УДК 517.977 DOI 10.25730/VSU.0536.21.001

Принцип максимума Понтрягина для одной нелинейной дробной задачи оптимального управления

Ж. Б. Ахмедова
кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет.
Азербайджан, г. Баку. E-mail: akja@rambler.ru

Аннотация. В последнее время задачи оптимального управления, описываемые системами уравнений с дробными производными Капуто, привлекли внимание многих исследователей. Одна из основных причин этого заключается в том, что проблемы управления, описываемые такими уравнениями, более адекватно описывают практические процессы.

В предлагаемой работе рассмотрена одна нелинейная задача оптимального управления, описываемая дробными дифференциальными уравнениями Капуто.

Известно, что наиболее сильным необходимым условием теории оптимального управления является необходимое условие типа принципа максимума Понтрягина. Необходимое условие оптимальности может быть получено с помощью метода приращений при наличии произвольного ограниченного области управления. В данной работе с помощью модифицированного метода приращений получено необходимое условие оптимальности первого порядка в виде принципа максимума Понтрягина.

Отметим, что это наиболее сильное необходимое условие, которое также позволяет получить различные другие типы необходимых условий оптимальности в предположениях дополнительных условий.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, дробные производные Капуто, задача оптимального управления.

Дробное исчисление развивалось постепенно и в настоящее время является очень активной областью математического анализа, о чем свидетельствует огромное количество публикаций (см. [1–4]). Существует несколько разных способов определения дробных производных и, следовательно, разных типов дробных задач оптимального управления (ДЗОУ). Тем не менее дробные производные Римана – Лиувилля и Капуто были более широко использованы. В большинстве работ, опубликованных на ДЗОУ, переменная состояния получается путем дробного интегрирования динамики Римана – Лиувилля или Капуто, но до сих пор рассматривались только интегральные показатели производительности целочисленного порядка. Значительная работа была проделана в области оптимального управления, и существуют прекрасные учебники по этому вопросу (см., например, [5–7]).

Дробные задачи оптимального управления (ДЗОУ) можно рассматривать как обобщение классических задач оптимального управления, для которых динамика системы управления описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными (ДП) и может включать в себя индекс производительности, задаваемый оператором дробного интегрирования. Причиной для формулирования и решения ДЗОУ является тот факт, что существует значительное число случаев, когда ДП описывают поведение интересующих систем управления более точно, чем более распространенные целочисленные дифференциальные уравнения. Это имеет место, например, в диффузионных процессах, обработке управления, обработке сигналов, стохастических системах и т. д. [8].

В настоящее время дробное исчисление находится в процессе развития в теоретическом и прикладном плане. Этот раздел математического анализа стал инструментом для математического моделирования динамических систем в различных (обычных и фрактальных) средах, позволяющим решать различные задачи создания новых систем управления для анализа, синтеза и диагностики.

Однако проблемы оптимального управления, рассматриваемые во многих книгах и журнальных статьях, в основном касаются системной динамики, поведение которой описывается интегральными дифференциальными уравнениями порядка. Недавние исследования в области техники, науки и других областях показали, что динамика многих систем описывается более точно с использованием дробных дифференциальных уравнений (ДДУ) (см., например, [9–13] и статьи и ссылки в них). Как указывают Миллер и Росс [14], вряд ли существует область науки или техники, которая осталась бы не затронутой этой областью. Тем не менее очень мало работы было сделано в области ДЗОУ. По мере роста спроса на эффективные, точные и высокоточные системы спрос на теории оптимального управления, а также аналитические и численные схемы для решения полученных уравнений также будут расти. Формулировка и полученные результаты для некоторых ДЗОУ, представленные в этой статье, являются попытками восполнить этот пробел.

Как мы уже отметили, дробные производные, или, точнее, производные произвольных порядков, играют значительную роль в технике, науке и математике в последние годы. Самко и соавторы [15] обеспечивают энциклопедическое изложение этого предмета. Дополнительную справочную информацию, обзор и применение этой области в науке, технике и математике можно найти в [8; 11; 12; 16].

