Вятский государственный университет

Математический вестник Вятского государственного университета

Н а у ч н ы й   ж у р н а л

№ 1 (20)

Киров
2021

УДК 51(051)
М34

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)
Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Редактор **М. О. Корякина**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. И. Чернышова**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**
Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Мы начинаем издавать научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета», созданный на платформе бывшего научного журнала «Advanced Science» (ВятГУ, 2012–2020), выпуски которого можно найти в Elibrary. В содержательном плане новый журнал служит продолжением периодического межвузовского сборника научно-методических работ «Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона» (1998–2019), размещенного в Elibrary (всего опубликован 21 выпуск).

В журнале публикуются статьи, отражающие новые результаты по математике, компьютерным наукам, математическому моделированию, проблемам образования в сфере математики и информатики. Наряду с оригинальными исследовательскими статьями мы принимаем научные обзоры и научные отчеты, материалы научно-методического характера, работы по истории и методологии математики и компьютерных наук, информацию о значимых событиях в современной научной жизни. Журнал ориентирован на научных и научно-педагогических работников, аспирантов и магистрантов, преподавателей математики и компьютерных наук.

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета» является сетевым периодическим изданием открытого доступа. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Регистрационный номер: серия – Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.

Более подробную информацию о журнале «Математический вестник Вятского государственного университета» можно найти на сайте: http://advanced-science.ru.

Журнал индексируется в базе Российского индекса научного цитирования (РИНЦ). Каждой статье присваивается DOI. После выхода в свет первого выпуска журналу будет присвоен международный номер ISSN.

Периодичность выхода – четыре номера в год, по 10–15 статей в каждом выпуске. Публикация в журнале бесплатная.

В начале 2022 года мы подадим документы на включение нашего журнала в список журналов ВАК.

Дорогие коллеги, приглашаем вас к сотрудничеству!

Ждем качественных статей и материалов!

Е. М. Вечтомов,
главный редактор журнала,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой фундаментальной математики ВятГУ,
Заслуженный работник высшей школы РФ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977 DOI 10.25730/VSU.0536.21.001

Принцип максимума Понтрягина для одной нелинейной дробной задачи оптимального управления

Ж. Б. Ахмедова
кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет.
Азербайджан, г. Баку. E-mail: akja@rambler.ru

Аннотация. В последнее время задачи оптимального управления, описываемые системами уравнений с дробными производными Капуто, привлекли внимание многих исследователей. Одна из основных причин этого заключается в том, что проблемы управления, описываемые такими уравнениями, более адекватно описывают практические процессы.

В предлагаемой работе рассмотрена одна нелинейная задача оптимального управления, описываемая дробными дифференциальными уравнениями Капуто.

Известно, что наиболее сильным необходимым условием теории оптимального управления является необходимое условие типа принципа максимума Понтрягина. Необходимое условие оптимальности может быть получено с помощью метода приращений при наличии произвольного ограниченного области управления. В данной работе с помощью модифицированного метода приращений получено необходимое условие оптимальности первого порядка в виде принципа максимума Понтрягина.

Отметим, что это наиболее сильное необходимое условие, которое также позволяет получить различные другие типы необходимых условий оптимальности в предположениях дополнительных условий.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, дробные производные Капуто, задача оптимального управления.

Дробное исчисление развивалось постепенно и в настоящее время является очень активной областью математического анализа, о чем свидетельствует огромное количество публикаций (см. [1–4]). Существует несколько разных способов определения дробных производных и, следовательно, разных типов дробных задач оптимального управления (ДЗОУ). Тем не менее дробные производные Римана – Лиувилля и Капуто были более широко использованы. В большинстве работ, опубликованных на ДЗОУ, переменная состояния получается путем дробного интегрирования динамики Римана – Лиувилля или Капуто, но до сих пор рассматривались только интегральные показатели производительности целочисленного порядка. Значительная работа была проделана в области оптимального управления, и существуют прекрасные учебники по этому вопросу (см., например, [5–7]).

Дробные задачи оптимального управления (ДЗОУ) можно рассматривать как обобщение классических задач оптимального управления, для которых динамика системы управления описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными (ДП) и может включать в себя индекс производительности, задаваемый оператором дробного интегрирования. Причиной для формулирования и решения ДЗОУ является тот факт, что существует значительное число случаев, когда ДП описывают поведение интересующих систем управления более точно, чем более распространенные целочисленные дифференциальные уравнения. Это имеет место, например, в диффузионных процессах, обработке управления, обработке сигналов, стохастических системах и т. д. [8].

В настоящее время дробное исчисление находится в процессе развития в теоретическом и прикладном плане. Этот раздел математического анализа стал инструментом для математического моделирования динамических систем в различных (обычных и фрактальных) средах, позволяющим решать различные задачи создания новых систем управления для анализа, синтеза и диагностики.

Однако проблемы оптимального управления, рассматриваемые во многих книгах и журнальных статьях, в основном касаются системной динамики, поведение которой описывается интегральными дифференциальными уравнениями порядка. Недавние исследования в области техники, науки и других областях показали, что динамика многих систем описывается более точно с использованием дробных дифференциальных уравнений (ДДУ) (см., например, [9–13] и статьи и ссылки в них). Как указывают Миллер и Росс [14], вряд ли существует область науки или техники, которая осталась бы не затронутой этой областью. Тем не менее очень мало работы было сделано в области ДЗОУ. По мере роста спроса на эффективные, точные и высокоточные системы спрос на теории оптимального управления, а также аналитические и численные схемы для решения полученных уравнений также будут расти. Формулировка и полученные результаты для некоторых ДЗОУ, представленные в этой статье, являются попытками восполнить этот пробел.

Как мы уже отметили, дробные производные, или, точнее, производные произвольных порядков, играют значительную роль в технике, науке и математике в последние годы. Самко и соавторы [15] обеспечивают энциклопедическое изложение этого предмета. Дополнительную справочную информацию, обзор и применение этой области в науке, технике и математике можно найти в [8; 11; 12; 16].

В этой статье мы рассматриваем ДЗОУ, для которых индекс производительности задается интегралом дробного порядка, а динамика – это приложения, задающие дробную производную Капуто от переменного состояния по времени. Мы используем дробные производные Капуто. Мы обсудим ДЗОУ, рассмотренные в этой статье, сформулируем соответствующие необходимые условия оптимальности и представим их доказательство, в котором используется подход, отличающийся от подхода, обычно используемого для дробных задач оптимального управления. Мы будем использовать метод приращения функционала качества.

1. Задача дробного оптимального управления и принцип максимума. Пусть управляемый процесс описывается системой линейных уравнений

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1} $$

с начальным условием

$$ x(t_0) = x_0, \tag{2} $$

$$ u(t) \in U \subset R^r, \tag{3} $$

$$ S(u) = \varphi\big(x(t_1)\big), \tag{4} $$

где

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}} d\tau, \quad n = [\alpha] + 1, \alpha \in R_+ $$

левая дробная производная Капуто.

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ – состояние управляемого объекта, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)' - r$-мерная управляющая функция, (') означает для векторов операция скалярного произведения, а для матриц – операция транспонирования, x_0 – постоянный вектор, $f(t, x, u)$ – заданная -мерная вектор-функция, непрерывная вместе с частными производными по x, $u = u(t)$ частично непрерывная функция, $\varphi(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая скалярная функция.

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (4), при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t), x(t)\big)$ – оптимальным процессом.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче при сделанных предположениях.

2. Вычисление вариации функционала. Пусть даны фиксированное $u(t)$ и произвольное $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ допустимые управления. Решение задачи Коши (1)–(2), соответствующее этим управлениям, обозначим через $x(t)$ и $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$. Ясно, что $\Delta x(t)$ является решением следующей задачи:

$$ \Delta {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) - f(t, x(t), u(t)), \tag{5} $$

$$ \Delta x(t_0) = 0, \tag{6} $$

$$ \Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = S\big(u(t) + \Delta u(t)\big) - S(u) = \varphi\big(\bar{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big), \tag{7} $$

Пусть $\psi = \psi(t)$ пока произвольная -мерная вектор-функция. Умножая обе стороны уравнения (15) скалярно на $\psi(t)$ и интегрируя полученное уравнение по t от t_0 до t_1, получим

$$ \int\limits_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \big[f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) - f(t, x(t), u(t))\big] dt. \tag{8} $$

Введем аналог функции Гамильтона – Понтрягина следующим образом

$$ H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u). $$

Тогда формулу (8) можно написать следующим образом

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\right]dt. \tag{9}$$

С учетом (9) из формулы приращения (7) получим, что

$$\Delta S(u) = \varphi\big(\bar{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t)dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left[H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\right]dt. \tag{10}$$

Используя формулу Тейлора из (10) получим, что

$$\varphi\big(\bar{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) = \varphi_x'\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) \tag{11}$$

и

$$\begin{gathered} H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) = H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - \\ -H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) + H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - \\ -H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) = H_x'\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)\Delta x(t) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|) + \\ +H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) = H_x'\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)\Delta x(t) + \\ +H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) - H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) + H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - \\ -H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|). \end{gathered} \tag{12}$$

Введем некоторые обозначения:

$$\begin{gathered} \Delta_{\bar{u}(t)}H[t] = H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big), \\ H_x[t] = H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big), \\ \Delta_{\bar{u}(t)}H_x[t] = H_x\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big), \\ f_x[t] = f_x\big(t,x(t),u(t)\big), \\ \Delta_{\bar{u}(t)}f[t] = H\big(t,x(t),\bar{u}(t)\big) - f\big(t,x(t),u(t)\big). \end{gathered}$$

Используя эти обозначения формулу (12) можно написать следующим образом:

$$\begin{gathered} H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big) = \\ = H_x'[t] + \Delta_{\bar{u}(t)}H[t] + \Delta_{\bar{u}(t)}H_x'[t]\Delta x(t) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|). \end{gathered} \tag{13}$$

Учитывая (11) и (13), в (10) получим

$$\Delta S(u) = \varphi_x'\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t)dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} H_x'[t]\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H_x'[t]\Delta x(t)dt +$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} +o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \tag{14}$$

По формуле частичного интегрирования имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t)\psi(t)\Big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1) + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_0)\psi(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1). \tag{15}$$

Учитывая (15) в (14), получим

$$\Delta S(u) = \varphi'_x\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta\, {}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} H'_x[t]\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H'_x[t]\Delta x(t)dt +$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \qquad (16)$$

Предположим, что вектор-функция $\psi(t)$ является решением следующей системы

$${}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi(t) = H_x[t], \qquad (17)$$

$${}_tI_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1) = -\varphi_x\big(x(t_1)\big). \qquad (18)$$

Задача (17)–(18) называется смежной системой для рассматриваемой задачи. Тогда из (16) получим, что

$$\Delta S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H'_x[t]\Delta x(t)dt +$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt + \eta(\Delta u), \qquad (19)$$

где

$$\eta(\Delta u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt. \qquad (20)$$

3. Оценка игольчатой вариации управления. Чтобы дать принцип максимума Понтрягина, вместе с формулой приращения функционала качества нам понадобится оценка игольчатой вариации управления и остаточного члена.

Для этого определим приращение $\Delta u(t)$ управления $u(t)$ следующим образом:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta,\theta+\varepsilon), \\ 0, & t \in T\backslash[\theta,\theta+\varepsilon), \end{cases} \qquad (21)$$

$v \in U, \theta \in [t_0,t_1), \theta + \varepsilon < t_1$. $\Delta u(t)$ называется игольчатой вариацией управления $u(t)$.

Тогда для $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ игольчатая вариация

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta,\theta+\varepsilon), \\ u(t), & t \in T\backslash[\theta,\theta+\varepsilon), \end{cases}$$

определяется малостью меры множества $[\theta,\theta+\varepsilon)$. θ точка Лебега.

Для того чтобы оценивать приращение $\Delta x(t)$, рассмотрим следующие случаи:

1. При $t \in [t_0,\theta)$ решение задачи (5)–(6) можем написать следующим образом:

$$\Delta\, {}_{t_0}^C D_t^{\alpha}x(t) = f\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big) - f(t,x(t),u(t)), \qquad (22)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \qquad (23)$$

на интервале $[t_0,\theta)\Delta x(t) = 0$ является единственным решением рассматриваемой задачи.

2. При $t \in [\theta,\theta+\varepsilon)$ задача (20)–(21) примет следующий вид:

$$\Delta\, {}_{\theta}^C D_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}x(t) = f(t,\bar{x}(t),v) - f(t,x(t),u(t)), \qquad (24)$$

$$\Delta x(\theta) = 0. \qquad (25)$$

Так как эта задача эквивалентна уравнению

$$\Delta x(t) = {}_{\theta}I_{\theta+\varepsilon}^{\alpha}\big[f(t,\bar{x}(t),v) - f\big(t,x(t),u(t)\big)\big] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \big[f(s,\bar{x}(s),v) - f\big(s,x(s),u(s)\big)\big]ds, \qquad (26)$$

имеем

$$\Delta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} (x-s)^{\alpha-1}[f(s,\bar{x}(s),v) - f(s,x(s),v) + f(s,x(s),v) -$$

$$-f\big(s,x(s),u(s)\big)]ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} (x-s)^{\alpha-1}[f(s,\bar{x}(s),v) - f(s,x(s),v)]ds +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\Delta_v f(s,x(s),v)ds =$$

$$= {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}[f(s,\bar{x}(s),v)-f(s,x(s),v)] + {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}\Delta_v f(s,x(s),v),$$

т. е.

$$\Delta x(t) = {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}[f(s,\bar{x}(s),v)-f(s,x(s),v)] + {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}\Delta_v f(s,x(s),v). \qquad (27)$$

Поскольку функция f удовлетворяет условию Липшица по x, то

$$\|\Delta x(t)\| \le {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}\|[f(s,\bar{x}(s),v)-f(s,x(s),v)]\| + {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\| \le$$

$$\le {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\| + L_1\, {}_{\theta}I^{\alpha}_{\theta+\varepsilon}\|\Delta x(s)\|. \qquad (28)$$

Используя формулу Гроноулла – Беллмана [19], получим

$$\|\Delta x(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|ds +$$

$$+L_1\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta x(s)\|ds,$$

$$\|\Delta x(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|ds +$$

$$+L_1\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma^n(\alpha)}{\Gamma(n\alpha)}(x-s)^{n\alpha-1}\|\Delta x(s)\|ds \le$$

$$\le L_2\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}(x-s)^{\alpha-1}\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|ds \le$$

$$\le L_2 M\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon,$$

где $M = max\|\Delta_v f(s,x(s),v)\|, L_1, L_2 = const > 0$.

Последняя формула показывает, что $\|\Delta x(t)\| \sim \varepsilon$, т. е. $\|\Delta x(t)\|$ имеет порядок ε бесконечной малости.

Учитывая эти результаты, приращение функционала, определяемое по формуле (19), можно написать следующим образом:

$$\Delta S(u) = -\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\Delta_{\bar{u}(t)}H[t]dt + \eta(\Delta u) = -\varepsilon\Delta_v H[\theta] + o(\varepsilon). \qquad (29)$$

Если предполагать, что управление $u(t)$ – допустимое управление, то из (44) следует, что вдоль оптимального процесса $\big(u(t), x(t)\big)$

$$-\varepsilon\Delta_v H[\theta] \ge 0 \qquad (30)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Отсюда следует, что

$$\Delta_v H[\theta] \le 0 \qquad (31)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Учитывая введенные обозначения, можно написать, что

$$H\big(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)\big) - H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big) \le 0 \qquad (32)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

А это в свою очередь означает, что

$$\max_{v\in U} H\big(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)\big) = H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big) \qquad (33)$$

для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. (Принцип максимума Понтрягина). Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (1)–(4) необходимо, чтобы равенство (33) выполнялось для всех $v \in U, \theta \in [t_0,t_1)$.

Вывод. Используя модифицированный метод приращений, доказан принцип максимума Понтрягина для одной нелинейной дробной задачи оптимального управления.

Список литературы

1. *Koha C. G., Kelly J. M.* Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models // Earthquake engineering and Structural dynamics. 19 (1990). Pp. 229–241.
2. *Makris N., Dargush G. F., Constantinou M. C.* Dynamic analysis of viscoelastic-fluid dampers // J. Engrg. Mech. ASCE. 121 (1995). Pp. 1114–1121.
3. *Mainardi F.* Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena' // Chaos, Solitons and Fractionals. 7 (1996). Pp. 1461–1477.
4. *Rossikin Y. A., Shikova M. V.* Application of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 50 (1997). Pp. 5–67.
5. *Hestenes M. R.* Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Wiley, New York, 1966.
6. *Bryson Jr. A. E, Ho Y. C.* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1975.
7. *Sage A. P., White III C. C.* Optimum Systems Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
8. *Das S.* Functional Fractional Calculus (2nd edition). Springer (2011).
9. *Bagley R. L., Calico R. A.* Fractional order state equations for the control of viscoelastic ally damped structures // Journal of Guidance, Control, and Dynamics 14. 1991. Pp. 304–311.
10. *Carpinteri A., Mainardi F.* Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer-Verlag, Vienna, 1997.
11. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. Academic Press, New York, 1999.
12. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, River Edge, New Jersey, 2000.
13. *Machado J. A. T.* Special issue on fractional calculus and applications // Nonlinear Dynamics 29. 2002. Pp. 1–386.
14. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York, 1993.
15. *Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications. Gordon and Breach Longhorne Pennsylvania, 1993.
16. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. Academic Press, New York, 1974.
17. *Diethelm K.*The Analysis of Fractional Differential Equations. 2010.
18. *Lazo M. J. and Torres D. F.* The DuBois-Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and a Euler-Lagrange equation involving only derivatives of Caputo // Journal of Optimization Theory and Applications. 156. No. 1. 2013. Pp. 56–67.
19. *Lin S. Y.* Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications. 549. No. 1. 2013.
20. *Usero D.* Fractional Taylor series for Caputo fractional derivatives Construction of numerical schemes, Preprint. 2007. URL: http://www.fdi.ucm.es/profesor/lvazquez/calcfrac/docs/paperUsero.pdf.
21. *Odibat Z. and Shawagfeh N.* Generalized Taylor's formula // Appl. Math. Comput. 2007. Pp. 286–293.
22. *Hosseinabadi A. N. and Nategh M.* On fractional mean value, preprint. 2014.

The Pontryagin maximum principle for a nonlinear fractional optimal control problem

Zh. B. Ahmedova

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Baku State University.
Azerbaijan, Baku. E-mail: akja@rambler.ru

Abstract. Recently, optimal control problems described by systems of equations with Caputo fractional derivatives have attracted the attention of many researchers. One of the main reasons for this is that the control problems described by such equations more adequately describe practical processes.

In this paper, we consider a nonlinear optimal control problem described by Caputo's fractional differential equations.

It is known that the strongest necessary condition of the theory of optimal control is a necessary condition of the type of the Pontryagin maximum principle. The necessary optimality condition can be obtained using the increment method in the presence of an arbitrary bounded control domain. In this paper, the necessary condition of first-order optimality in the form of the Pontryagin maximum principle is obtained using a modified increment method.

