetii veshchestvennoj pryamoj* [Multiplicative inequalities of Ki Fan and homoteti of the real line] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona : periodicheskij mezhvuzovskij sbornik nauchno-metodicheskih rabot* – Mathematical herald of pedagogical institutions and universities of the Volga-Vyatka region : periodic inter-university collection of scientific and methodological works. Is. 14. Kirov. VyatSHU. 2012. Pp. 203–221.

3. *Yastrebov A. V. Neravenstva Ki Fana v issledovaniyah shkol'nikov* [Ki-Fan inequalities in school students' researches] // *Teoreticheskie i prikladnye aspekty matematiki, informatiki i obrazovaniya : materialy Mezhdunar. nauch. konf. (Arhangel'sk, 16–21 noyabrya 2014 g.)* – Theoretical and applied aspects of mathematics, computer science and education : proceedings of the international scientific conf. (Arkhangelsk, November 16–21, 2014). Arkhangelsk. SAFU. 2014. Pp. 126–131.

4. *Yastrebov A. V. Neravenstva Ki Fana i geometricheskie preobrazovaniya veshchestvennoj pryamoj* [Ki-Fan inequalities and geometric transformations of the real line] // *Informatika. Matematika. Yazyk : nauch. zhurnal* – Informatics. Mathematics. Language : scientific journal. Is. 6. Kirov. VyatSHU. 2010. Pp. 162–169.