В этой статье мы рассматриваем ДЗОУ, для которых индекс производительности задается интегралом дробного порядка, а динамика – это приложения, задающие дробную производную Капуто от переменного состояния по времени. Мы используем дробные производные Капуто. Мы обсудим ДЗОУ, рассмотренные в этой статье, сформулируем соответствующие необходимые условия оптимальности и представим их доказательство, в котором используется подход, отличающийся от подхода, обычно используемого для дробных задач оптимального управления. Мы будем использовать метод приращения функционала качества.

1. Задача дробного оптимального управления и принцип максимума. Пусть управляемый процесс описывается системой линейных уравнений
$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),u(t)), \tag{1}$$
с начальным условием
$$x(t_0)=x_0, \tag{2}$$
$$u(t)\in U\subset R^r, \tag{3}$$
$$S(u)=\varphi\big(x(t_1)\big), \tag{4}$$
где
$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}}d\tau,\quad n=[\alpha]+1,\alpha\in R_+$$
левая дробная производная Капуто.

Здесь $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ – состояние управляемого объекта, $u=(u_1,u_2,\dots,u_r)'$ – r-мерная управляющая функция, (') означает для векторов операция скалярного произведения, а для матриц – операция транспонирования, x_0 – постоянный вектор, $f(t,x,u)$ – заданная -мерная вектор-функция, непрерывная вместе с частными производными по x, $u=u(t)$ частично непрерывная функция, $\varphi(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая скалярная функция.

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (4), при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t),x(t)\big)$ – оптимальным процессом.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче при сделанных предположениях.

2. Вычисление вариации функционала. Пусть даны фиксированное $u(t)$ и произвольное $\bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t)$ допустимые управления. Решение задачи Коши (1)–(2), соответствующее этим управлениям, обозначим через $x(t)$ и $\bar{x}(t)=x(t)+\Delta x(t)$. Ясно, что $\Delta x(t)$ является решением следующей задачи:
$$\Delta\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=f\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big)-f(t,x(t),u(t)), \tag{5}$$
$$\Delta x(t_0)=0, \tag{6}$$
$$\Delta S(u)=S(\bar{u})-S(u)=S\big(u(t)+\Delta u(t)\big)-S(u)=\varphi\big(\bar{x}(t_1)\big)-\varphi\big(x(t_1)\big), \tag{7}$$
Пусть $\psi=\psi(t)$ пока произвольная -мерная вектор-функция. Умножая обе стороны уравнения (15) скалярно на $\psi(t)$ и интегрируя полученное уравнение по t от t_0 до t_1, получим
$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\big[f\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big)-f(t,x(t),u(t))\big]dt. \tag{8}$$
Введем аналог функции Гамильтона – Понтрягина следующим образом
$$H(t,x,u,\psi)=\psi' f(t,x,u).$$

Тогда формулу (8) можно написать следующим образом

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\right]dt. \tag{9}$$

С учетом (9) из формулы приращения (7) получим, что

$$\Delta S(u) = \varphi\big(\bar{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \left[H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\right]dt. \tag{10}$$

Используя формулу Тейлора из (10) получим, что

$$\varphi\big(\bar{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) = \varphi_x'\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) \tag{11}$$

и

$$\begin{gathered}
H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)=H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - \\
-H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) + H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - \\
-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) = H_x'\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)\Delta x(t) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|) + \\
+H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) = H_x'\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)\Delta x(t) + \\
+H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) - H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) + H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - \\
-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|).
\end{gathered} \tag{12}$$

Введем некоторые обозначения:

$$\begin{gathered}
\Delta_{\bar{u}(t)}H[t] = H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big), \\
H_x[t] = H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big), \\
\Delta_{\bar{u}(t)}H_x[t] = H_x\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big), \\
f_x[t] = f_x\big(t,x(t),u(t)\big), \\
\Delta_{\bar{u}(t)}f[t] = H\big(t,x(t),\bar{u}(t)\big) - f\big(t,x(t),u(t)\big).
\end{gathered}$$