Note that this is the strongest necessary condition, which also allows us to obtain various other types of necessary optimality conditions under the assumptions of additional conditions.

Keywords: Pontryagin maximum principle, Caputo fractional derivatives, optimal control problem.

References

1. *Koha C. G., Kelly J. M.* Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models // Earthquake engineering and Structural dynamics. 19 (1990). Pp. 229–241.
2. *Makris N., Dargush G. F., Constantinou M. C.* Dynamic analysis of viscoelastic-fluid dampers // J. Engrg. Mech. ASCE. 121 (1995). Pp. 1114–1121.

3. *Mainardi F.* Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena' // Chaos, Solitons and Fractionals. 7 (1996). Pp. 1461–1477.

4. *Rossikin Y. A., Shikova M. V.* Application of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 50 (1997). Pp. 5–67.

5. *Hestenes M. R.* Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Wiley, New York, 1966.

6. *Bryson Jr. A. E, Ho Y. C.* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1975.

7. *Sage A. P., White III C. C.* Optimum Systems Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

8. *Das S.* Functional Fractional Calculus (2nd edition). Springer (2011).

9. *Bagley R. L., Calico R. A.* Fractional order state equations for the control of viscoelastic ally damped structures // Journal of Guidance, Control, and Dynamics 14. 1991. Pp. 304–311.

10. *Carpinteri A., Mainardi F.* Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer-Verlag, Vienna, 1997.

11. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. Academic Press, New York, 1999.

12. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, River Edge, New Jersey, 2000.

13. *Machado J. A. T.* Special issue on fractional calculus and applications // Nonlinear Dynamics 29. 2002. Pp. 1–386.

14. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York, 1993.

15. *Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications. Gordon and Breach Longhorne Pennsylvania, 1993.

16. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. Academic Press, New York, 1974.

17. *Diethelm K.*The Analysis of Fractional Differential Equations. 2010.

18. *Lazo M. J. and Torres D. F.* The DuBois-Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and a Euler-Lagrange equation involving only derivatives of Caputo // Journal of Optimization Theory and Applications. 156. No. 1. 2013. Pp. 56–67.

19. *Lin S. Y.* Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications. 549. No. 1. 2013.

20. *Usero D.* Fractional Taylor series for Caputo fractional derivatives Construction of numerical schemes, Preprint. 2007. Available at: http://www.fdi.ucm.es/profesor/lvazquez/calcfrac/docs/paperUsero.pdf.

21. *Odibat Z. and Shawagfeh N.* Generalized Taylor's formula // Appl. Math. Comput. 2007. Pp. 286–293.

22. *Hosseinabadi A. N. and Nategh M.* On fractional mean value, preprint. 2014.

УДК 517.54

DOI 10.25730/VSU.0536.21.002

Различные свойства выпуклых функций в решении одной задачи

Л. В. Панкратова[1], Н. С. Протасов[2]

[1]кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru
[2]студент 5 курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профили Математика, Информатика), Вятский государственный университет. Россия, г. Киров

Аннотация. Понятие выпуклой функции является одним из фундаментальных понятий не только математического анализа, но и ряда смежных с ним дисциплин, таких как экономика, теория управления и оптимизации и др. Это обусловливает активное развитие тематики выпуклых функций и устойчивый интерес к ней со стороны исследователей. Целью представляемой статьи является систематизация известных свойств выпуклых функций как образовательного ресурса. В данном контексте авторами рассмотрена задача, опубликованная в журнале «Crux Mathematicorum», и проанализированы способы ее решения, восходящие к использованию неравенств Эрмита – Адамара и Караматы, а также геометрической характеризации графика выпуклой функции. Кроме того, в статье сформулировано обобщение обсуждаемой задачи, осмыслен ее образовательный потенциал.

Ключевые слова: выпуклая функция, неравенство Караматы, неравенства Эрмита – Адамара.

Некоторое время назад наше внимание привлекла задача, опубликованная в журнале «Crux Mathematicorum» [4]. Приведем ее формулировку.

*Пусть f: [0, 11] → **R** – интегрируемая и выпуклая функция. Доказать, что* $\int_3^5 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx \le \int_0^2 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx$.

Заметим, что формулировка задачи лаконична, но при этом восходит к классическим понятиям анализа, таким как выпуклость функции и интегрируемость функции по Риману. В данном контексте решение предложенной задачи может исходить из различных свойств выпуклых функций, что позволяет использовать ее в качестве методической составляющей при обучении студентов математическому анализу.

Перейдем к обсуждению способов решения задачи. Остановимся вначале на тех, что были присланы читателями журнала «Crux Mathematicorum» и опубликованы в [5].

Р е ш е н и е 1. Пусть линейная функция $g(x)=ax+b$ такова, что $g(3)=f(3)$ и $g(8)=f(8)$. Поскольку $f(x)$ выпукла, то

$$f(x)\ge g(x),\text{ если } 0\le x\le 3 \text{ или } 8\le x\le 11,$$

и

$$f(x)\le g(x),\text{ если } 3\le x\le 8.$$

Тогда левая часть доказываемого неравенства оценится сверху так:

$$\int_3^5 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx \le \int_3^5 g(x)dx+\int_6^8 g(x)dx=22a+4b.$$

В то же время его правая часть $\int_0^2 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx$ будет не меньше, чем

$$\int_0^2 g(x)dx+\int_9^{11} g(x)dx=22a+4b.$$

Неравенство установлено.

З а м е ч а н и е 1. Напрашивается предположение, что представленный способ решения не случайно помещен редакцией «Crux Mathematicorum» первым. Свойство продолжения хорды графика выпуклой функции, не проходящей через его концы, используется довольно редко. Однако здесь его применение естественно и понятно.

З а м е ч а н и е 2. Осмысление представленного решения позволяет подобрать и другие линейные функции $g(x)=ax+b$, обеспечивающие результат задачи. К примеру, $g(x)$ может проходить через точки $(2;\ f(2))$ и $(9;\ f(9))$.

Р е ш е н и е 2. Напомним, что функция $f: l \to \mathbf{R}$ называется *выпуклой* на промежутке *l* числовой прямой *Ox*, если для любых чисел *a* и *b* из *l* и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

По условию задачи функция $f(x)$ выпукла, значит,

$$f(3+x) \le \frac{2}{3} f(x)+\frac{1}{3} f(9+x)$$

и

$$f(6+x) \le \frac{1}{3} f(x)+\frac{2}{3} f(9+x).$$

Следовательно,

$$\int_3^5 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx=\int_0^2 \big(f(3+x)+f(6+x)\big)dx \le$$

$$\le \int_0^2 \big(f(x)+f(9+x)\big)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 3. Как указано в [5], большинство читателей, представивших свои решения обсуждаемой задачи, придерживались именно этого подхода.

Р е ш е н и е 3. Применим неравенство Эрмита – Адамара (см., напр., [2]) для выпуклой на отрезке [*a*; *b*] функции:

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Будем иметь:

$$\int_3^5 f(x)dx \le f(3)+f(5) \le$$

$$\le \left(\frac{7}{9} f(1)+\frac{2}{9} f(10)\right)+\left(\frac{5}{9} f(1)+\frac{4}{9} f(10)\right)=\frac{4}{3} f(1)+\frac{2}{3} f(10).$$

Здесь мы вновь воспользовались определением выпуклой функции, исходя из которого

$$f(3)=f\left(\frac{7}{9}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot 10\right) \le \frac{7}{9} f(1)+\frac{2}{9} f(10)$$

и

$$f(5)=f\left(\frac{5}{9}\cdot 1+\frac{4}{9}\cdot 10\right) \le \frac{5}{9} f(1)+\frac{4}{9} f(10).$$

Аналогично получим, что $\int_6^8 f(x)dx \le f(6)+f(8) \le \frac{2}{3} f(1)+\frac{4}{3} f(10)$.

Итак,

$$\int_3^5 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx \le 2f(1)+2f(10)=$$

$$=2f\left(\frac{0+2}{2}\right)+2f\left(\frac{9+11}{2}\right)\le\int_0^2 f(x)\,dx+\int_9^{11} f(x)\,dx.$$

Неравенство доказано.

Мы рассмотрели все способы решения, опубликованные в [5]. Перейдем теперь к изложению подходов, найденных нами.

Р е ш е н и е 4. Применяя подстановку $x=t+\dfrac{a+b}{2}$, будем иметь:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(t+\frac{a+b}{2}\right)dt$$

В таком случае

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(1+t)\,dt,\ \int_3^5 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(4+t)\,dt,$$

$$\int_6^8 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(7+t)\,dt,\ \int_9^{11} f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(10+t)\,dt.$$

Заметим теперь, что для доказательства обсуждаемого неравенства достаточно показать, что если функция *f* выпукла на отрезке [–1; 1], то

$$f(4+t)+f(7+t)\le f(1+t)+f(10+t). \tag{1}$$

Установим (1). Воспользуемся для этого простейшим неравенством Караматы (см., напр., [3]), положив

$$u=1+t,\ u_1=4+t,\ v_1=7+t,\ v=10+t.$$

Очевидно, что $u<u_1\le v_1<v$ и $u+v=u_1+v_1$. Отсюда немедленно следует (1).

З а м е ч а н и е 4. Доказать (1) можно и посредством обращения к определению выпуклой функции:

$$f(4+t)+f(7+t)=f\left(\frac{2}{3}(1+t)+\frac{1}{3}(10+t)\right)+f\left(\frac{1}{3}(1+t)+\frac{2}{3}(10+t)\right)\le$$

$$\le\frac{2}{3}f(1+t)+\frac{1}{3}f(10+t)+\frac{1}{3}f(1+t)+\frac{2}{3}f(10+t)=f(1+t)+f(10+t).$$

Собственно, обоснование простейшего неравенства Караматы производится по аналогичной схеме.

Р е ш е н и е 5. Очередной подход реализуем с опорой на утверждение, нередко называемое леммой о трех хордах (см., напр., [1, с. 165]).

Л е м м а. *Пусть функция f выпукла на промежутке l,* $x_1,x_2,x_3\in l$, $x_1<x_2<x_3$. *Тогда*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{2}$$

Применим данную лемму к решению нашей задачи. Положим сначала $x_1=1+t$, $x_2=4+t$, $x_3=7+t$. Из (2) следует:

$$f(4+t)-f(1+t)\le f(7+t)-f(4+t). \tag{3}$$

Пусть теперь $x_1=4+t$, $x_2=7+t$, $x_3=10+t$. Для них применение (2) влечет следующее неравенство:

$$f(7+t)-f(4+t)\le f(10+t)-f(7+t). \tag{4}$$

Складывая (3) и (4), получаем (1). Требуемое установлено.

З а м е ч а н и е 5. Здесь мы продемонстрировали одно из применений леммы о трех хордах, выбрав подходящие значения x_1, x_2, x_3 и используя неравенство $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, вытекающее из (2). Однако использовать данную лемму при реализации решения можно иначе.

Обсуждение последних способов решения задачи, апеллирующих к неравенству Караматы, позволило сформулировать обобщение исследуемой задачи.

Напомним читателю (см., напр., [3, с. 43]) общее неравенство Караматы. Пусть $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ – два упорядоченных набора действительных чисел ($a_i \ge a_{i+1}, b_i \ge b_{i+1}$ для $i=1,2,\dots,n-1$). Тогда *a* мажорирует *b* (пишут $a \succ b$), если

$$\begin{cases} a_1 \ge b_1, \\ a_1+a_2 \ge b_1+b_2, \\ \dots \\ a_1+a_2+\dots+a_{n-1} \ge b_1+b_2+\dots+b_{n-1}, \\ a_1+a_2+\dots+a_n = b_1+b_2+\dots+b_n. \end{cases}$$

Справедлива

Т е о р е м а [3, с. 43]. Для любой выпуклой функции $f(x)$, определенной на промежутке *I*, и любых двух наборов чисел $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ из этого промежутка, удовлетворяющих условию $a \succ b$, справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f(b_i)$, называемое неравенством Караматы.

Представим теперь обобщение обсуждаемой задачи, анонсированное ранее.

Пусть функция $f(x)$ *выпукла и интегрируема на некотором отрезке* $[A;B]$ *числовой прямой, а наборы чисел* $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ *и* $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ *из этого отрезка удовлетворят условию* $a \succ b$. *Для* $\Delta > 0$, *такого, что* $a_1+\Delta \le B$, *докажите неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+\Delta} f(x)\,dx \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{b_i}^{b_i+\Delta} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Р е ш е н и е. По аналогии с приемом, продемонстрированным в решении 4, воспользуемся подстановками $x=t+a_i+\frac{\Delta}{2}$ и $x=t+b_i+\frac{\Delta}{2}$ соответственно, где $i=1,\dots,n$. Будем иметь:

$$\int_{a_i}^{a_i+\Delta} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t+a_i+\frac{\Delta}{2}\right)dt, \quad \int_{b_i}^{b_i+\Delta} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t+b_i+\frac{\Delta}{2}\right)dt.$$

Тогда (5) эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t+a_i+\frac{\Delta}{2}\right)dt \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t+b_i+\frac{\Delta}{2}\right)dt. \tag{6}$$

В силу того что $\Delta > 0$, для доказательства (6) достаточно установить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(t+a_i+\frac{\Delta}{2}\right) \ge \sum_{i=1}^{n} f\left(t+b_i+\frac{\Delta}{2}\right),$$

которое немедленно вытекает из неравенства Караматы в силу условия $a \succ b$.

В заключение отметим, что работа с обсуждаемой задачей оказалась полезной по нескольким причинам. Во-первых, при ее решении удалось систематизировать широкий спектр утверждений, справедливых для выпуклых функций. Среди них неравенства Караматы и Эрмита – Адамара, лемма о трех хордах, геометрическая характеризация графика выпуклой функции. Во-вторых, анализ представленных решений позволил оценить возможности модификации решений в рамках изложенных схем. В таком контексте данная задача становится упражнением для отработки навыка взаимодействия с выпуклыми функциями. Кроме того, удалось сформулировать обобщение задачи.

Список литературы

1. *Виноградов О. Л.* Математический анализ : учебник. СПб. : БХВ-Петербург, 2017. 752 с.

2. *Калинин С. И., Панкратова Л. В.* Неравенства Эрмита – Адамара: образовательно-исторический аспект // Математическое образование, 2018. № 3 (87). С. 17–31.

3. *Номировский Д. А.* Неравенство Караматы // Квант. 2000. № 4. С. 43–45.

4. Crux Mathematicorum. Vol. 44 (2). February 2018. P. 70, problem 4316. URL: https://cms.math.ca/crux/v44/n2/Problems_44_2.pdf.

5. Crux Mathematicorum. Vol. 45 (2). February 2019. Pp. 96–97. URL: https://cms.math.ca/crux/v45/n2/Solutions_45_2.pdf.

Various properties of convex functions in solving a single problem

L. V. Pankratova[1], N. S. Protasov[2]

[1]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

[2]student of the 5th year of the direction of training 44.03.05 Pedagogical education
(profiles Mathematics, Computer Science), Vyatka State University. Russia, Kirov

Abstract. The concept of a convex function is one of the fundamental concepts not only of mathematical analysis, but also of a number of related disciplines, such as economics, control and optimization theory, etc. This leads to the active development of the topic of convex functions and a steady interest in it on the part of researchers. The purpose of this article is to systematize the known properties of convex functions as an educational resource. In this context, the authors consider the problem published in the journal "Crux Mathematicorum" and analyze the ways of its solution, which go back to the use of the Hermite – Hadamard and Karamata inequalities, as well as the geometric characterization of the graph of a convex function. In addition, the article summarizes the problem under discussion, and its educational potential is understood.

Keywords: convex function, Karamata inequality, Hermite – Hadamard inequalities.

References

1. *Vinogradov O. L. Matematicheskij analiz : uchebnik* [Mathematical analysis : textbook]. SPb. BHV-Petersburg. 2017. 752 p.

2. *Kalinin S. I., Pankratova L. V. Neravenstva Ermita – Adamara: obrazovatel'no-istoricheskij aspekt* [Hermite – Hadamard inequalities: educational and historical aspect] // *Matematicheskoe obrazovanie* – Mathematical education. 2018. No. 3 (87). Pp. 17–31.

3. *Nomirovskij D. A. Neravenstvo Karamaty* [Karamata inequality] // *Kvant* – Kvant. 2000. No. 4. Pp. 43–45.

4. Crux Mathematicorum. Vol. 44 (2). February 2018. P. 70, problem 4316. Available at: https://cms.math.ca/crux/v44/n2/Problems_44_2.pdf.

5. Crux Mathematicorum. Vol. 45 (2). February 2019. Pp. 96–97. Available at: https://cms.math.ca/crux/v45/n2/Solutions_45_2.pdf.

УДК 51 DOI 10.25730/VSU.0536.21.003

Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств на едином государственном экзамене по математике профильного уровня

Н. А. Зеленина[1], И. В. Ситникова[2]

[1]кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-4238-6282. E-mail: sezel@mail.ru

[2]кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-0003-2905. E-mail: i.sitn@mail.ru

Аннотация. В предлагаемой статье рассмотрены различные способы решения неравенств, которые применялись учащимися на едином государственном экзамене по математике профильного уровня в 2019–2020 гг. Авторы, имеющие большой опыт проверки экзаменационных работ, анализируют типичные ошибки и затруднения учащихся при использовании различных способов решения неравенств. Материалы статьи предназначены для учителей математики, работающих в старших классах, а также старшеклассников. Они позволят более эффективно организовать обучение решению неравенств, предотвратив возможные ошибки и затруднения.

Ключевые слова: обучение математике, неравенство, различные способы решения неравенств, единый государственный экзамен по математике.

Контрольно-измерительные материалы единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня традиционно включают в себя в качестве задачи повышенной сложности (№ 15) дробно-рациональное, показательное или логарифмическое неравенство. Решение такой задачи позволяет проверить владение достаточно обширным материалом курса алгебры и математического анализа, в частности: знание свойств основных элементарных функций; умение выполнять тождественные преобразования алгебраических и трансцендентных выражений; умение находить пересечение и объединение множеств; владение различными методами решения неравенств [5; 6].

Наш многолетний опыт работы в региональной предметной комиссии по математике показывает, что к решению неравенства приступает большое число школьников, однако дать обоснованное правильное решение удается далеко не всем. Согласно ежегодно публикуемой статистике, полный балл за решение неравенства в лучшем случае получают около четверти выпускников. Статистика решения этой задачи выпускниками Кировской области за последние пять лет приведена в табл. 1 [3; 4].

Таблица 1

Доля участников ЕГЭ, получивших максимальный балл за решение задачи № 15 в 2016–20 гг., %

2016 г.	2017 г.	2018 г.	2019 г.	2020 г.
13,5	12,1	13,3	22,4	16,8

Проверка развернутых ответов участников профильного ЕГЭ по математике показывает, что выпускники владеют различными методами решения неравенств, в том числе и выходящими за рамки школьной программы. Вместе с тем можно выделить типичные ошибки и затруднения учащихся при использовании различных способов решения. Обратимся к анализу этих ошибок на примере решения неравенств профильного экзамена 2019 и 2020 гг.

В 2019 году для решения была предложена следующая задача.