Используя эти обозначения формулу (12) можно написать следующим образом:

$$\begin{gathered}
H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)= \\
=H_x'[t] + \Delta_{\bar{u}(t)}H[t] + \Delta_{\bar{u}(t)}H_x'[t]\Delta x(t) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|).
\end{gathered} \tag{13}$$

Учитывая (11) и (13), в (10) получим

$$\Delta S(u) = \varphi_x'\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t){}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} H_x'[t]\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H_x'[t]\Delta x(t)dt +$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} +o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \tag{14}$$

По формуле частичного интегрирования имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t)\psi(t)\big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1) + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_0)\psi(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1). \tag{15}$$

Учитывая (15) в (14), получим

$$\Delta S(u) = \varphi'_x\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta {}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} H'_x[t]\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}(t)}H[t]dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}(t)}H'_x[t]\Delta x(t)dt +$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \qquad (16)$$

Предположим, что вектор-функция $\psi(t)$ является решением следующей системы

$${}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi(t) = H_x[t], \qquad (17)$$

$${}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1) = -\varphi_x\big(x(t_1)\big). \qquad (18)$$

Задача (17)–(18) называется смежной системой для рассматриваемой задачи. Тогда из (16) получим, что

$$\Delta S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}(t)}H[t]dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}(t)}H'_x[t]\Delta x(t)dt +$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}(t)}H[t]dt + \eta(\Delta u), \qquad (19)$$

где

$$\eta(\Delta u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}(t)}H[t]dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \qquad (20)$$

3. Оценка игольчатой вариации управления. Чтобы дать принцип максимума Понтрягина, вместе с формулой приращения функционала качества нам понадобится оценка игольчатой вариации управления и остаточного члена.

Для этого определим приращение $\Delta u(t)$ управления $u(t)$ следующим образом:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta,\theta+\varepsilon), \\ 0, & t \in T\backslash[\theta,\theta+\varepsilon), \end{cases} \qquad (21)$$

$v \in U, \theta \in [t_0,t_1), \theta+\varepsilon < t_1$. $\Delta u(t)$ называется игольчатой вариацией управления $u(t)$.

Тогда для $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ игольчатая вариация

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta,\theta+\varepsilon), \\ u(t), & t \in T\backslash[\theta,\theta+\varepsilon), \end{cases}$$

определяется малостью меры множества $[\theta,\theta+\varepsilon)$. θ точка Лебега.

Для того чтобы оценивать приращение $\Delta x(t)$, рассмотрим следующие случаи:

1. При $t \in [t_0,\theta)$ решение задачи (5)–(6) можем написать следующим образом:

$$\Delta {}_{t_0}^C D_t^{\alpha} x(t) = f\big(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\big) - f(t,x(t),u(t)), \qquad (22)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \qquad (23)$$

на интервале $[t_0,\theta)\Delta x(t) = 0$ является единственным решением рассматриваемой задачи.

2. При $t \in [\theta,\theta+\varepsilon)$ задача (20)–(21) примет следующий вид:

$$\Delta {}_{\theta}^C D_{\theta+\varepsilon}^{\alpha} x(t) = f(t,\overline{x}(t),v) - f(t,x(t),u(t)), \qquad (24)$$

$$\Delta x(\theta) = 0. \qquad (25)$$

Так как эта задача эквивалентна уравнению

$$\Delta x(t) = {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\big[f(t,\overline{x}(t),v) - f\big(t,x(t),u(t)\big)\big] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \big[f(s,\overline{x}(s),v) - f\big(s,x(s),u(s)\big)\big]ds, \qquad (26)$$

имеем

$$\Delta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} (x-s)^{\alpha-1}[f(s,\overline{x}(s),v) - f(s,x(s),v) + f(s,x(s),v) -$$

$$-f\big(s,x(s),u(s)\big)\big]ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} (x-s)^{\alpha-1}[f(s,\overline{x}(s),v) - f(s,x(s),v)]ds +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\Delta_v f(s,x(s),v)ds =$$

$$= {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}[f(s,\bar{x}(s),v)-f(s,x(s),v)] + {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\Delta_v f(s,x(s),v),$$

т. е.