Решите неравенство

$$log_3(5-5x) \geq log_3(x^2-3x+2) - log_3(x+4) \text{ [2].}$$

Для решения многие учащиеся использовали преобразования с помощью свойств логарифмов и переход к решению рационального неравенства. В процессе решения необходимо было учитывать область определения функций в правой и левой частях неравенства.

Рассмотрим один из вариантов решения подробно.

$$log_3(5-5x) \geq log_3(x^2-3x+2) - log_3(x+4) \Leftrightarrow$$
$$log_3(5-5x) + log_3(x+4) \geq log_3(x^2-3x+2) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 5-5x > 0, \\ x+4 > 0, \\ x^2-3x+2 > 0, \\ log_3(5-5x)(x+4) \geq log_3(x^2-3x+2) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x < 1, \\ x > -4, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right., \\ 5(1-x)(x+4) \geq (x-1)(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 1, \\ (x-1)(x-2+5x+20) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -4 < x < 1, \\ (x-1)(6x+18) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 1, \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 1.$$

Ответ: $x \in [-3; 1)$.

Предложенный вариант решения опирается на преобразования с использованием равносильных переходов.

Как правило, прежде чем начать преобразовывать неравенство, школьников учат находить область допустимых значений (ОДЗ) переменной, далее решать его сведением к рациональному или дробно-рациональному неравенству, а затем пересекать найденное решение с ОДЗ. В связи с этим большинство учащихся, приступая к решению неравенства, на первом этапе решения находили ОДЗ переменной. Далее для преобразования неравенства учащиеся использовали разные варианты. Часть выбирала рассмотренный выше способ, который приводит к квадратному неравенству. Некоторые учащиеся не переносили $log_3(x+4)$ в левую часть неравенства, а заменяли в правой части разность логарифмов по одному основанию логарифмом частного. Тогда после использования свойства возрастания логарифмической функции и потенцирования обеих частей неравенства получали:

$$5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4}.$$

Решение дробно-рационального неравенства, как известно, является более сложной задачей, в которой допускаются стандартные ошибки. Самой распространенной из них является умножение обеих частей неравенства на знаменатель. Хотя в данном случае, при условии верно найденной ОДЗ, умножение на знаменатель и являлось правомерным действием, учащиеся должны были пояснить, что при условии $-4 < x < 1$ умножение на знаменатель не меняет знака неравенства, или решить его методом интервалов, а затем пересечь найденное решение с ОДЗ.

Отдельно отметим следующее. При нахождении области допустимых значений переменной участникам экзамена требовалось решить систему неравенств $\begin{cases} 5-5x > 0, \\ x+4 > 0, \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases}$. Очевидно, что решением последнего неравенства является объединение промежутков и получается следующая система $\begin{cases} x < 1, \\ x > -4, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Многие выпускники испытывали здесь затруднения при выборе ответа и не смогли преодолеть логическую трудность, связанную с включением в систему совокупности неравенств. Отчасти ошибки возникали из-за того, что, не применяя знак совокупности, школьники теряли и союз ***или***, соединяющий два последних неравенства системы.

Рассмотрим еще один метод решения, который применялся на экзамене, – обобщенный метод интервалов. Как известно, это универсальный метод решения неравенств, вопрос только в целесообразности его применения. Под целесообразностью здесь стоит понимать ответ на следующий вопрос: упрощает ли применение данного метода решение неравенства? Следуя методу, учащиеся приводили неравенство к виду

$$log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4) \geq 0.$$

Вводили функцию $f(x) = log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4)$.

Находили область ее определения $D(f)$: $\begin{cases} 5-5x > 0, \\ x+4 > 0, \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 1.$

Находили нули функции:

$$log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4) = 0;$$
$$log_3(5-5x) + log_3(x+4) = log_3(x^2-3x+2);$$
$$log_3(5-5x)(x+4) = log_3(x^2-3x+2);$$
$$-5x^2-15x+20 = x^2-3x+2;$$
$$x^2+2x-3=0;$$
$$x_1 = -3 \text{ – нуль функции, } x_2 = 1 \notin D(f).$$

Определяли знаки функции на промежутках области определения функции и выбирали промежутки нужного знака:

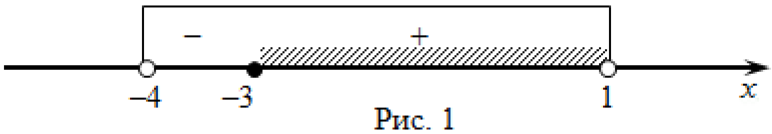


Рис. 1

Ответ: $x \in [-3; 1)$.

Из двух приведенных решений первое, на наш взгляд, является более простым. Это объясняется тем, что применение обобщенного метода интервалов требует нахождения знаков на промежутках для довольно сложной функции $f(x) = log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4)$. Отметим здесь также тот факт, что многие выпускники не осознают, что проверка знака функции в данном случае является неотъемлемой частью решения.

В 2020 году на ЕГЭ по математике профильного уровня была предложена следующая задача.

Решите неравенство

$$x^2 log_{343}(x+3) \leq log_7(x^2+6x+9) [1].$$

Решение этого смешанного неравенства отличалось разнообразием применяемых методов решения.

Чаще всего схема решения была следующей. Учащиеся находили ОДЗ переменной: $x > -3$ и преобразовывали неравенство к виду $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right) \leq 0$. Находили корни уравнения $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right) = 0$, это числа -2 и $\pm\sqrt{6}$, принадлежащие ОДЗ. Далее определяли знаки произведения $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)$ на ОДЗ (рис. 2) и выписывали правильный ответ $x \in (-3; -\sqrt{6}] \cup [-2; \sqrt{6}]$.

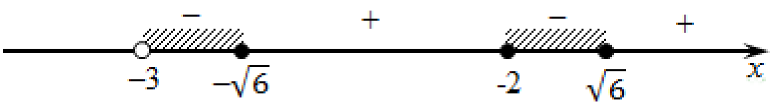


Рис. 2

Однако во многих работах учеников отмечалась грубая, но, как оказалось, типичная ошибка. Знаки произведения $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)$ были «определены» на промежутках всей числовой прямой, в том числе и на тех, где вышеупомянутое произведение не существует. Далее к выбранным в соответствии со знаком неравенства промежуткам применялась верно найденная ОДЗ переменной и получался верный (!) ответ. Такой способ рассуждений, с одной стороны, демонстрирует глубокое непонимание обобщенного метода интервалов, где последовательность шагов вполне определена и знак вводимой в рассмотрение функции $y = log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)$ ставится только на промежутках ее области определения. С другой стороны, говорит о несостоятельности той схемы решения неравенств, содержащих логарифмы, которой чаще всего обучают школьников на уроках математики: 1) найдите ОДЗ переменной; 2) решите неравенство; 3) найдите пересечение решения неравенства с найденной ОДЗ. Эта схема работает, но далеко не всегда.

Все чаще в последнее время при решении логарифмических неравенств на экзамене школьники применяют метод рационализации, позволяющий заменить логарифмическую функцию рациональной. Применение этого метода, опирается на утверждение, что знак функции $log_{f(x)}g(x)$ совпадает на области определения этой функции со знаком выражения $(f(x)-1)(g(x)-1)$. В рассматриваемом неравенстве после нахождения ОДЗ переменной ($x > -3$) и приведения его к виду $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right) \leq 0$ можно заменить множитель $log_7(x+3)$ на произведение $(7-1)(x+3-1)=6(x+2)$. Тогда неравенство становится рациональным:

$$6(x+2)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\le 0.$$

В таком неравенстве определение знаков на промежутках не вызывает трудностей, главное при получении ответа не забыть пересечь его решение с найденной ОДЗ. Несмотря на то что этот метод решения не является элементом школьной программы, он, на наш взгляд, самый простой и экономный с точки зрения времени, потраченного на решение.

Еще один метод, который был представлен в работах участников экзамена, – это метод расщепления неравенств, основанный на использовании условий неотрицательности (неположительности) произведения двух множителей.

$$x^2log_{343}(x+3)\le log_7(x^2+6x+9)\Leftrightarrow x^2log_{7^3}(x+3)\le log_7(x+3)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{3}log_7(x+3)-2log_7|x+3|\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}x+3>0,\\ log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3,\\ log_7(x+3)\le 0,\\ \frac{x^2}{3}-2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-3,\\ log_7(x+3)\ge 0,\\ \frac{x^2}{3}-2\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3,\\ x+3\le 1,\\ x^2-6\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-3,\\ x+3\ge 1,\\ x^2-6\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3,\\ x\le -2,\\ \left[\begin{array}{l}x\ge\sqrt6\\ x\le-\sqrt6\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x>-3,\\ x\ge -2,\\ -\sqrt6\le x\le\sqrt6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<x\le-\sqrt6\\ -2\le x\le\sqrt6\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-3;\ -\sqrt6]\cup[-2;\ \sqrt6]$.

Главное достоинство этого метода – его строгая логичность, недостаток – логические трудности, связанные с умением решать системы и совокупности неравенств. Школьники, как правило, при записи решения неравенства не прибегают к равносильным переходам и не используют логическую символику. Наиболее часто в работах участников экзамена первая система разбивается на две системы, связанные союзом ***или***. Отдельно решается каждая система, полученные решения объединяются.

Заметим, что применение любого из рассмотренных выше методов решения подразумевает преобразование исходного неравенства к виду $\frac{x^2}{3}log_7(x+3)\le 2log_7|x+3|$ и раскрытию модуля при условии $x+3>0$. Многие учащиеся сразу заменяли выражение $log_7(x+3)^2$ на $2log_7(x+3)$, не поясняя правомерность такой замены.

При решении рассматриваемого неравенства довольно редко, но использовался и переход к показательно-степенному неравенству:

$$x^2log_{343}(x+3)\le log_7(x^2+6x+9)\Leftrightarrow\frac{x^2}{3}log_7(x+3)\le log_7(x+3)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log_7(x+3)^{\frac{x^2}{3}}\le log_7(x+3)^2\Leftrightarrow(x+3)^{\frac{x^2}{3}}\le(x+3)^2.$$

Далее рассматривались два случая для основания степени:

$$(x+3)^{\frac{x^2}{3}}\le(x+3)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x+3<1,\\ \frac{x^2}{3}\ge 2,\end{cases}\\ \begin{cases}x+3>1,\\ \frac{x^2}{3}\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3<x<-2,\\ \left[\begin{array}{l}x\ge\sqrt6\\ x\le-\sqrt6\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x>-2,\\ -\sqrt6\le x\le\sqrt6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<x\le-\sqrt6\\ -2<x\le\sqrt6\end{array}\right.$$

Распространенной ошибкой была потеря решения $x=-2$, которое получалось в результате рассмотрения случая, когда основание степени равно единице. Это связано на наш взгляд, с тем, что полученные в результате преобразований функции левой и правой частей неравенства воспринимались учащимися как показательные, у которых основание больше нуля и не равно единице.

Еще один способ решения показательно-степенного неравенства был связан с рационализацией последнего. В основе этого рассуждения лежит утверждение, что знак выражения $f(x)^{g(x)}-f(x)^{h(x)}$ совпадает на области определения выражения со знаком произведения $(f(x)-1)\big(g(x)-h(x)\big)$.

Применяя это утверждение, школьники получали, что при условии $x+3>0$ неравенство $(x+3)^{\frac{x^2}{3}}-(x+3)^2\le 0$ можно заменить рациональным $(x+3-1)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\le 0$ или $(x+2)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\le 0$. Использование этого метода, как видим, позволяет избежать потери решения $x=-2$.

Рассмотренные выше способы решения неравенств и типичные ошибки выпускников помогут учителям математики более эффективно организовать работу по обучению решению неравенств и подготовке к итоговой аттестации по предмету.

Список литературы

1. Задания 15 ЕГЭ–2020 : сб. задач. URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=34042998.

2. Задания 15 (С3) ЕГЭ 2019 : сб. задач. URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=24900054.

3. *Зеленина Н. А., Крутихина М. В.* Некоторые итоги ЕГЭ по математике 2018 года в Кировской области // Концепт. 2019. № V3. С. 75–89. URL: http://e-koncept.ru/2019/196029.htm.

4. *Зеленина Н. А., Носова Н. В.* Анализ результатов ЕГЭ по учебному предмету «Математика» // Единый государственный экзамен в Кировской области. Анализ результатов ЕГЭ-2020 : сборник информационно-аналитических и методических материалов / Сост. Н. В. Носова, Авторский коллектив. Киров : ИРО Кировской области, 2020. С. 71–80. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44256983.

5. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике. URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.

6. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена. URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.

Typical mistakes and difficulties of schoolchildren in solving inequalities at the unified state exam in mathematics of the profile level

N. A. Zelenina[1], I. V. Sitnikova[2]

[1]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-4238-6282. E-mail: sezel@mail.ru

[2]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-0003-2905. E-mail: i.sitn@mail.ru

Abstract. The proposed article considers various ways of solving inequalities that were used by students at the unified state exam in mathematics of the profile level in 2019-2020. The authors, who have extensive experience in checking exam papers, analyze the typical mistakes and difficulties of students when using various ways to solve inequalities. The materials of the article are intended for mathematics teachers working in high school, as well as high school students. They will make it possible to organize training in solving inequalities more effectively, preventing possible mistakes and difficulties.

Keywords: teaching mathematics, inequality, various ways of solving inequalities, unified state exam in mathematics.

References

1. *Zadaniya 15 EGE–2020 : sb. zadach* – Tasks 15 Unified State Exam–2020 : collection of tasks. Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=34042998.

2. *Zadaniya 15 (S3) EGE 2019 : sb. zadach* – Tasks 15 (S3) Unified State Exam–2019 : collection of tasks. Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=24900054.

3. *Zelenina N. A., Krutihina M. V. Nekotorye itogi EGE po matematike 2018 goda v Kirovskoj oblasti* [Some results of the Unified State Exam in mathematics in 2018 in the Kirov region] // *Koncept* – Concept. 2019. No. V3. Pp. 75–89. Available at: http://e-koncept.ru/2019/196029.htm.

4. *Zelenina N. A., Nosova N. V. Analiz rezul'tatov EGE po uchebnomu predmetu "Matematika"* [Analysis of the results of the Unified State Exam on the academic subject "Mathematics". Analysis of the results of the Unified State Exam-2020: collection of information-analytical and methodological materials / Comp. N. V. Nosova, Author's team. Kirov. IRO of the Kirov region. 2020. Pp. 71–80. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44256983.

5. *Kodifikator trebovanij k urovnyu podgotovki vypusknikov obrazovatel'nyh organizacij dlya provedeniya edinogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike* – Codifier of requirements for the level of training of graduates of educational organizations for the unified state exam in mathematics. Available at: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#! / tab/151883967-2.

6. *Kodifikator elementov soderzhaniya po matematike dlya sostavleniya kontrol'nyh izmeritel'nyh materialov dlya provedeniya edinogo gosudarstvennogo ekzamena* – Codifier of elements of content in mathematics for the preparation of control measuring materials for the unified state exam. Available at: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.

УДК 378.147 DOI 10.25730/VSU.0536.21.004

О реализации дискретной линии в обучении дисциплине «Искусственный интеллект» студентов педагогических направлений подготовки

Е. А. Перминов
доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры математических и естественно-научных дисциплин,
Российский государственный профессионально-педагогический университет.
Россия, г. Екатеринбург. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

Аннотация. Как известно, искусственный интеллект (ИИ) стал лидирующей информационной технологией цифровой эры. В статье исследуется фундаментальная роль дискретной математики (ДМ) в разработке методики обучения дисциплине «Искусственный интеллект» студентов педагогических направлений подготовки.

Обосновывается, что в отборе содержания обучения дисциплине «ИИ» будущих педагогов велико значение *фундаментальных основ* дискретной математики. Они включают в себя ключевые понятия и методы следующих областей ДМ: *абстрактной алгебры, математической логики, теорий графов, алгоритмов, автоматов и формальных языков, комбинаторики*.

Известно, что проблема представления нечетких знаний является ключевой в разработке ИИ. Характеризуется важная роль фундаментальных основ ДМ в обучении будущих педагогов представлению нечетких знаний в системах искусственного интеллекта. Это обучение особенно необходимо в использовании ими ИИ в своей будущей профессиональной деятельности.

Характеризуется роль ДМ в классификации видов алгоритмически разрешимых задач искусственного интеллекта. Это имеет фундаментальное значение в понимании будущими педагогами того, что можно и что нельзя сделать на основе ИИ в самых различных областях деятельности.

Ключевые слова: искусственный интеллект, обучение педагогов, роль дискретной математики.

Как известно, в РФ разработан и утвержден Федеральный проект «Искусственный интеллект» (ИИ) [13], который затронет или полностью преобразует все профессии во всех сферах деятельности человека. Искусственный интеллект на рубеже веков становится ведущей основой автоматизации и роботизации производства, в котором «доля автоматизированных процессов достигнет к 2035 г. 95 %, а 50–70 % нынешних рабочих мест в этой сфере перестанут существовать» [7]. Фундаментальное значение ИИ предсказал более чем полвека назад основоположник кибернетики В. М. Глушков [3].

Формирование ИИ как области науки началось более полувека назад, но и в настоящее время по-прежнему существуют различные представления о предмете и функциях искусственного интеллекта (см., например, [6; 15]). Становится ясно, что в XXI веке Искусственный интеллект стал *лидирующей информационной технологией* научных исследований и поэтому имеет фундаментальное значение в модернизации современного образования, предусмотренной в национальном проекте «Образование». В связи с этим планируется в пилотном режиме ввести в школы страны новый учебный предмет – «Искусственный интеллект» [12]. Несомненно, является назревшей и проблема внедрения предмета ИИ в подготовку в средних специальных учебных заведениях.

Об актуальности реализации дискретной линии. В разработке Искусственного интеллекта велико значение дискретной математики (ДМ). Как следует из анализа трудов А. П. Ершова [5], дискретная математика является основой языка информационных технологий и процессов и поэтому – основой ИИ как лидирующей информационной технологии цифровой эры. Роль дискретной математики особенно важна в доведении системы «законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах» [5, с. 294]. В начавшуюся цифровую эру идеи и методы ДМ стали основой информационной технологии обработки больших данных (Big Data) как новой науки, предоставляющей удивительную «возможность с точностью предсказывать, что произойдет в будущем в самых разных областях жизни» [10, с. 2].

Поэтому закономерно, что на важность и актуальность в цифровую эпоху изучения основ дискретной математики в школах и вузах указывалось на 13-м Всемирном конгрессе по математическому образованию (ICME-13), проходившем в Гамбурге (Германия) в июле 2016 г. В научном обиходе за рубежом даже появилось крылатое выражение «Дискретная математика рулит!».

Предугадывая еще полвека назад это фундаментальное значение ДМ (известной также под названиями *конечная* и компьютерная), А. Н. Колмогоров указывал, что «по существу все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного» [8, с. 15].

Таким образом, дискретная математика имеет фундаментальное значение в решении назревшей проблемы внедрения ИИ не только в вузах, но уже и в школах и средних специальных учебных заведениях. Поэтому является *актуальной* реализация дискретной линии в обучении дисциплине «Искусственный интеллект» студентов педагогических направлений, что имеет важное значение и в их методической подготовке к обучению этой дисциплине учащихся школ, колледжей (техникумов).

О роли фундаментальных основ дискретной математики в обучении дисциплине «Искусственный интеллект». В последние десятилетия в условиях большой свободы, предоставляемой ФГОС ВО в формировании ООП и учебных планов, возникли большие *диспропорции* между фундаментализацией образования и чрезмерным внедрением в него информационных технологий. Это особенно важно учесть в подготовке студентов педагогических направлений, несущих наибольшую ответственность в подготовке уже со школьной скамьи будущих профессиональных работников цифровой эры.

В фундаментализации подготовки студентов в вузах особенно важна *интеграция или сближение* науки и образования, предполагающая установление связей между ними. Поэтому ДМ как лидирующая наука в информатизации всех областей деятельности лежит в основе фундаментализации подготовки будущих педагогов дисциплине «Искусственный интеллект» как новой уникальной информационной технологии цифровой эры. В то же время наблюдается упрощенное внедрение ИИ в подготовку студентов в вузах. Это особенно выпукло отражается в изучении с ними «инструкций» по использованию различных инструментальных систем ИИ для решения простых задач (например, задачи «Определение площади плоских фигур» или «Расчет параметров электрической цепи постоянного тока» и др. [14]). В результате по-прежнему «над учителем и школьником довлеют рекомендации работать с установившимся инструктивным материалом» [9, с. 13]. В связи с индустрией программного обеспечения инструментальных систем ИИ следует подчеркнуть, что «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии ПО (программного обеспечения. – *Е. П.*). Большая часть усовершенствований средств и методов приводит к увеличению производительности и качества примерно на 5–35 %. Но многие из этих усовершенствований были заявлены как дающие преимущества на “порядок”» [2, с. 23].

В разработке информационных технологий, в том числе и искусственного интеллекта, велико значение сформировавшихся на рубеже тысячелетий *фундаментальных основ* дискретной математики. Как будет обосновано далее, они особенно важны в фундаментализации обучения дисциплине «Искусственный интеллект» студентов педагогических направлений, особенно – в отборе содержания ее обучения.

Анализ монографической и учебной литературы по дискретной математики, проведенный в [17], показывает, что фундаментальные основы ДМ включают в себя ключевые понятия и методы следующих ее областей, пронизывающих исследования самых различных наук: *абстрактной алгебры, математической логики, теорий графов, алгоритмов, автоматов и формальных языков, комбинаторики*. Не случайно базовые понятия и методы из перечисленных разделов ДМ (за исключением комбинаторики) включены в учебное пособие «Фундаментальные основы дискретной математики» [4]. Поэтому понятия и методы этих разделов ДМ стали концептуальной основой методики отбора содержания учебного пособия по ДМ для школьников [16].

Как следует из анализа [17], именно эти области ДМ являются основой разработки систем компьютерной математики и компьютерных технологий, и в том числе – разработки ИИ. Поэтому их значение фундаментально в формировании *общекультурных представлений* студентов педагогических направлений об идеях и методах искусственного интеллекта, имеющих важное значение в их подготовке к работе по «образовательным модулям по ИИ» в школе и в средних специальных учебных заведениях.

Особую ценность перечисленных областей ДМ в отборе целей и содержания профильного обучения ИИ будущих педагогов достаточно охарактеризовать на примере абстрактной алгебры (известной также под названиями современной и общей). Как известно, роль абстрактной алгебры «в современной математике исключительно велика, и существует объективная тенденция к дальнейшей “алгебраизации” математики» [11, стб. 117]. Поэтому «сфера ее применения расширяется столь стремительно, что иногда поговаривают об “алгебраической чуме”, охватившей не только математику, но и другие науки» [19, с. 7]. Ввиду этого закономерно, что в настоящее время важную роль играет «алгебраизация» исследований даже в плохо формализуемых, но очень важных областях ИИ. Например, идеи и методы абстрактной алгебры оказались эффективными в исследованиях по обработке и распознавания информации (в том числе видеоинформации), осуществленных в трудах академика Ю. И. Журавлева, а также его учеников и последователей. Поэтому не случайно абстрактная алгебра имеет фундаментальное значение в решении важной проблемы искусственного интеллекта – конструировании «универсальных человекоподобных роботов, способных заменить человека практически во всех областях деятельности, в которых он захочет себя заменить» [3, с. 431]. В частности, возникло «перспективное направление автоматизации более высоких творческих разделов инженерно-конструкторского труда – разработка так называемых алгебр конструкций» [Там же, с. 446].

Перечисленные разделы дискретной математики являются основой разработки формальных систем ИИ, которые имеют фундаментальное значение в автоматизации умственного труда. В настоящее время на основе формальных систем ИИ «разработаны эффективные методы доказательства теорем (методы автоматизации дедуктивного вывода): процедура вывода Эрбрана, принцип резолюции, вывод на графе связей, вывод на графе дизъюнктов» [15, с. 82]. Поэтому благодаря ИИ исследователи, особенно в экспериментальных науках, получают новые результаты, неожиданные для них самих! При этом компьютер «может не просто производить те или иные расчеты, а брать объект исследования, скажем, тот или иной физический прибор, присоединяться к этому прибору и самостоятельно проводить физический эксперимент, рассчитывать показания, обрабатывать их и выдавать готовый результат» [3, с. 415]. ИИ в условиях информационного затора особенно важен в решении тех проблем, которые человек не сможет решить даже в отведенный ему жизнью срок.

В контексте существующих проблем ИИ важно отметить, что «доминирующими в ДМ являются <…> алгебраические, порядковые структуры и логические, алгоритмические, комбинаторные схемы» [17, с. 64]. При этом под схемами в общенаучной терминологии подразумевают средства, методы математического исследования [18]. Как следует из анализа [17], язык этих структур и схем пронизывает исследования перечисленных ранее областей дискретной математики, в совокупности и образующих ее *фундаментальные основы*. Поэтому язык этих структур и схем особенно важен в фундаментализации обучения будущих педагогов дисциплине «Искусственный интеллект». В первую очередь – в обучении корректному использованию компьютерного, аппаратного и программного обеспечения ИИ, что позволяет избежать самых живучих ошибок в исследовании объектов и явлений – ошибок пропущенной логики рассуждений.

Отметим, что основы обучения языку доминирующих в ДМ структур и схем для студентов педагогических направлений изложены в учебном пособии Е. М. Вечтомова [1].

О фундаментальной роли дискретной математики в обучении будущих педагогов представлению нечетких знаний в системах ИИ. Проблема представления нечетких знаний является *ключевой* при разработке интеллектуальных систем ИИ различного назначения. Как известно, «нечеткие знания по своей природе разнообразны и могут быть условно разделены на следующие категории: неточность, недоопределенность, неоднозначность, т. е. любые нечеткости, между которыми нельзя провести четкой границы» [15, с. 124].

Нечеткие знания возникают при использовании слов естественного языка в различных видах моделирования (информационного, имитационного, стохастического и др.) объектов, явлений и процессов, особенно в гуманитарных областях, таких как педагогика, психология, медицина, социология, искусство и др. Поэтому будущие педагоги должны знать математические основы представления в системах ИИ нечетких знаний. Это играет важную роль в их подготовке к профильному обучению искусственному интеллекту школьников и студентов колледжей (техникумов) для демонстрации им возможностей ИИ в различных областях деятельности человека.

В связи с этим отметим, что на основе нечеткой математики разработан аппарат формализации содержательно значимых в ИИ понятий (например, таких как высокий или низкий уровень заболеваемости, устойчивая погода, плохое прилежание ученика и т. д.). Но важно подчеркнуть, что неотъемлемой частью математических основ представления в ИИ нечетких знаний, разработки нечетких систем ИИ и нечеткого управления реальными объектами и процессами на основе ИИ являются *основные понятия* языка доминирующих в ДМ структур и схем, перечисленных ранее.

Действительно, понятия нечеткого множества, нечеткого n-арного отношения и операции, нечеткого высказывания и предиката, нечеткой модели и алгоритма определяются на основе «четких» аналогов этих понятий ДМ. На основе этих четких аналогов разрабатываются средства «обработки неполных знаний, для которых необходимы немонотонные выводы, разрабатываются методы немонотонной логики: немонотонная логика Макдермотта и Доула, в которой вводятся условные логические операции, логика умолчания о замкнутости мира Рейтера, немонотонная логика Маккарти и т. д.» [15, с. 109]. Возникающие при этом формальные системы нечеткого логического вывода играют важнейшую роль в приложениях ИИ в самых разных областях науки и производства (ИИ для бизнеса, проектах «умных» городов, различных экспертных систем, систем принятия решений и т. д.).

Важно подчеркнуть, что в результате на основе понятий и методов *нечеткой* дискретной математики возникает возможность «переформатировать» необходимый аппарат теории вероятностей и математической статистики (информация о вероятностях, корреляционный, факторный, дисперсионный анализ и др.) и представить его в компьютерном формате, пригодном для его использования в системах ИИ.

Следует подчеркнуть, что в использовании в системах ИИ понятий и методов нечеткой математики важную роль играет комбинаторика как раздел ДМ. Комбинаторные понятия и методы имеют фундаментальное значение в теории вероятностей, важной в использовании в ИИ методов нечеткой математики и математической статистики. Но еще более важно то, что понятия и методы комбинаторики позволяют преодолеть трудности в решении задач, приводящие к большим вычислениям на компьютере (эффект «комбинаторного взрыва»), при котором увеличение быстродействия компьютера не упрощает ситуацию с большими вычислениями. Это особенно важно в использовании ИИ в обработке и анализе больших данных (Big Data).

Роль ДМ в классификациях алгоритмически разрешимых видов задач ИИ. Вряд ли даже в будущем возможно будет сконструировать искусственный интеллект, который будет соперничать с человеком в выполнении таких задач, как анализ произведений литературы и искусства, принятие врачебных решений, перевод языков, абстрагирование и обобщение и т. д.

Принципиальные различия между разумом человека и «разумом» машины (компьютера) делает даже самые эффективные системы ИИ непригодными к решению многих сложных комплексных задач науки и производства посредством контактов с человеком, особенно ограниченных по времени, тем самым показывая ограниченность искусственно созданных языков. Поэтому для обеспечения надежности и безопасности использования ИИ в производстве и других сферах жизнедеятельности человека необходима сходная с математикой классификация задач, решаемых на основе ИИ. Эта классификация имеет особенно важное значение в подготовке будущих педагогов к формированию представлений школьников и студентов колледжей (техникумов) о возможностях ИИ в решении сложных комплексных проблем науки и производства (особенно проблем оптимизации системы «Человек – материал – среда обитания»).

Классификация задач, решаемых на основе искусственного интеллекта.

1) Задачи, *не имеющие решения на основе ИИ.* Примером такой задачи является задача создания вечного двигателя.

2) Задачи *с неформализуемым условием на языке той или иной системы ИИ (некорректные задачи)*. Примером такой задачи является задача всестороннего анализа произведений искусства (задача создания компьютерного «аналога» искусствоведа).

3) Задачи *с не найденным алгоритмом решения* на основе профильной системы ИИ (разработанной для той или иной области исследований). Примером такой задачи является задача разработки алгоритма перечисления всех простых чисел, пока непосильная для систем ИИ, предназначенных для исследований в математике.

4) Задачи *с «плохим» (экспоненциальным)* алгоритмом решения. Примером такой задачи является астрономическая задача нахождения всех Галактик или задача описания всех простых групп (из абстрактной алгебры).

5) Задачи *с «хорошим» (полиномиальным)* алгоритмом решения. Примеров таких алгоритмов решения задач ИИ уже достаточно много известно в науках и производстве.

Как показывает проведенный в [17] анализ элементов ДМ в учебной и популярной литературе для школьников и основ методики элективного обучения ДМ в школе, в настоящее время уже разработаны основы методики внедрения элементов дискретной математики в содержание образовательных модулей по искусственному интеллекту для школьников. Эти элементы ДМ имеют важное значение в развитии математической одаренности школьников [18], развитие которой будет способствовать в будущем формированию их умений в использовании ИИ при обучении в вузах.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 296 с. (Серия: Бакалавр. Академический курс).

2. *Гласс Р.* Факты и заблуждения профессионального программирования: пер. с англ. С.-Петербург : Символ-Плюс, 2007. 240 с.

3. *Глушков В. М.* Кибернетика. Вопросы теории и практики. Москва : Наука, 1986. 477 с.
4. *Горбатов В. А.* Фундаментальные основы дискретной математики (информационная математика). М. : Издательство физико-математической литературы, 2000. 544 с.
5. *Ершов А. П.* Избранные труды. Новосибирск : Наука, Сибирская издат. фирма, 1994. 413 с.
6. *Иванов В. М.* Интеллектуальные системы : учебное пособие. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. 92 с.
7. *Калинина А.* Как подготовить страну к четвертой промышленной революции // Газета РБК. 16 января 2017. URL: https://www.rbc.ru/newspaper/2017/01/16/5878d2389a79470077130332 (дата обращения: 20.02.2019).
8. *Колмогоров А. Н.* Научные основы школьного курса математики. Первая лекция // Математика в школе. 1969. № 3. С. 12–18.
9. *Красовский Н. Н.* Математическое моделирование в школе // Изв. УрГУ. 1995. № 4. С. 12–24.
10. *Майер-Шенбергер В., Кукьер К.* Большие данные. Революция, которая изменит то, как мы живем, работаем и мыслим. М. : Манн, Иванов и Фербер, 2014. 310 с.
11. Математическая энциклопедия : в 5 т. Т. 1. М. : Сов. энцикл., 1979. 1152 стб.
12, Минпросвещения РФ к 2021 году включит изучение искусственного интеллекта в школьную программу. РИА Новости РФ от 22.02.2020. URL: https://ria.ru/20200221/1565037723.html (дата обращения: 21.10.2020).
13. Национальный проект «Искусственный интеллект». URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/72738946.
14. *Никитин П. В., Горохова Р. И.* Методические особенности обучения будущих учителей информатики основам искусственного интеллекта: от практики к теории // Проблемы современного образования. № 2. 2016. С. 121–126. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25919225 (дата обращения: 7.09.2020).
15. *Павлов С. Н.* Системы искусственного интеллекта : учеб. пособие : в 2 ч. Ч. 1. Томск : Эль Контент, 2011. 176 с.
16. *Перминов Е. А.* Дискретная математика: учебное пособие для 8–9 классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург : ИРРО, 2004. 206 с.
17. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования : монография. Екатеринбург : Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2013. 286 с.
18. *Тестов В. А.* Математическая одаренность и ее развитие // Перспективы науки и образования : международный электронный научно-практический журнал. 2014. № 6. С. 60–67. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-odarennost-i-ee-razvitie (дата обращения: 18.08.20).
19. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. М. : Мир, 1979. 260 с.

About the implementation of the discrete line in teaching the discipline "Artificial Intelligence" to students of pedagogical training areas

E. A. Perminov
Doctor of Pedagogical Sciences, associate professor, professor of the Department of Mathematical and Natural Science Disciplines, Russian State Vocational Pedagogical University.
Russia, Yekaterinburg. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

Abstract. As you know, artificial intelligence (AI) has become the leading information technology of the digital era. The article examines the fundamental role of discrete mathematics (DM) in the development of methods of teaching the discipline "Artificial Intelligence" to students of pedagogical training areas.

It is proved that in the selection of the content of teaching the discipline "AI" for future teachers, the fundamental foundations of discrete mathematics are of great importance. They include the key concepts and methods of the following areas of DM: abstract algebra, mathematical logic, graph theory, algorithms, automata and formal languages, and combinatorics.

It is known that the problem of representing fuzzy knowledge is a key one in the development of AI. The article describes the important role of the fundamental foundations of DM in teaching future teachers to represent fuzzy knowledge in artificial intelligence systems. This training is especially necessary in their use of AI in their future professional activities.

The role of DM in the classification of types of algorithmically solvable problems of artificial intelligence is characterized. This is fundamental to future educators' understanding of what can and cannot be done with AI in a wide variety of fields.

Keywords: artificial intelligence, teacher training, the role of discrete mathematics.

References

1. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie structury : uchebnoe posobie dlya akademicheskogo baccalaureate* [Mathematics: basic mathematical structures : tutorial for academical baccalaureate]. 2nd ed. Moscow. Yurayt. 2018. 296 p. (Series: Bachelor. Academic course).

2. *Glass R. Fakty i zabluzhdeniya professional'nogo programmirovaniya : per. s angl.* [Facts and misconceptions of professional programming : trans. from English]. SPb. Symvol-Plus. 2007. 240 p.

3. *Glushkov V. M. Kibernetika. Voprosy teorii i praktik* [Cybernetics. Questions of theory and practice]. M. Nauka. 1986. 477 p.

4. *Gorbatov V. A. Fundamental'nye osnovy diskretnoj matematiki (informacionnaya matematika)* [Fundamental bases of discrete mathematics (information mathematics)]. M. Physical and Mathematical literature. 2000. 544 p.

5. *Ershov A. P. Izbrannye trudy* [Selected works]. Novosibirsk. Nauka, Siberia publishing firm. 1994. 413 p.

6. *Ivanov V. M. Intellektual'nye sistemy : uchebnoe posobie* [Intellectual systems : textbook]. Yekaterinburg. Ural University. 2015. 92 p.

7. *Kalinina A. Kak podgotovit' stranu k chetvertoj promyshlennoj revolyucii* [How to prepare the country for the fourth industrial revolution] // *Gazeta RBK* – RBK newspaper. January 16, 2017. Available at: https://www.rbc.ru/newspaper/2017/01/16/5878d2389a79470077130332 (date accessed: 20.02.2019).

8. *Kolmogorov A. N. Nauchnye osnovy shkol'nogo kursa matematiki. Pervaya lekciya* [Scientific foundations of the school course of mathematics. First lecture] // *Matematika v shkole* – Maths at school. 1969. No. 3. Pp. 12–18.

9. *Krasovskij N. N. Matematicheskoe modelirovanie v shkole* [Mathematical modeling in school] // *Izv. UrGU* – News of USU. 1995. No. 4. Pp. 12–24.

10. *Mayer-Schoenberger V., Kukier K. Bol'shie dannye. Revolyuciya, kotoraya izmenit to, kak my zhivem, rabotaem i myslim* [Big data. Revolution that will change the way we live, work, and think]. M. Mann, Ivanov and Ferber. 2014. 310 p.

11. *Matematicheskaya enciklopediya : v 5 t. T. 1* – Mathematical encyclopedia : in 5 vols. Vol. 1. M. Soviet encyclopedia. 1979. 1152 col.

12. *Minprosveshcheniya RF k 2021 godu vklyuchit izuchenie iskusstvennogo intellekta v shkol'nuyu programmu* – The Ministry of Education of the Russian Federation will include the study of artificial intelligence in the school curriculum by 2021. RIA News of the Russian Federation from 22.02.2020. Available at: https://ria.ru/20200221/1565037723.html (date accessed: 21.10.2020).