$$\Delta x(t) = {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}[f(s,\bar{x}(s),v)-f(s,x(s),v)] + {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\Delta_v f(s,x(s),v). \quad (27)$$

Поскольку функция f удовлетворяет условию Липшица по x, то

$$\|\Delta x(t)\| \le {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\|[f(s,\bar{x}(s),v)-f(s,x(s),v)]\| + {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\| \le$$

$$\le {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\| + L_1\, {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\|\Delta x(s)\|. \quad (28)$$

Используя формулу Гронуолла – Беллмана [19], получим

$$\|\Delta x(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|ds +$$

$$+L_1\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta x(s)\|ds,$$

$$\|\Delta x(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|ds +$$

$$+L_1\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma^n(\alpha)}{\Gamma(n\alpha)}(x-s)^{n\alpha-1}\|\Delta x(s)\|ds \le$$

$$\le L_2\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|ds \le$$

$$\le L_2 M\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon,$$

где $M = max\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|, L_1, L_2 = const > 0$.

Последняя формула показывает, что $\|\Delta x(t)\| \sim \varepsilon$, т. е. $\|\Delta x(t)\|$ имеет порядок ε бесконечной малости.

Учитывая эти результаты, приращение функционала, определяемое по формуле (19), можно написать следующим образом:

$$\Delta S(u) = -\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt + \eta(\Delta u) = -\varepsilon\Delta_v H[\theta] + o(\varepsilon). \quad (29)$$

Если предполагать, что управление $u(t)$ – допустимое управление, то из (44) следует, что вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$

$$-\varepsilon\Delta_v H[\theta] \ge 0 \quad (30)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Отсюда следует, что

$$\Delta_v H[\theta] \le 0 \quad (31)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Учитывая введенные обозначения, можно написать, что

$$H(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)) - H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)) \le 0 \quad (32)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

А это в свою очередь означает, что

$$\max_{v\in U} H(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)) = H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)) \quad (33)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. (Принцип максимума Понтрягина). Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (1)–(4) необходимо, чтобы равенство (33) выполнялось для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Вывод. Используя модифицированный метод приращений, доказан принцип максимума Понтрягина для одной нелинейной дробной задачи оптимального управления.

Список литературы

1. *Koha C. G., Kelly J. M.* Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models // Earthquake engineering and Structural dynamics. 19 (1990). Pp. 229–241.

2. *Makris N., Dargush G. F., Constantinou M. C.* Dynamic analysis of viscoelastic-fluid dampers // J. Engrg. Mech. ASCE. 121 (1995). Pp. 1114–1121.

3. *Mainardi F.* Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena' // Chaos, Solitons and Fractionals. 7 (1996). Pp. 1461–1477.

4. *Rossikin Y. A., Shikova M. V.* Application of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 50 (1997). Pp. 5–67.

5. *Hestenes M. R.* Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Wiley, New York, 1966.

6. *Bryson Jr. A. E, Ho Y. C.* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1975.

7. *Sage A. P., White III C. C.* Optimum Systems Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

8. *Das S.* Functional Fractional Calculus (2nd edition). Springer (2011).

9. *Bagley R. L., Calico R. A.* Fractional order state equations for the control of viscoelastic ally damped structures // Journal of Guidance, Control, and Dynamics 14. 1991. Pp. 304–311.

10. *Carpinteri A., Mainardi F.* Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer-Verlag, Vienna, 1997.

11. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. Academic Press, New York, 1999.

12. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, River Edge, New Jersey, 2000.

13. *Machado J. A. T.* Special issue on fractional calculus and applications // Nonlinear Dynamics 29. 2002. Pp. 1–386.

14. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York, 1993.

15. *Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications. Gordon and Breach Longhorne Pennsylvania, 1993.

16. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. Academic Press, New York, 1974.

17. *Diethelm K.*The Analysis of Fractional Differential Equations. 2010.

18. *Lazo M. J. and Torres D. F.* The DuBois-Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and a Euler-Lagrange equation involving only derivatives of Caputo // Journal of Optimization Theory and Applications. 156. No. 1. 2013. Pp. 56–67.