13. *Nacional'nyj proekt "Iskusstvennyj intellect"* – National project "Artificial Intelligence". Available at: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/72738946.

14. *Nikitin P. V., Gorohova R. I. Metodicheskie osobennosti obucheniya budushchih uchitelej informatiki osnovam iskusstvennogo intellekta: ot praktiki k teorii* [Methodological features of teaching future teachers of informatics to the basics of artificial intelligence: from practice to theory] // *Problemy sovremennogo obrazovaniya* – Problems of modern education. No. 2. 2016. Pp. 121–126. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25919225 (date accessed: 7.09.2020).

15. *Pavlov S. N. Sistemy iskusstvennogo intellekta : ucheb. posobie : v 2 ch. Ch. 1* [Artificial intelligence systems : textbook : in 2 parts. Part 1]. Tomsk. El Content. 2011. 176 p.

16. *Perminov E. A. Diskretnaya matematika: uchebnoe posobie dlya 8–9 klassov srednej obshcheobrazovatel'noj shkoly* [Discrete mathematics : textbook for 8–9 classes of secondary general education schools]. Yekaterinburg. Institute of Development of Education. 2004. 206 p.

17. *Perminov E. A. Metodicheskaya sistema obucheniya diskretnoj matematike studentov pedagogicheskih napravlenij v aspekte integracii obra¬zovaniya : monografiya* [Methodological system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical directions in the aspect of integration of education : monograph]. Yekaterinburg. Russian State Prof.-Pedagogical University. 2013. 286 p.

18. *Testov V. A. Matematicheskaya odarennost' i ee razvitie* [Mathematical giftedness and its development] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya : mezhdunarodnyj elektronnyj nauchno-prakticheskij zhurnal* – Prospects of science and education: international electronic scientific and practical journal. 2014. No. 6. Pp. 60–67. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-odarennost-i-ee-razvitie (date accessed: 18.08.20).

19. *Fried E. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru* [Elementary introduction to abstract algebra]. M. Mir (World). 1979. 260 p.

УДК 372.851 DOI 10.25730/VSU.0536.21.005

Роль математики в формировании нелинейного мышления у школьников и студентов

В. А. Тестов
доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и информатики,
Вологодский государственный университет. Россия, г. Вологда.
ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация. В статье рассматривается трансдисциплинарная тенденция в содержании современного образования, выводящая синтез знаний на более высокий уровень, чем междисциплинарный. Благодаря этой тенденции появляются такие новые трансдисциплинарные области, как искусственный интеллект, большие данные и другие.

Показывается, что в основе этой тенденции лежит процесс математизации знаний. Кроме того, в силу креативности методов, используемых при изучении математики, эта дисциплина становится основой формирования креативного потенциала личности. В статье рассматривается формирование у школьников и студентов нелинейного мышления через изучение в математических курсах нелинейных порядковых структур (решеток, булевых алгебр и т. д.).

Приводятся также элементы специального курса, разработанного автором, по теории упорядоченных группоидов, в том числе ряд фактов, связанных с обобщением основной теоремы арифметики для риссово упорядоченных группоидов и невозможностью распространить эту теорему на направленные группоиды.

Ключевые слова: трансдисциплинарность образования, математизация наук, цифровая трансформация, порядковые структуры.

В настоящее время в науке и образовании преобладающей тенденцией становится более глубокий, чем междисциплинарный, синтез знания, выходящий на новый, более высокий уровень познания, который Жан Пиаже предложил назвать *трансдисциплинарным*. Трансдисциплинарность предполагает возникновение научных систем, находящихся над конкретными дисциплинами сверху, над дисциплинарным делением научного знания. В основе происходящих изменений лежит процесс математизации наук, который привел к возникновению таких наддисциплинарных научных систем, как кибернетика, теория информации, теория катастроф, синергетика и др. В современную цифровую эру появляются такие трансдисциплинарные области: искусственный интеллект, Big Data и др., которые отличает игнорирование междисциплинарных границ. Появились и новые трансдисциплинарные категории, к которым можно отнести понятия модели, операции, отношения, изоморфизма, алгоритма и ряд других, возникшие первоначально в математике, а затем распространившиеся и на другие науки [11].

Современная математика играет ведущую роль в цифровой революции. Сравнение роли математики и компьютера привел В. А. Садовничий: «Если за 20 лет (с 1992 по 2012) скорость компьютеров увеличилась примерно в 8 тысяч раз, то за счет развития математических методов скорость расчетов увеличилась более чем в 400 тысяч раз… Но самое лучшее, конечно, – это соединение прогресса математики и компьютеров» [6, с. 9].

В результате развития кибернетики, математического моделирования, компьютеров, а позднее и системы Интернета возник новый стиль научного мышления. Этот стиль стал основой системного осмысления методологии моделирования как новой исследовательской культуры с использованием уникальных возможностей математики и компьютеров [5].

Однако следует заметить, что продолжающиеся попытки сформировать у студентов большое количество различных компетенций вызывают неоправданное «размельчение» сетки учебных предметов в вузе и способствуют закреплению дисциплинарных различий, что приводит к фрагментарному видению реальности у студентов, к затруднению решения главной задачи вузов – фундаментальной подготовки выпускников, осознавших необходимость учиться «всю жизнь» и имеющих возможность менять профиль своей профессиональной деятельности.

Поэтому можно только приветствовать распространение трансдисциплинарного тренда и в образование. Трансдисциплинарность образования помогает человеку ориентироваться в современном мире, приобретать умение интегрировать знания из различных дисциплин, а главное – умение нестандартно и логически мыслить, что является основой креативного потенциала личности.

Важнейшее место в такой системе образования должно принадлежать математике. Роль математики в образовании и науке была велика во все времена. В цифровую эру она стала многоплановой, все в большей степени происходит использование математических идей и методов в различных научных областях. Как отмечалось на состоявшемся в Москве Международном научном семинаре преподавателей математики и информатики (1–2 октября 2020 года), «в силу креативности методов, используемых при познании человеком математики и формировании способностей к ее применению, эта область научного знания является приоритетной в решении задачи формирования ключевых компетенций цифровой экономики» [4, с. 110].

Процесс цифровой трансформации науки и образования, осуществляемый на основе математики, способствует трансформации и человеческого мышления, его компетенций, наиболее важных в цифровую эпоху. Математика во все времена служила признанным средством развития различных видов мышления. Многие ученые уже давно писали о развитии логического мышления с помощью математики. Позднее были введены понятия о таких видах мышления, как алгоритмическое, комбинаторное, функциональное, образно-геометрическое (визуальное) и рассмотрены способы их развития при обучении математике [7]. Указанные виды мышления играют большую роль как в обучении математике, так и в математическом творчестве.

Психологи выделяют свои типы мышления. Во всех креативных типах мышления одним из главных компонентов является нелинейность мышления, которая, как установлено психологами, легче всего развивается у детей, поскольку в их мышлении еще не укоренились упрощенные шаблоны мышления, особенно линейного, к которым они привыкают в процессе обучения.

Обычно прогнозы на будущее, как правило, строятся на основе линейной экстраполяции происходящего сейчас или в недавнем прошлом. Но большинство реальных явлений и процессов не могут быть описаны линейными моделями. Поэтому прогнозы-экстраполяции для нелинейных процессов на основе происходящего сейчас или в прошлом являются ненадежными и недостаточными. Линейное мышление, до сих пор преобладающее в умах многих людей и в некоторых областях науки, становится в современных условиях недостаточным и в принципе – даже опасным. Таким образом, необходимо формировать у школьников и студентов нелинейное мышление, которое предполагает поиск нешаблонных путей к достижению целей.

Одним из эффективных способов формирования нелинейного мышления является изучение в математических курсах нелинейных структур, в частности порядковых. В школьной математике учащиеся встречаются в основном лишь с линейным порядком. Однако уже в начальной школе можно начинать пропедевтику различения понятий линейного и нелинейного порядков. С нелинейными порядками школьники встречаются в некоторых логических задачах, а также при изучении отношения делимости. Используя это отношение, удается проиллюстрировать такие важные понятия, как решетки, булевы алгебры и т. д., которые лежат в основе теории нелинейных порядковых структур. Важно, чтобы при изучении отношения делимости учащиеся заметили сходство и отличие этого отношения от линейного порядка.

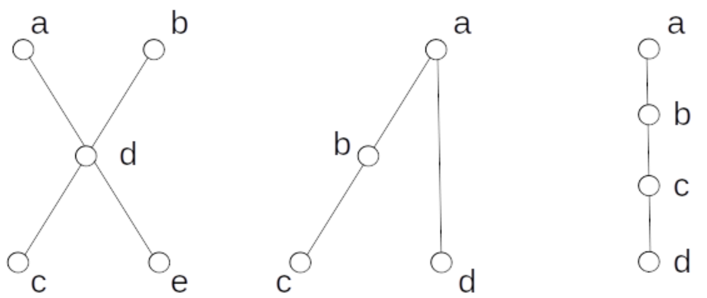


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

На первом курсе вуза необходимо на лекциях и практических занятиях снова рассматривать примеры множеств с нелинейным порядком для того, чтобы у обучающихся не сложились стереотипы о порядковых структурах как чисто линейных. Весьма полезно конечные упорядоченные множества изображать графами (диаграммами Хассе): точками изображают элементы множества, а если $x < y$, то элемент x изображают ниже элемента y и соединяют их отрезком прямой. Из упорядоченных множеств, изображенных на рисунках 1–3, только третье (рис. 3) является линейно упорядоченным.

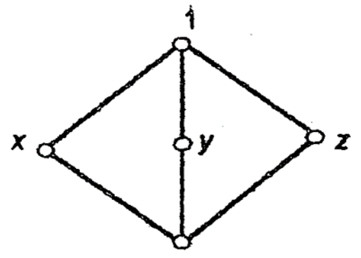
Можно предложить обучающимся решить следующую задачу: дано множество A = {2,3,5,6,10,15}, на котором отношение *p* задано условием: $xpy \Leftrightarrow x|y$. Построить граф этого отношения.

Такое предварительное знакомство с нелинейными структурами позволяет избежать определенных трудностей при изучении таких структур на старших курсах. В частности, многие студенты не могут понять различие между понятиями максимального и наибольшего, а также минимального и наименьшего элементов.

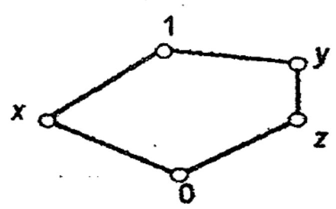
В усвоении этих и других понятий может оказать помощь представление упорядоченных множеств в виде диаграмм Хассе. Так, на рис. 1 легко увидеть, что изображенное на нем упорядоченное множество не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, но в нем имеются два максимальных и два минимальных элемента, а упорядоченное множество, изображенное на рис. 2, имеет один наибольший элемент и два минимальных элемента.

При решении задач со студентами следует уточнить соотношения между этими понятиями. Важно показать, что в любом упорядоченном множестве наибольший элемент является максимальным, а обратное утверждение справедливо только для некоторых классов упорядоченных множеств, в частности для линейно упорядоченных.

Среди встречающихся в математике типов нелинейных упорядоченных структур наиболее распространенными являются решетки. Этот тип нелинейных структур в большинстве вузов в базовом курсе алгебры не изучается, однако он имеет самое прямое отношение к школьной математике, поэтому желательно его включение в программу курса алгебры для будущих учителей математики. В Вологодском университете уже более 20 лет по разработанной нами программе изучение решеток и булевых алгебр предусматривается в пятом семестре. Положительный опыт преподавания нелинейных порядковых структур имеется в Вятском государственном университете [1; 2; 3]



Пример 4



Пример 5

В теории упорядоченных множеств точная верхняя грань двухэлементного множества $\{a, b\}$ обозначается через $a \vee b$, а точная нижняя грань этого множества обозначается через $a \wedge b$. Если для любых двух элементов упорядоченного множества L существуют $a \vee b$ и $a \wedge b$, то упорядоченное множество L называется решеткой.

Решетка, как известно, называется дистрибутивной, если она удовлетворяет тождествам дистрибутивности:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Студентам в качестве упражнений можно предложить проверить, что решетки, приведенные на рисунках 1–3, дистрибутивны, а решетки L_1 и L_2 в следующих примерах 4 и 5 – недистрибутивные.

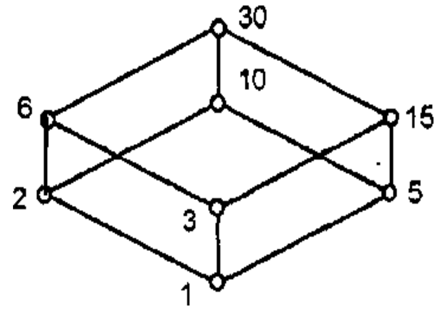
Действительно, в решетке $L_1 : x \vee (y \wedge z) = x, (x \vee y) \wedge (x \vee z) = 1$.

В решетке $L_2 : z \vee (x \wedge y) = z; \ (z \vee x) \wedge (z \vee y) = y$.

Примеры 4 и 5 хорошо иллюстрируют понятия нуля и единицы решетки. Наименьший элемент решетки называется нулем решетки и обозначается символом «0», а наибольший элемент решетки называется единицей решетки и обозначается символом «1».

Частный случай решеток представляют собой булевые алгебры. Дистрибутивная решетка B является булевой алгеброй, если в ней имеются нуль и единица, неравные друг другу, и для любого элемента $a \in B$ найдется элемент $\bar{a}$, называемый дополнением элемента a, такой, что $\bar{a} \vee a = 1, \ \bar{a} \wedge a = 0$.

Различные модели булевых алгебр (алгебра множеств, алгебра высказываний, алгебра НОД и НОК) желательно разобрать еще на младших курсах. В качестве примера булевой алгебры можно взять множество всех делителей числа 30 с отношением «|». В этом множестве число 30 является наибольшим элементом, число 1 является наименьшим элементом, а дополнением числа a является число $\bar{a} = 30/a$. Эта булева алгебра состоит из 8 элементов и может быть изображена в виде следующего графа:



Нетрудно проверить, что во всякой булевой алгебре справедливы тождества: $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$.

Полезно познакомить студентов и с такими обобщениями решеток, как направленное и риссово упорядоченные множества. Если в упорядоченном множестве X для любых элементов a, b существуют верхняя и нижняя грани, то множество X называется *направленным*. Направленное множество называется *риссовым,* если оно обладает следующим интерполяционным свойством: $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ таких, что $a_i < b_j$ (i = 1, 2; j = 1, 2), существует элемент $c \in X$ такой, что $a_i < c < b_j$ (i = 1, 2; j =1, 2).

В качестве примера можно рассмотреть множество X, являющееся декартовым квадратом множества действительных чисел $\boldsymbol{R}^2$. Отношение порядка на этом множестве определим следующим образом:

$$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (a < c)\&(b < d) \vee (a = c)\&(b = d).$$

Нетрудно проверить, что этот порядок является риссовым.

Можно доказать, что в положительном конусе P риссового группоида начальные отрезки мультипликативны, т. е. $[e, a]\cdot[e, b]=[e, a\cdot b]$, где e – нейтральный элемент группоида. Такие упорядоченные множества целесообразно рассматривать в рамках спецкурса. Там же можно рассмотреть элементы теории как решеточно, так и риссово упорядоченных группоидов и различные обобщения основной теоремы арифметики для риссовых упорядоченных группоидов [9–11; 12].

Расширение этой теоремы до направленных группоидов уже неверно, что показывает следующий пример.

Рассмотрим группоид G(+) = { (m, n)| $m, n \epsilon$Z, $mB + n\epsilon$2Z}, где сложение определено покомпонентно: $(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$, а порядок определен так: $(a,b)<(c,d) <=> a<c$ & $b<d$. Нетрудно проверить, что данный порядок не является риссовым. В этом группоиде элемент (2,2) имеет два различных разложения в сумму простых элементов (атомов):

$$(2,2) = (2,0) + (0,2) = (1,1) + (1,1).$$

Упражнение. Доказать, что в группоиде К(·) = $\{x \in \mathbf{N} | \, x = 4n + 1, n = 0,1,...\}$ с обычным умножением и с отношением делимости «|» не выполняется однозначность разложения на простые элементы.

Таким образом, современная математика играет трансдисциплинарную роль в получении школьниками и студентами фундаментальных междисциплинарных знаний и представлений. Но, кроме того, математика является также основой формирования креативного потенциала личности, наиболее плодотворного способа мышления, нелинейного мышления, который является важнейшей составляющей компетенций специалиста в цифровую эпоху. Необходимо при разработке стандартов и образовательных программ учитывать роль математики в образовании и вернуть этой фундаментальной дисциплине подобающее ей место в образовательных программах.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник ВятГГУ. 2010. 2 (1). С. 111–120.

2. *Вечтомов Е. М.* Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 15–34.

3. *Вечтомов Е. М., Абрамова И. В., Шилова З. В.* Методика преподавания порядковых структур в обучении студентов вуза // Перспективы науки и образования. 2019. № 5 (41). С. 170–188. DOI: 10.32744/pse.2019.5.13.

4. Математика – основа компетенций цифровой эры : Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Москва. Россия. 1–2 октября 2020 года. МГПУ, 2020. 396 с.

5. *Перминов Е. А., Тестов В. А.* Методология моделирования как основа реализации междисциплинарного подхода в подготовке студентов педагогических направлений // Образование и наука. 2020. Т. 22. № 6. С. 9–30.

6. *Садовничий В. А.* Большие данные в современном мире. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017. 28 с.

7. *Тестов В. А.* Математическая одаренность и ее развитие // Перспективы науки и образования: международный электронный научно-практический журнал. 2014. № 6. С. 60–67. URL: http://pnojournal.wordpress.com.

8. *Тестов В. А.* О решеточно упорядоченных группоидах с условием минимальности : Научно-метод. конф. препод. матем. кафедр, тезисы докл. Киров : КГПИ, 1990. С. 20.

9. *Тестов В. А.* Об аналоге основной теоремы арифметики в упорядоченных группоидах. // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 6. С. 910–915.

10. *Тестов В. А.* Порядковые структуры в алгебре и теории чисел. Москва : МПГУ, 1997. 109 с.

11. *Тестов В. А., Перминов Е. А.* Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. 2021. Т. 23. № 3. С. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.

12. *Тестов В. А.* On a Riesz ordered groupoid. Webs & quasigroups : Сб. науч. трудов. Tver, 1994. Pp. 76–81.

The role of mathematics in the formation of nonlinear thinking of schoolchildren and students

V. A. Testov

Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Vologda State University. Russia, Vologda. ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Abstract. The article examines the transdisciplinary trend in the content of modern education, which brings the synthesis of knowledge to a higher level than the interdisciplinary one. Thanks to this trend, new transdisciplinary fields such as artificial intelligence, big data, and others are emerging.

It is shown that this trend is based on the process of mathematization of knowledge. In addition, due to the creativity of the methods used in the study of mathematics, this discipline becomes the basis for the formation of the creative potential of the individual. The article deals with the formation of nonlinear thinking in schoolchildren and students through the study of nonlinear ordinal structures (lattices, Boolean algebras, etc.) in mathematical courses.

Elements of a special course developed by the author on the theory of ordered groupoids are also presented, including a number of facts related to the generalization of the main theorem of arithmetic for Riesz-ordered groupoids and the impossibility of extending this theorem to directed groupoids.

Keywords: transdisciplinarity of education, mathematization of sciences, digital transformation, ordinal structures.

References

1. *Vechtomov E. M. Izuchenie poryadkovoj struktury* [The study of the ordinal structure] // *Vestnik VyatGGU* – Herald of VyatSHU. 2010. 2 (1). Pp. 111–120.

2. *Vechtomov E. M. Natural'nyj ryad* [Natural series] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2012. No. 10. Pp. 15–34.

3. *Vechtomov E. M., Abramova I. V., Shilova Z. V. Metodika prepodavaniya poryadkovyh struktur v obuchenii studentov vuza* [Methods of teaching ordinal structures in teaching university students] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya* – Prospects of science and education. 2019. No. 5 (41). Pp. 170–188. DOI: 10.32744/pse. 2019.5.13.

4. *Matematika – osnova kompetencij cifrovoj ery : Materialy XXXIX Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* – Mathematics is the basis of Digital Age competencies : Proceedings of the XXXIX International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Informatics of Universities and Pedagogical Universities. Moscow. Russia. October 1–2, 2020. MSPU. 2020. 396 p.

5. *Perminov E. A., Testov V. A. Metodologiya modelirovaniya kak osnova realizacii mezhdisciplinarnogo podhoda v podgotovke studentov pedagogicheskih napravlenij* [Methodology of modeling as a basis for the implementation of an interdisciplinary approach in the preparation of students of pedagogical directions]. 2020. Vol. 22. No. 6. Pp. 9–30.

6. *Sadovnichij V. A. Bol'shie dannye v sovremennom mire* [Big data in the modern world]. M. Lomonosov Moscow State University. 2017. 28 p.

7. *Testov V. A. Matematicheskaya odarennost' i ee razvitie* [Mathematical giftedness and its development] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya : mezhdunarodnyj elektronnyj nauchno-prakticheskij zhurnal* – Prospects of science and education : international electronic scientific and practical journal. 2014. No. 6. Pp. 60–67. Available at: http://pnojournal.wordpress.com.

8. *Testov V. A. O reshetochno uporyadochennyh gruppoidah s usloviem minimal'nosti : Nauchno-metod. konf. prepod. matem. kafedr, tezisy dokl.* [On lattice-ordered groupoids with the minimality condition : Scientific method. conference of teachers of math. departments, theses of reports]. Kirov. KSPI. 1990. P. 20.

9. *Testov V. A. Ob analoge osnovnoj teoremy arifmetiki v uporyadochennyh gruppoidah* [On the analogue of the main theorem of arithmetic in ordered groupoids] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1997. Vol. 62. Is. 6. Pp. 910–915.

10. *Testov V. A. Poryadkovye struktury v algebre i teorii chisel* [Ordinal structures in algebra and number theory]. M. MPSU. 1997. 109 p.

11. *Testov V. A., Perminov E. A. Rol' matematiki v transdisciplinarnosti soderzhaniya sovremennogo obrazovaniya* [The role of mathematics in the transdisciplinarity of the content of modern education] // *Obrazovanie i nauka* – Education of science. 2021. Vol. 23. No. 3. Pp. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.

12. *Testov V. A.* On a Riesz ordered groupoid. Webs & quasigroups: Collection of scientific Works. Tver. 1994. Pp. 76–81.

УДК 372.851 DOI 10.25730/VSU.0536.21.006

Совершенствование геометрической подготовки будущих учителей математики при изучении элементарной геометрии

Л. В. Тимшина
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. Важное место в подготовке будущих учителей математики отводится умению решать задачи элементарной геометрии, поскольку именно этот раздел геометрии напрямую связан с их профессиональной деятельностью. Практика работы показывает, что большинство студентов испытывает затруднения при решении стереометрических задач. Определенным решением данной проблемы является использование в обучении опорных задач. Результат, полученный при решении такой задачи, в дальнейшем применяется для работы с другими задачами. В статье описаны некоторые математические зависимости и приемы выполнения чертежа, которые могут составлять содержание опорных задач, иллюстрируется их применение. Предложенные подходы работы с задачей совершенствуют методику обучения студентов методам решения стереометрических задач и могут быть использованы при проведении занятий по элементарной геометрии.

Ключевые слова: элементарная геометрия, стереометрическая задача, геометрический чертеж.

Ведущая роль в содержании курса элементарной математики, в том числе и курса элементарной геометрии, отводится задачам. Использование задач в учебном процессе может служить многим конкретным целям обучения, выполнять разнообразные дидактические функции.

Существует достаточное количество учебной литературы по элементарной геометрии, например, [2; 3; 5], которая включает разнообразный набор стереометрических задач, содержит образцы решения. Однако проведение входного контроля при изучении с будущими учителями математики разделов элементарной геометрии и предъявление для решения задач из раздела «Задачи повышенной трудности» учебного пособия [1] выявляет слабый уровень умения решать стереометрические задачи.

Опыт работы со студентами-педагогами показывает необходимость рассмотрения опорных задач, которые позволяют в дальнейшем осуществлять более целенаправленный поиск решения стереометрической задачи или дают возможность найти более рациональный способ ее решения. К опорным, например, можно отнести следующие геометрические факты и конструкции: формулу площади ортогональной проекции фигуры; пирамиды с особыми свойствами; формулу для нахождения радиуса вписанной сферы; метод построения центра описанной сферы многогранника; особенность выполнения чертежа при взаимном расположении сфер.

Рассмотрим отмеченные факты более подробно.

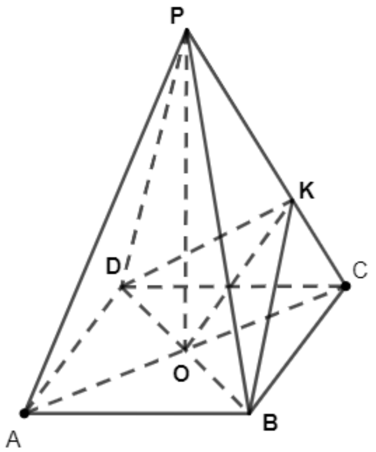


Рис.1

Площадь ортогональной проекции F' фигуры F, лежащей в плоскости, равна произведению площади этой фигуры и косинуса угла между ее плоскостью и плоскостью проекции: $S_{F'} = S_F \cos\alpha$. Доказательство данного утверждения можно найти, например, в [3].

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120º. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S.

Решение. Так как прямая BO перпендикулярна плоскости PAC, треугольник POC является ортогональной проекцией боковой грани PBC пирамиды на плоскость диагонального сечения (рис. 1). Для использования формулы площади проекции нужно определить угол между плоскостями этих треугольников. Пусть угол BKD линейный при ребре PC. По условию он равен $120°$. Треугольник BKD равнобедренный. Значит, его медиана OK является биссектрисой угла DKB, тогда угол $OKB = 60^\circ$. Он является линейным углом, так как прямая PC перпендикулярна прямым KB и OK. Таким образом, $S_{POC} = S_{PBC} \cos 60^\circ$. По условию

$S_{POC}=\dfrac{S}{2}$, значит, по формуле площади проекции $\dfrac{S}{2}=S_{PBC}\cdot\dfrac{1}{2}$. Откуда $S_{PBC}=S$ и, значит, $S_{бок}=4S$.

Задача 2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания BA и BC равны a и b соответственно, а угол между ними равен α. Через биссектрису данного угла и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с основанием острый угол β. Найти площадь сечения.

Решение. Пусть BK – биссектриса основания *ABC* (рис. 2). Сечением призмы является треугольник BA_1K. Треугольник BAK – ортогональная проекция сечения на плоскость основания BAC. Угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции равен β. Для использования формулы площади проекции нужно определить площадь треугольника BAK. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению прилежащих сторон. Получаем, что $S_{BAK}=\dfrac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)}$. Далее по формуле площади проекции $S_{BA_1K}=\dfrac{S_{BAK}}{\cos\beta}$. Значит, $S_{BA_1K}=\dfrac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$.

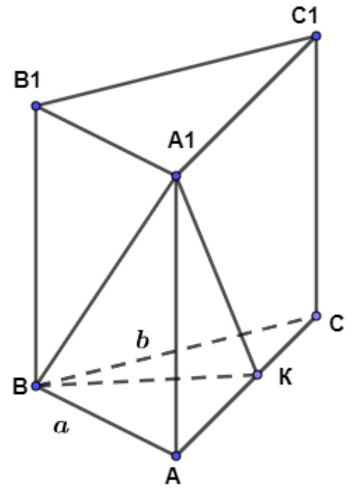


Рис. 2

Укажем два класса пирамид, основаниями высот которых являются особые точки.

Если в пирамиде равны двугранные углы (рассматриваем внутренние углы пирамиды) при основании или равны апофемы боковых граней, то высота пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания. Если рассматривать углы наклона боковых граней к плоскости основания, то ортогональной проекцией вершины будет точка, равноудаленная от всех сторон основания. Для треугольной пирамиды, например, основание высоты может совпасть с центром одной из вневписанных окружностей основания.

Задача 3. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция с боковой стороной *a* и острым углом *α*. Все боковые грани образуют с основанием равные углы *β*. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Пусть *PO* высота, тогда по свойству пирамиды *O* – центр вписанной окружности основания (рис. 3). Так как существует вписанная окружность, то $AB+CD=AD+BC$. Из прямоугольного треугольника ABB_1: $BB_1=a\sin\alpha.$ Выразим площадь основания $S_{осн}=\dfrac{AD+BC}{2}BB_1=\dfrac{AB+CD}{2}BB_1=\dfrac{2a}{2}a\sin\alpha=a^2\sin\alpha.$

Для нахождения площади боковых граней необходимо предварительно вычислить радиус вписанной окружности основания, далее найти апофемы боковых граней, которые для данной пирамиды равны, затем вычислить площадь боковой поверхности. Также для нахождения площади боковой поверхности можно применить формулу площади проекции фигуры, использованную в решении задач 1 и 2. Проекцией боковых граней является основание. Тогда $S_{бок}=\dfrac{S_{осн}}{\cos\beta}=\dfrac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}$. $S_{полн.пов}=a^2\sin\alpha(\dfrac{1}{\cos\beta}+1).$

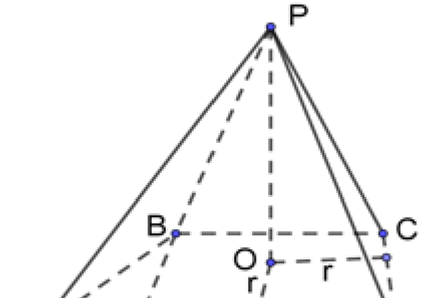


Рис. 3

Следующий класс образуют пирамиды, высота которых проектируется в центр описанной окружности основания. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия: боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, равны боковые ребра, боковые ребра составляют с высотой пирамиды равные углы. Указанные свойства пирамиды равносильны.

Задача 4. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой каждая из боковых сторон и меньшая из параллельных сторон равны *a*, острые углы равны *α*. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол *β*. Найти высоту пирамиды.

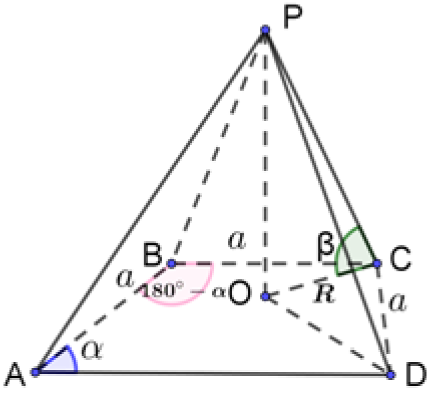


Рис. 4

Решение. Пусть *PO* высота пирамиды, тогда по свойству пирамиды *O* – центр описанной окружности основания (рис. 4). Из прямоугольного треугольника *POC* выразим *PO*: $PO = Rtg\beta$, где *R* – радиус описанной окружности основания. Он равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC. По теореме синусов для этого треугольника $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R, где \frac{\alpha}{2}$ – величина угла *BAC*. Тогда $R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Подставим полученное значение *R* в формулу для нахождения *PO*. Получим $PO = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} tg\beta$.

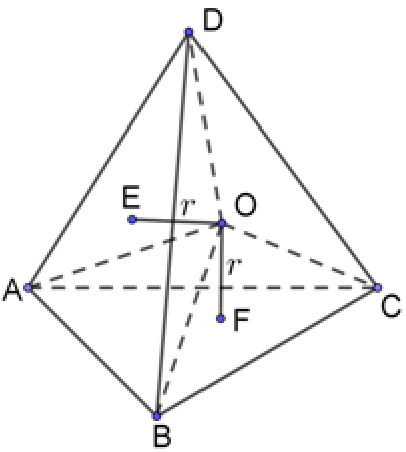


Рис. 5

Следующая серия задач связана со вписанной и описанной сферами многогранника и взаимным расположением сфер.

Задача 5. Доказать, что если в многогранник можно вписать сферу, то его объем равен одной трети произведения площади полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

Выполним иллюстрацию доказательства на изображении треугольной пирамиды (рис. 5). Соединим центр *O* сферы с вершинами многогранника. Тогда весь многогранник разбивается на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а вершинами – центр сферы. Например, пирамиды *ABCO* и *ABDO,* примыкающие к граням *ABC* и *ABD*. Перпендикуляры, опущенные на грани многогранника из центра *O*, например, *OF* и *OE* будут радиусами сферы и одновременно высотами пирамид. Объем многогранника можно представить в виде суммы объемов образовавшихся пирамид, откуда и получаем результат.

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{1}{3} rS_1 + \frac{1}{3} rS_2 + \ldots + \frac{1}{3} rS_n = \frac{1}{3} r(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} rS_{полн.пов.},$$

Записав равенство в другом виде $r = \frac{3V}{S_{полн.пов.}}$, получаем формулу, позволяющую находить радиус вписанной сферы без дополнительных построений к задаче.

Задача 6. Основанием пирамиды *PABC* служит треугольник *ABC* такой, что *AB* = *AC* = 10 *см* и *BC* = 12 *см*. Грань *PBC* перпендикулярна к основанию и *PB*=*PC*. Вычислить радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 1,4 *см*.

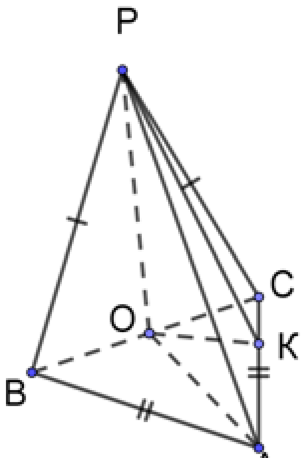


Рис. 6

Решение. Воспользуемся формулой $r = \frac{3V}{S_{полн.пов.}}$. Выражая объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{OCH} H$, приведем формулу для вычисления радиуса к виду: $r = \frac{S_{осн} H}{S_{полн.пов}}$, где *H*=1,4 *см* (рис. 6). Площадь основания найдем по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. $S_{осн.}$ = 48 $см^2$. Высота *PO* пирамиды совпадет с высотой треугольника *PBC*, опущенной из вершины *P* и по условию равна 1,4 *см*. Площадь треугольника *PBC* равна 8,4 $см^2$. Найдем площади треугольников *PAC* и *PAB*, которые равны по трем сторонам. Пусть *PK* – апофема грани *PAC*. Рассмотрим отрезок *OK*. По теореме о трех перпендикулярах *OK* – перпендикуляр к *AC*. Длину *OK* вычислим, выразив дважды площадь треугольника *OCA*. С одной стороны, площадь равна половине площади треугольника *ABC* и равна 24 *см*², с другой стороны, $S_{OCA}=\frac{1}{2}OK\cdot CA\Rightarrow OK=4{,}8$ *см*. Далее из прямоугольного треугольника *РОК: РК* = 5 *см*. $S_{PAC}=S_{PAB}=\frac{1}{2}5\cdot 10=25$ *см*². По формуле $r=\frac{S_{осн}H}{S_{полн.пов}}$ найдем радиус шара.

$$r=\frac{48\cdot 1{,}4}{48+25+25+8{,}4}=\frac{12}{19}см.$$

При рассмотрении описанной сферы многогранника (пирамиды или призмы) ее центр может быть построен исходя из следующих рассуждений. Рассмотрим точку, которая является центром описанной сферы. Опустим из этой точки перпендикуляр на основание многогранника и соединим ее со всеми вершинами основания. Отрезки, соединяющие центр с вершинами, являются наклонными к плоскости основания, и по условию они равны, так как являются радиусами сферы. Тогда будут равны и проекции отрезков на плоскость основания. Получили, что основание перпендикуляра равноудалено от всех вершин основания и, значит, является центром описанной около основания окружности. Таким образом, первое свойство центра описанной сферы состоит в том, что он находится на прямой, перпендикулярной к плоскости основания и проходящей через центр описанной окружности основания. Кроме того, центр равноудален от вершин, принадлежащих боковому ребру, следовательно, лежит в плоскости, перпендикулярной к этому ребру и проходящей через его середину. Из сказанного получаем центр описанной сферы как точку пересечения указанных прямой и плоскости. Построение центра по рассмотренному алгоритму позволяет соотнести его расположение с элементами многогранника и, соответственно, облегчает решение задачи.

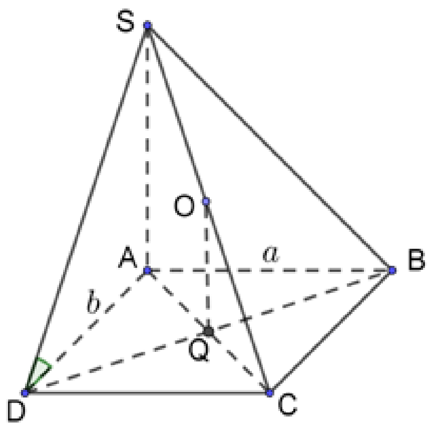


Рис. 7

Задача 7. Основанием четырехугольной пирамиды *SABCD* служит прямоугольник *ABCD*. *AB = a*, *AD = b*. Грани *SAD* и *SAB* перпендикулярны плоскости основания, а грань *SDC* составляет с ней угол 45º. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Решение. Из условия перпендикулярности двух граней к плоскости основания заключаем, что их общее ребро *SA* также перпендикулярно плоскости основания (рис. 7). Угол *SDA* является линейным углом двугранного угла при ребре *DC* (*AD* – перпендикуляр к *DC* и является проекцией *SD* на плоскость основания, значит, *SD* – перпендикуляр к *DC* по теореме о трех перпендикулярах), следовательно, равен 45°. Треугольник *DAS* прямоугольный равнобедренный. *DA = AS = b*. Построим центр описанной сферы. Через точку *Q* – центр описанной окружности основания – проведем перпендикуляр *QO* к плоскости основания. Эта прямая будет параллельна *AS* и, значит, будет лежать в плоскости *SAC*. Из описанных свойств заключаем, что *QO* является средней линией треугольника *ASC*. Точка *O* пересечения прямой *SC* и *QO* – середина *SC*. Заметим, что полученная точка *O* является искомой, поскольку равноудалена от вершин *S* и *C* ребра *SC*. Радиус описанной сферы равен половине ребра *SC*. Длину *SC* выразим из прямоугольного треугольника *SAC*, в котором

$$SA=b, AC=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow R=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}.$$

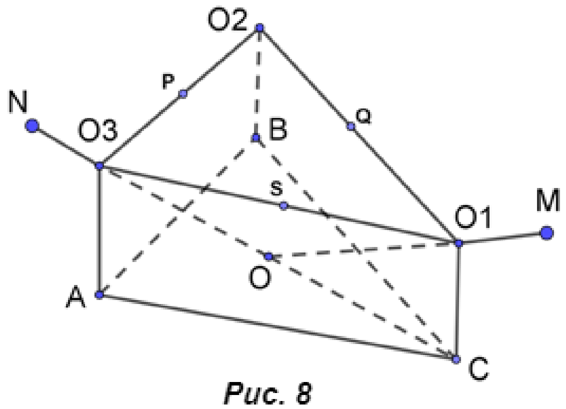


Рис. 8

Задача 8. В пространство, заключенное между сферической поверхностью и плоскостью, проходящей через ее центр, вложено три одинаковых шара радиусом r так, что каждый шар касается двух других, сферической поверхности и указанной плоскости. Найти радиус сферической поверхности.