19. *Lin S. Y.* Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications. 549. No. 1. 2013.

20. *Usero D.* Fractional Taylor series for Caputo fractional derivatives Construction of numerical schemes, Preprint. 2007. URL: http://www.fdi.ucm.es/profesor/lvazquez/calcfrac/docs/paperUsero.pdf.

21. *Odibat Z. and Shawagfeh N.* Generalized Taylor's formula // Appl. Math. Comput. 2007. Pp. 286–293.

22. *Hosseinabadi A. N. and Nategh M.* On fractional mean value, preprint. 2014.

The Pontryagin maximum principle for a nonlinear fractional optimal control problem

Zh. B. Ahmedova

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Baku State University.
Azerbaijan, Baku. E-mail: akja@rambler.ru

Abstract. Recently, optimal control problems described by systems of equations with Caputo fractional derivatives have attracted the attention of many researchers. One of the main reasons for this is that the control problems described by such equations more adequately describe practical processes.

In this paper, we consider a nonlinear optimal control problem described by Caputo's fractional differential equations.

It is known that the strongest necessary condition of the theory of optimal control is a necessary condition of the type of the Pontryagin maximum principle. The necessary optimality condition can be obtained using the increment method in the presence of an arbitrary bounded control domain. In this paper, the necessary condition of first-order optimality in the form of the Pontryagin maximum principle is obtained using a modified increment method.

Note that this is the strongest necessary condition, which also allows us to obtain various other types of necessary optimality conditions under the assumptions of additional conditions.

Keywords: Pontryagin maximum principle, Caputo fractional derivatives, optimal control problem.

References

1. *Koha C. G., Kelly J. M.* Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models // Earthquake engineering and Structural dynamics. 19 (1990). Pp. 229–241.

2. *Makris N., Dargush G. F., Constantinou M. C.* Dynamic analysis of viscoelastic-fluid dampers // J. Engrg. Mech. ASCE. 121 (1995). Pp. 1114–1121.

3. *Mainardi F.* Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena' // Chaos, Solitons and Fractionals. 7 (1996). Pp. 1461–1477.

4. *Rossikin Y. A., Shikova M. V.* Application of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 50 (1997). Pp. 5–67.

5. *Hestenes M. R.* Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Wiley, New York, 1966.

6. *Bryson Jr. A. E, Ho Y. C.* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1975.

7. *Sage A. P., White III C. C.* Optimum Systems Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

8. *Das S.* Functional Fractional Calculus (2nd edition). Springer (2011).

9. *Bagley R. L., Calico R. A.* Fractional order state equations for the control of viscoelastic ally damped structures // Journal of Guidance, Control, and Dynamics 14. 1991. Pp. 304–311.

10. *Carpinteri A., Mainardi F.* Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer-Verlag, Vienna, 1997.

11. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. Academic Press, New York, 1999.

12. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, River Edge, New Jersey, 2000.

13. *Machado J. A. T.* Special issue on fractional calculus and applications // Nonlinear Dynamics 29. 2002. Pp. 1–386.

14. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York, 1993.

15. *Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications. Gordon and Breach Longhorne Pennsylvania, 1993.

16. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. Academic Press, New York, 1974.

17. *Diethelm K.*The Analysis of Fractional Differential Equations. 2010.

18. *Lazo M. J. and Torres D. F.* The DuBois-Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and a Euler-Lagrange equation involving only derivatives of Caputo // Journal of Optimization Theory and Applications. 156. No. 1. 2013. Pp. 56–67.

19. *Lin S. Y.* Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications. 549. No. 1. 2013.

20. *Usero D.* Fractional Taylor series for Caputo fractional derivatives Construction of numerical schemes, Preprint. 2007. Available at: http://www.fdi.ucm.es/profesor/lvazquez/calcfrac/docs/paperUsero.pdf.

21. *Odibat Z. and Shawagfeh N.* Generalized Taylor's formula // Appl. Math. Comput. 2007. Pp. 286–293.

22. *Hosseinabadi A. N. and Nategh M.* On fractional mean value, preprint. 2014.