Решение. При выполнении чертежа в задачах на взаимное расположение сфер достаточно, как правило, изобразить центры данных сфер и всевозможные точки касания. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры данных шаров, *A, B, C* – точки касания с плоскостью, указанной в задаче, *P, Q, S* – попарные точки касания шаров (рис. 8). Для искомой сферической поверхности: O – центр, лежащий в плоскости ABC, M и N – точки касания с шарами с центрами в точках O_1 и O_3. В этом случае отрезки OM и ON являются искомыми радиусами. Для решения задачи необходимо найти длину отрезка OO_1. Так как O_1 принадлежит отрезку OM, то радиус OM равен сумме длин отрезков OO_1 и O_1M, где $O_1M = r$.

Многогранник $CBAO_1O_2O_3$ является правильной треугольной призмой со стороной основания ABC, равной $2r$, точка O – центроид основания ABC. Длина бокового ребра CO_1 призмы равна r. Треугольник CO_1O прямоугольный. Катет OC составляет $\frac{2}{3}$ медианы треугольника ABC и равен $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, второй катет CO_1 равен r. Тогда гипотенуза $OO_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}r$ и радиус $OM = \frac{\sqrt{21}+3}{3}r$.

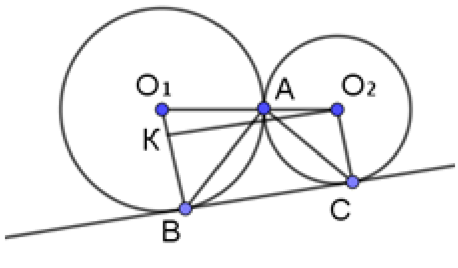


Рис. 9

Отметим, что в решении предложенных задач активно работают некоторые идеи элементарной планиметрии. В частности, в задачах на взаимное расположение сфер при внешнем их касании рассмотрение плоских сечений позволяет свести решение задачи к стандартной планиметрической конфигурации, состоящей из двух касающихся окружностей и общей касательной (рис. 9). Особенности данной конфигурации рассматривались нами в [4].

Организация решения опорных задач и акцентирование внимания студентов на используемых математических зависимостях и приемах выполнения чертежа, способствует осознанию информации, формирует умения и навыки решения стереометрических задач, создает основу для творческого применения знаний в новой ситуации.

Список литературы

1. Геометрия, 10–11 классы : учеб. для образоват. учреждений: базовый и проф. уровни / Л. С. Атанасян [и др.]. 19-е изд. М. : Просвещение, 2010. 255 с.

2. *Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по элементарной математике: Геометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 1992. 352 с.

3. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия : в 2 т. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. М. : НЦНМО, 2006. 256 с.

4. *Тимшина Л. В.* Организация самостоятельной работы студентов педагогов при изучении учебной дисциплины «Элементарная геометрия» // Advanced Science. Киров : Изд-во Вятского государственного университета. 2018. № 3. С. 28–32.

5. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике: Решение задач : учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. М. : Просвещение, 1991. 384 с.

Improving the geometric training of future teachers of mathematics in the study of elementary geometry

L. V. Timshina

senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. An important place in the training of future teachers of mathematics is given to the ability to solve problems of elementary geometry, since this section of geometry is directly related to their professional activities. Practical work shows that most students have difficulties in solving stereometric problems. A certain solution to this problem is the use of reference tasks in training. The result obtained when solving such a task is then used to work with other tasks. The article describes some mathematical dependencies and drawing techniques that can form the content of reference tasks, and illustrates their application. The proposed approaches to working with the problem improve the methodology of teaching students methods for solving stereometric problems and can be used in conducting classes in elementary geometry.

Keywords: elementary geometry, stereometric problem, geometric drawing.

References

1. *Geometriya, 10–11 klassy : ucheb. dlya obrazovat. uchrezhdenij: bazovyj i prof. urovni* – Geometry, grades 10–11 : textbook for educational institutions: basic and prof. levels / L. S. Atanasyan [et al.]. 19th ed. M. Prosveshchenie (Enlightment). 2010. 255 p.

2. *Gusev V. A., Litvinenko V. N., Mordkovich A. G. Praktikum po elementarnoj matematike: Geometriya : ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. spec. ped. in-tov i uchitelej. 2-e izd., pererab. i dop.* [Practicum on elementary mathematics: Geometry : textbook for students of physics and mathematics. specialities of ped. Institutes and teachers. 2nd ed., reprint and add.] M. Prosveshchenie (Enlightment). 1992. 352 p.

3. *Ponarin YA. P. Elementarnaya geometriya : v 2 t. T. 2: Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva* [Elementary geometry : in 2 vols. Vol. 2: Stereometry, space transformations]. M. Moscow Center for Continuing Mathematical Education. 2006. 256 p.

4. *Timshina L. V. Organizaciya samostoyatel'noj raboty studentov pedagogov pri izuchenii uchebnoj discipliny "Elementarnaya geometriya"* [Organization of independent work of students of teachers in the study of the academic discipline "Elementary geometry"] // Advanced Science. Kirov. Vyatka State University. 2018. No. 3. Pp. 28–32.

5. *Sharygin I. F., Golubev V. I. Fakul'tativnyj kurs po matematike: Reshenie zadach : ucheb. posobie dlya 11 kl. sred. shk.* [Elective course in Mathematics: Solving problems : manual for 11 grade of secondary school]. M. Prosveshchenie (Enlightment). 1991. 384 p.

УДК 378(470.342)(091) DOI 10.25730/VSU.0536.21.007

Первая кафедра математики на Вятской земле

В. И. Варанкина[1], Е. М. Вечтомов[2]
[1]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: veravarankina@gmail.com
[2]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается деятельность первой кафедры математики региона в ее историческом развитии. Кафедра математики была создана в 1930 году в Вятском педагогическом институте имени В. И. Ленина; первым заведующим кафедрой стал профессор П. Д. Белоновский. За 90 лет своего существования кафедра математики претерпела целый ряд организационных преобразований. В настоящее время это кафедра фундаментальной математики Вятского государственного университета как финального правопреемника Вятского педагогического института. В середине XX века по линии кафедры функционировали аспирантуры по геометрии тетраэдра (руководитель профессор Н. А. Колмогоров), по методике обучения математике (руководитель профессор Ф. Ф. Нагибин), по номографии (руководитель доцент Н. Д. Ермилов). Под руководством Ф. Ф. Нагибина сформировалась научно-методическая школа «Теория и методика обучения решению математических задач», которая на рубеже XX–XXI столетий трансформировалась в «Кировскую научно-методическую школу по математическому образованию», возглавляемую доктором физико-математических наук, профессором Е. М. Вечтомовым и доктором педагогических наук, профессором С. И. Калининым. В 1994 году открыта аспирантура по алгебре. Развивается научная алгебраическая школа «Функциональная алгебра и теория полуколец». Кафедра фундаментальной математики является выпускающей кафедрой по двум направлениям бакалавриата, двум направлениям магистратуры и двум специальностям аспирантуры. Библиография к статье содержит 130 источников.

Ключевые слова: кафедра математики, математика, математическое образование, научная школа, Вятский государственный университет.

Предыстория (1914–1930 гг.). 1 июля 1914 г. в губернском городе Вятка был открыт учительский институт. Директором был назначен Александр Модестович фон-Вилькен (1874–1934), выпускник Казанского университета, преподававший в учебных заведениях города Казани и перед прибытием в Вятку работавший директором Бугурусланской учительской семинарии Казанского учебного округа.

24 декабря 1918 г. Вятский учительский институт становится Вятским педагогическим институтом (ВПИ) – первым высшим учебным заведением на Вятской земле.

14 декабря 1922 г. Вятскому педагогическому институту присвоено имя В. И. Ленина с личного согласия вождя.

С 1918 г. институт стал готовить учителей математики и физики – до 1922 г. в рамках физико-математического цикла, в 1922–1924 гг. на физико-математическом отделении и далее до 1934 г. на физико-техническом отделении. В 20-е годы XX века математические дисциплины преподавали известные профессора Иван Яковлевич Депман (1885–1970), Николай Андреевич Дернов (1891–1938) и Петр Дмитриевич Белоновский (1885–1947), рекомендованные Министерством просвещения для работы в ВПИ. В 20–30-е годы прошлого века провинциальные вузы целенаправленно укреплялись преподавателями из вузов центральных регионов СССР.

См. [11; 16; 25–27; 38; 50; 61; 62; 115].

Кафедра математики (1930–1938 гг.). 1 сентября 1930 г. в Вятском педагогическом институте имени В. И. Ленина начала работать **кафедра математики**. Со дня основания по 1935 г. кафедрой математики заведовал профессор П. Д. Белоновский [11].

В 1933 г. состоялся первый выпуск учителей математики, с трехгодичным сроком обучения: вуз окончило 17 человек, включая будущего профессора Федора Федоровича Нагибина (1909–1976) [1; 2; 11; 18; 25; 30; 63; 64; 80; 81; 84; 85; 91–93, 117].

В 1934 г. кафедра вошла в состав впервые образованного физико-математического факультета, деканом которого был назначен П. Д. Белоновский. 5 декабря город Вятка переименован в город Киров, и Вятский пединститут получил название Кировского государственного педагогического института имени В. И. Ленина (КГПИ им. В. И. Ленина). В эти годы на кафедре математики начали работать преподаватели математики – выпускники ВПИ, в том числе Ф. Ф. Нагибин.

В 1935 г. кафедрой математики стал заведовать профессор Виталий Матвеевич Шепелев (1897–?), параллельно исполняющий обязанности декана физико-математического факультета [11].

В сентябре 1938 г. кафедра математики претерпела серьезные кадровые и организационные изменения [12; 25].

1938–1941 гг. В этот период существовали две математические кафедры: **кафедра алгебры и геометрии** и **кафедра математического анализа**. Заведующим кафедрой алгебры и геометрии был Николай Андреевич Колмогоров (1897–1965), принятый на работу в КГПИ в 1938 г. и защитивший кандидатскую диссертацию по геометрии «Стереометрическая теория трансверсалей» в июне 1939 г. [11; 29; 64; 117]. Доцент Борис Аронович Манзон (1906–?) возглавлял кафедру математического анализа [12]. В сентябре 1939 г. Ф. Ф. Нагибин успешно защитил кандидатскую диссертацию по методике преподавания математики «Вопросы изучения функций в курсе математики средней школы» [25].

1941–1947 гг. В связи с началом Великой Отечественной войны в институте вновь действовала единая **кафедра математики**, которой заведовал Н. А. Колмогоров. В это время на кафедре работал известный ученый, профессор математики Александр Рувимович Кулишер (1878–1945) [11; 25], руководивший в 1944–1945 гг. аспирантом В. Ф. Малявко по методике преподавания математики (МПМ). В военные годы физико-математический факультет возглавлял доцент Ф. Ф. Нагибин, одно время исполнявший и обязанности директора КГПИ имени В. И. Ленина.

Разделение кафедры математики (1947–1953 гг.). В 1947 г. кафедра математики вновь разделяется на **кафедру алгебры и геометрии** (заведующий кафедрой доцент Н. А. Колмогоров) и **кафедру математического анализа и методики математики** во главе с доцентом Ф. Ф. Нагибиным.

В эти годы в КГПИ имени В. И. Ленина открываются аспирантуры:

- по **геометрии тетраэдра** (1950) под руководством Н. А. Колмогорова;
- по **методике преподавания математики** (1951) под руководством Ф. Ф. Нагибина;
- по **номографии** (1952) под руководством нового директора КГПИ, кандидата физико-математических наук, доцента Николая Дмитриевича Ермилова (1910–1970), работавшего в институте в 1952–1957 гг.

В этот период появляются первые книги Ф. Ф. Нагибина [1; 2]. Под его руководством начинает зарождаться научно-методическая школа, получившая в дальнейшем название «Теория и методика обучения решению математических задач» [25; 80; 81].

В 1950 г. в пединститут пришла работать кандидат физико-математических наук Лидия Алексеевна Зыкова (1925–2020), окончившая физико-математический факультет и аспирантуру по геометрии Московского областного педагогического института (МОПИ) имени Н. К. Крупской.

Три математические кафедры (1953–2002 гг.). Почти 50 лет в кировском пединституте функционировали три математические кафедры [16; 25; 27; 38; 62]:

- **кафедра алгебры**, которой последовательно заведовали кандидаты физико-математических наук, доценты Н. Д. Ермилов, Л. А. Зыкова, старший преподаватель Петр Кузьмич Бельтюков (1928–2009), кандидат физико-математических наук, доцент Генриетта Зосимовна Мошкина (1929 г. р.), кандидат педагогических наук, доцент Августа Петровна Шихова (1932 г. р.), доктор физико-математических наук, профессор Е. М. Вечтомов;
- **кафедра геометрии**, заведующими которой были профессор Н. А. Колмогоров, получивший ученое звание профессора в 1961 г., доцент Л. А. Зыкова, кандидат педагогических наук, доцент Петр Александрович Крупин (1917–1993), старший преподаватель Г. А. Клековкин, кандидат физико-математических наук, доцент И. С. Рубанов (заведовал кафедрой в 1984–2002 гг.);
- **кафедра математического анализа и методики преподавания математики**, которой заведовали доцент Ф. Ф. Нагибин, получивший ученое звание профессора в 1967 г., доценты Е. С. Канин,

Ирина Иссаковна Подгорная (1946 г. р.) [97], С. И. Калинин, Марина Викторовна Крутихина (1958 г. р.) [71].

Федор Федорович Нагибин успешно руководил аспирантурой; воспитал 5 кандидатов педагогических наук (А. И. Жаворонков, Е. С. Канин, Н. Г. Килина, В. С. Семаков, А. П. Шихова), доцента М. Г. Лускину и целый ряд профессиональных преподавателей математического анализа. Ф. Ф. Нагибин много публиковался, в частности, в журнале «Математика в школе». Среди его книг следует особо выделить знаменитую «Математическую шкатулку» [90; 92] и учебное пособие для старших школьников «Экстремумы» [91]. Девятая глава книги [25] содержит расшифрованные студентами-математиками неопубликованные страницы рукописей Нагибина, которые, по всей видимости, должны были стать продолжением «Математической шкатулки». Отметим, что первый защитившийся аспирант Нагибина Аркадий Иванович Жаворонков (1923–1965) в 1957–1963 гг. работал деканом физико-математического факультета КГПИ имени В. И. Ленина, а затем – проректором по научной работе.

В известной мере к научно-методической школе Нагибина можно отнести и деятельность Н. А. Колмогорова, через геометрическую аспирантуру которого прошли многие преподаватели математики КГПИ имени В. И. Ленина. Н. А. Колмогоров активно занимался организацией математических олимпиад школьников г. Кирова и области, создал в регионе школу юных математиков (ШЮМ). Кандидатскую диссертацию по геометрии под руководством Н. А. Колмогорова в 1956 г. защитила Надежда Михайловна Федорова (1924–2002), в 1968 г. кандидатскую диссертацию защитил Я. П. Понарин, но уже под руководством известного геометра, доктора физико-математических наук, профессора З. А. Скопеца из Ярославского госпединститута. Заметим также, что аспирантуру под руководством З. А. Скопеца окончил другой выпускник физико-математического факультета КГПИ имени В. И. Ленина кандидат физико-математических наук (1968) Евгений Викторович Потоскуев (1939–2019), автор замечательных учебников и задачников по геометрии для профильной школы, который последнее десятилетие работал в должности профессора Тольяттинского государственного университета.

Среди выпускников физико-математического факультета КГПИ имени В. И. Ленина (1960) следует отметить Василия Яковлевича Перминова (1938 г. р.), доктора философских наук, профессора, заслуженного профессора МГУ имени М. В. Ломоносова, ведущего философа математики в мире.

В 1968 г. физико-математический факультет КГПИ имени В. И. Ленина разделился на два факультета – математический и физический [16; 27; 62]. Деканами математического факультета последовательно назначались или избирались старший преподаватель Лидия Васильевна Созонова (1934 г. р.), кандидат физико-математических наук, доцент Александр Михайлович Тезин (1933–2013), кандидаты педагогических наук, доценты Виктор Степанович Семаков (1935 г. р.), который в 1988–2004 гг. был первым проректором вуза, и Августа Игоревна Глушкова (1951 г. р.), кандидат технических наук, доцент Станислав Михайлович Окулов (1949 г. р.) [31; 93–95], ставший в дальнейшем доктором педагогических наук и профессором, кандидаты физико-математических наук, доценты Елена Михайловна Ковязина (1969 г. р.) и Вера Ивановна Варанкина (1962 г. р.) [3–30; 65].

В 1970 г. математический факультет окончили Геннадий Анатольевич Клековкин (1949 г. р.), в дальнейшем кандидат физико-математических наук, доцент, автор многочисленных книг по геометрии и дискретной математике, сейчас работает в Самаре, и Евгений Александрович Перминов (1948 г. р.), в настоящее время доктор педагогических наук, доцент, специалист по методике обучения дискретной математике в школе и в вузе, преподает в Екатеринбурге.

После смерти Ф. Ф. Нагибина в 1976 г. научно-методической школой руководил его ученик, кандидат педагогических наук, доцент, с 1988 г. профессор, Евгений Степанович Канин (1926–2013) [6; 15; 25; 27; 28; 50; 62; 70; 80–84; 93]. В конце 1980-х годов к руководству методической школой подключается новый заведующий кафедрой математического анализа и МПМ кандидат физико-математических наук Сергей Иванович Калинин (1953 г. р.) [16; 25; 27; 62; 70; 73–79; 87].

В 1982 г. олимпиадное движение по математике в Кировской области возглавил Игорь Соломонович Рубанов (1952 г. р.) [65]. В 1985 г. он организовал первую в области летнюю математическую школу, которая в настоящее время выросла в многопредметную летнюю школу. Игорь Соломонович является идейным создателем и бессменным заместителем директора кировского Центра дополнительного образования одаренных школьников (ЦДООШ) по научно-методической работе. В 2003 г. И. С. Рубанов удостоен почетного звания «Заслуженный учитель школы РФ». Директором ЦДООШ все эти годы является выпускница математического факультета КГПИ Екатерина Николаевна Перминова (1967 г. р.). Костяк педагогического состава ЦДООШ также составляют выпускники Кировского пединститута.

В 1994 г. была открыта аспирантура по научной специальности 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел. Начала формироваться научная математическая школа «Функциональная алгебра и теория полуколец» под руководством доктора физико-математических наук, профессора Евгения Михайловича Вечтомова (1953 г. р.) [3–27; 33–60; 62; 65; 86; 129; 130], защитившего в апреле 1994 г. в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова докторскую диссертацию «Кольца непрерывных функций со значениями в топологическом теле». Стал работать региональный научный алгебраический семинар (руководитель – Е. М. Вечтомов) [37; 42], а с 1996 г. и студенческий исследовательский семинар по математическому анализу (руководитель С. И. Калинин) [76; 77].

Заметим, что все выпускники нашей алгебраической аспирантуры трудятся в сфере образования. Методистами в ЦДООШ работают 4 выпускника аспирантуры, кандидаты физико-математических наук И. А. Семенова, В. В. Сидоров, О. В. Старостина, А. В. Черанева, а также бывшие преподаватели ВятГГУ, математики, кандидаты физико-математических наук, доценты В. М. Караулов, Е. М. Ковязина, И. С. Рубанов. Первый наш аспирант Ирина Александровна Семенова (1970 г. р.) в настоящее время является руководителем математического отделения ЦДООШ.

На базе Вятского госпедуниверситета в 1995 г. создан Совет УМО по математике педвузов Волго-Вятского региона, один из десяти в Российской Федерации. Первым председателем Совета УМО стал кандидат физико-математических наук, профессор Яков Петрович Понарин (1934–2008) [65; 101–107], замечательный геометр, автор известного трехтомника «Элементарная геометрия» [106–108], изданного и переиздающегося Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО). С 2000 г. Совет УМО возглавляет Е. М. Вечтомов (до этого был заместителем председателя), всего им организовано и проведено 24 заседания на базе разных вузов страны.

В 1997 г. вновь открывается аспирантура по теории и методике обучения математике, руководитель Геннадий Иванович Саранцев (1938–2019), член-корреспондент РАО, доктор педагогических наук, профессор (г. Саранск) [25].

В 2000 г. начинает работать диссертационный совет по методикам обучения математике, физике и технологиям: председатель – Юрий Аркадьевич Сауров (1947 г. р.), доктор пед. наук, профессор, с 2006 г. член-корреспондент РАО (в это время заведовал кафедрой теоретической физики и методики обучения физике); заместитель председателя – Е. М. Вечтомов.

В 90-е годы XX века происходит существенное расширение деятельности методической школы:

• по тематике исследований, направленных в том числе на решение проблем вузовской методики и методологии математики, на изучение истории математического образования в регионе;

• включение в научно-методическую работу большинства преподавателей математических кафедр;

• активизация организационной и издательской деятельности.

Ядро обновленной математико-методической школы составили выпускники КГПИ им. В. И. Ленина, профессора Е. М. Вечтомов, Е. С. Канин, Я. П. Понарин, доценты В. И. Варанкина (также выпускница КГПИ), С. И. Калинин, М. В. Крутихина, И. И. Подгорная, И. С. Рубанов. Кировская научно-методическая школа вышла на качественно новый уровень развития; началом ее становления можно считать 1998 г.

В сентябре 1999 г. из состава математического факультета выделился новый факультет – факультет информатики, деканом которого по 31 января 2011 г. был С. М. Окулов [31].

Время перемен (2002–2018 гг.). В апреле 2002 г. возникла объединенная **кафедра алгебры и геометрии** (зав. кафедрой Е. М. Вечтомов). **Кафедрой математического анализа и МПМ** заведовала М. В. Крутихина.

Последним деканом математического факультета была доцент В. И. Варанкина, работавшая деканом в 2002–2006 гг.

1 сентября 2006 г. математический и физический факультеты были объединены в физико-математический факультет с новыми кафедрами:

• **высшей математики**, созданной на основе кафедры алгебры и геометрии, с заведующим кафедрой Е. М. Вечтомовым;

• **дидактики физики и математики**; в нее вошли методисты – физики и математики, заведовал кафедрой член-корреспондент РАО, доктор педагогических наук, профессор Владимир Степанович Данюшенков (1951 г. р.), бывший тогда ректором Вятского государственного гуманитарного университета (ВятГГУ), позднее – кандидат педагогических наук, доцент Константин Анатольевич Коханов (1974 г. р.).

Период с 2002 по 2010 гг. был весьма плодотворным для математиков ВятГГУ. Премии ВятГГУ за лучшую научно-методическую работу получили профессор Я. П. Понарин в 2006 г. за трехтомник по элементарной геометрии (см. последующие издания [103–105]) и доцент И. И. Подгорная в 2007 г. за учебное пособие [99]. Профессор Е. М. Вечтомов награждался премией ВятГГУ за лучшую научную работу по естественнонаучному направлению в 2002, 2005, 2008, 2010 и 2012 гг. Кроме того, Е. М. Вечтомов и доцент В. И. Варанкина в 2015 г. победили в конкурсе ВятГГУ на лучшую работу по гуманитарному направлению, получив премию за книгу [25].

В 2006 г. на базе кафедры высшей математики ВятГГУ был организован и успешно проведен юбилейный XXV Всероссийский семинар преподавателей математики университетов и педагогических вузов «Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах» [7; 108]. Научный руководитель семинара – доктор педагогических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ Александр Григорьевич Мордкович, председатель Оргкомитета – Е. М. Вечтомов, ученый секретарь и координатор – В. И. Варанкина. Семинар был поддержан грантом РГНФ.

В 2008 г. выпускник КГПИ, доцент кафедры высшей математики Василий Владимирович Чермных (1963 г. р.) утвержден ВАК РФ в ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 [27; 32; 52; 120]. Тема его докторской диссертации – «Функциональные представления полуколец и полумодулей». В это же самое время Е. М. Вечтомову присвоено почетное звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации», Указ Президента РФ от 17 марта 2008 года за подписью В. В. Путина.

В 2010 г. С. И. Калинин успешно защитил докторскую диссертацию по методике математики на тему «Обучение студентов математическому анализу в условиях фундаментализации высшего педагогического образования», в 2013 г. он удостоен ученого звания профессора.

1 февраля 2011 г. на базе физико-математического факультета и факультета информатики был образован факультет информатики, математики и физики. Сначала деканом стал С. М. Окулов, а 1 апреля 2013 г. факультет возглавила выпускница математического факультета КГПИ, кандидат педагогических наук, доцент Наталья Александровна Бушмелева (1972 г. р.), работавшая с 1995 г. заместителем декана математического факультета Августы Игоревны Глушковой, а с 1999 г. заместителем С. М. Окулова.

В это время математика преподавалась на трех кафедрах:

- **кафедра алгебры и дискретной математики** (заведующий кафедрой – Е. М. Вечтомов) [43];
- **кафедра математического анализа и методики обучения математике** (МОМ) во главе с С. И. Калининым;
- **кафедра прикладной математики и информатики.** В разное время кафедрой заведовали кандидат физико-математических наук, доцент Владислав Алексеевич Онегов (1940–2020) [97], кандидат технических наук, доцент Евгений Вячеславович Котельников (1980 г. р., в 2020 г. стал доктором технических наук) и кандидат педагогических наук, доцент Елена Владимировна Разова (1975 г. р.). Первая такая кафедра появилась в Кирове еще до объединения вузов в ВятГУ в 2002 г., и ее первым заведующим стал доктор физико-математических наук, профессор Аба Натанович Рапопорт (1942–2010), затем заведовал кандидат технических наук, доцент Валентин Юрьевич Иномистов (1967 г. р.) [72]. В ВятГГУ кафедра прикладной математики и информатики была создана в 2003 г. с первоначальным названием – кафедра прикладной математики (заведующий кафедрой В. А. Онегов). С 2016 г. в объединенном ВятГУ существует единая кафедра прикладной математики и информатики (заведующий кафедрой Е. В. Разова).

Следует отметить, что кафедры математики существовали в Кировском политехническом институте (КирПИ) и в Кировском сельскохозяйственном институте (с 1966 г. [91]), но они были общеинститутскими (невыпускающими) кафедрами. Кафедра высшей математики в КирПИ создана в 1963 г., ее первым заведующим была Л. А. Зыкова. Долгие годы этой кафедрой заведовал доцент Анатолий Сергеевич Махнев (1952 г. р.), защитивший в 2010 г. докторскую диссертацию по физической химии. Заметим также, что с 2004 по 2016 гг. в ВятГУ функционировала кафедра математического моделирования в экономике под руководством доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Викторовича Шатрова (1950 г. р.) [124].

В последние 20–25 лет активно развивается организационная и издательская деятельность в области математики. С 1998 г. по 2014 г. в ВятГГУ было проведено 8 всероссийских научно-методических конференций по проблемам математического образования с изданием сборников материалов [5; 7; 9; 13; 19; 44; 87; 109–114; 116]. В 1998–2019 гг. опубликован 21 выпуск межвузовского ежегодника «Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона», который трансформировался в научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета» (главный редактор Е. М. Вечтомов) [89]. Отметим, что периодическим изданиям по математике в ВятГГУ посвящена наша работа [26]. Регулярно проходили защиты кандидатских диссертаций по алгебре и по методике обучения математике.

Очередное изменение произошло 1 сентября 2014 г., когда кафедра алгебры и дискретной математики и кафедра математического анализа и МОМ слились в одну – **кафедру фундаментальной и компьютерной математики** (заведующий кафедрой – Е. М. Вечтомов).

В 2016 г. ВятГГУ вошел в состав Вятского государственного университета (ВятГУ), ставшего на 5 лет опорным университетом региона. В ВятГУ был создан Институт математики и информационных систем (ИМИС) с двумя факультетами: факультетом автоматики и вычислительной техники (ФАВТ), факультетом компьютерных и физико-математических наук (ФКиФМН), деканом последнего стала с 1 апреля 2016 г. Н. А. Бушмелева. Кафедра фундаментальной и компьютерной математики пополнилась преподавателями бывшей кафедры высшей математики ВятГУ; в начальный период на кафедре работало 33 преподавателя.

Кафедра фундаментальной математики. С 1 сентября 2018 г. кафедра фундаментальной и компьютерной математики стала называться **кафедрой фундаментальной математики** (заведующий кафедрой – Е. М. Вечтомов). Математические дисциплины преподаются на кафедре фундаментальной математики и на кафедре прикладной математики и информатики (заведующий кафедрой – Е. В. Разова).

На начало 2021 г. на кафедре фундаментальной математики (ФМ) работают 20 преподавателей:

– один доктор (Е. М. Вечтомов) и 9 кандидатов физико-математических наук по алгебре (В. И. Варанкина, Е. Н. Лубягина, Р. В. Марков, И. В. Орлова, А. А. Петров, В. В. Сидоров, О. В. Чермных, Д. В. Чупраков, Д. В. Широков);

– один доктор (С. И. Калинин) и 7 кандидатов педагогических наук по методике обучения математике (Н. А. Зеленина, М. В. Крутихина, Л. В. Панкратова, С. И. Торопова, Л. Н. Чиркова, М. Р. Шабалина, З. В. Шилова);

– два старших преподавателя без степени (Л. В. Тимшина, Е. С. Трефилова).

Средний возраст преподавателей кафедры – 46 лет. К сожалению, на кафедре нет преподавателей моложе 30 лет.

Почетные звания «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» имеют В. И. Варанкина и М. В. Крутихина, Е. М. Вечтомов – Заслуженный работник высшего образования РФ, С. И. Калинин – Почетный работник сферы образования РФ.

Из 20 преподавателей кафедры лишь трое не являются выпускниками нашего университета: С. И. Калинин окончил механико-математический факультет Горьковского университета имени Н. И. Лобачевского, М. В. Крутихина – математический факультет Ленинградского государственного педагогического института имени А. И. Герцена, О. В. Чермных – математический факультет Московского педагогического государственного университета (МПГУ). 17 преподавателей имеют базовое педагогическое образование, двое – инженерное, один – классическое (прикладная математика). Кроме докторов наук (Е. М. Вечтомов, С. И. Калинин), все преподаватели имеют диплом магистра: 16 – магистра по направлению Математика и компьютерные науки, по одному – магистра педагогического образования (С. И. Торопова) и магистра экономики (Е. С. Трефилова). Каждый преподаватель кафедры окончил математическую или педагогическую аспирантуру.

В 2013–2020 гг. на кафедре работал (по совместительству) известный алгебраист, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Александр Алексеевич Махнев (1953 г. р.) из Института математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН.

На кафедре ФМ продолжают работать две научные школы: алгебраическая школа «Функциональная алгебра и теория полуколец» [8; 20; 37; 42; 46] под руководством Е. М. Вечтомова и методическая школа «Кировская научно-методическая школа по математическому образованию» [24] под руководством профессоров Е. М. Вечтомова и С. И. Калинина. Исследования ведутся по двум главным направлениям «Полукольца и их связи» и «Развитие непрерывного математического образования в Кировской области» [22; 45]. В рамках научных школ защищены две докторские и 17 кандидатских диссертаций по алгебре, одна докторская и 21 кандидатская диссертация по теории и методике обучения математике.

Кафедра регулярно участвует в работе по научным грантам. Преподаватели кафедры получали гранты Сороса (1998–2001), РФФИ (2003, 2008) и РГНФ (2006, 2012, 2015), вели исследования по тематическому плану ВятГГУ, проект № 1.1.5 «Полукольца и пучки» (2009–2012), по грантам ведущей научной школы ВятГГУ (2008, 2013, 2014), по проектной части государственного задания Минобрнауки РФ «Функциональная алгебра и полукольца», проект № 1.1375.2014/К (2014–2016), и базовой части госзадания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/БЧ (2017–2019). В 2015 г. успешно проведена работа по гранту РГНФ и Кировской области «Проблемы и перспективы развития непрерывного математического образования в Кировской области», проект 15-16-43005 а(р). Руководил перечисленными грантами Е. М. Вечтомов.

Семь преподавателей кафедры (В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, Р. В. Марков, М. Р. Шабалина, З. В. Шилова, Д. В. Широков) являются исполнителями по проекту Минобрнауки «Создание онлайн курсов по тематике математических и естественный наук», проект № 2020-11-МП-0001-ОК 155, онлайн-курс «Математика» (2020–2021).

Только в 2015–2020 гг. преподавателями кафедры:

- значительно продвинута теория полуколец непрерывных функций: получены новые теоретические результаты и разработаны новые методы исследования функционально-алгебраических объектов (Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров, В. И. Варанкина, Е. Н. Лубягина, Д. В. Чупраков, Н. В. Шалагинова);
- развита теория важных классов абстрактных полуколец: мультипликативно циклических полуколец (Е. М. Вечтомов, А. С. Бестужев, И. В. Орлова); полуколец с идемпотентным умножением (Е. М. Вечтомов, А. А. Петров); полуколец, близких к регулярным полукольцам (В. В. Чермных, Р. В. Марков); решеточно упорядоченных полуколец (В. В. Чермных, О. В. Чермных);
- получены новые обобщающие результаты в теории средних величин, нашедшие применение в методике решения элементарных задач с неравенствами (С. И. Калинин, Л. В. Панкратова);
- защищено 7 кандидатских диссертаций – 5 по алгебре и 2 по методике обучения математике;
- издано 6 монографий [25; 52; 55; 78; 129; 130] и 19 учебных пособий с грифами УМО [47; 48; 51; 60; 66–68; 71; 78; 82; 86; 98; 100; 118; 121; 125–128];
- опубликовано 50 математических и научно-методических статей в научных журналах из баз данных Web of Science и/или Scopus, включая целый ряд журналов, имеющих квартиль Q2;
- сделано 77 докладов на 40 научных и научно-практических конференциях и семинарах международного и всероссийского статуса, в том числе 15 пленарных докладов; при этом Е. М. Вечтомов 6 раз был членом программных комитетов конференций.

Кроме того, за указанный период издано пять выпусков (с 17-го по 21-й) периодического межвузовского сборника научно-методических работ «Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона» [88] под редакцией профессора Е. М. Вечтомова, написано 7 отчетов по трем финансируемым научным проектам.

Ведущие преподаватели кафедры регулярно выступают в качестве редакторов и рецензентов научных и методических изданий, официальных оппонентов и составителей внешних отзывов по кандидатским и докторским диссертациям по математике, ее методике и философии. Так, в последние годы профессор Е. М. Вечтомов оппонировал две докторские диссертации в МГУ имени М. В. Ломоносова (2015, 2017) и две кандидатские диссертации в Казанском федеральном университете (2018) и Ульяновском госуниверситете (2018), профессор С. И. Калинин был оппонентом трех кандидатских диссертаций, защищенных в МПГУ (2015, 2016, 2018).

Также можно отметить следующее:

- Е. М. Вечтомов – член Московского математического общества (ММО) с 1989 г. и Американского математического общества (AMS) с 2016 г., состоит референтом американского реферативного журнала «Mathematical Review» с 2011 г. (написал около 50 отзывов), с 2014 г. является федеральным экспертом научно-технической сферы Минобрнауки РФ и Российского научного фонда (РНФ), с 2008 г. входит в состав Федерального учебно-методического объединения (ФУМО) по математике и механике, в 1999–2010 гг. в качестве эксперта 12 раз участвовал в аттестации российских вузов, является главным редактором научного журнала «Математический вестник Вятского государственного университета» и членом редколлегий нескольких отечественных журналов;
- профессор С. И. Калинин – заместитель главного редактора журналов «Математика в школе» и «Математический вестник Вятского государственного университета», член редколлегий ряда российских журналов;
- доцент В. И. Варанкина является заместителем заведующего кафедрой ФМ, координатором научно-методических мероприятий, ответственным секретарем научного журнала «Математический вестник Вятского государственного университета»;
- доцент Вадим Вениаминович Сидоров (1983 г. р.) [55; 57; 58; 108; 109129; 130] завершает работу над докторской диссертацией на тему «Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных действительнозначных функций», занимается (весьма успешно) подготовкой старшеклассников к математическим олимпиадам, является одним из основателей и организаторов интеллектуальных игр в Кировской области;
- доцент Наталья Алексеевна Зеленина (1971 г. р.) [71] – председатель Кировской региональной предметной комиссии по математике с 2013 г., председатель Ассоциации учителей математики Кировской области;

• доцент Зоя Вениаминовна Шилова (1973 г. р.) [100; 116; 118; 119] – эксперт Рособрнадзора по высшей школе с 2012 г.;

• работают два студенческих учебно-исследовательских семинара – по математическому анализу под руководством профессора С. И. Калинина и по абстрактной алгебре под руководством профессора Е. М. Вечтомова.

В настоящее время на кафедре ФМ обучаются 4 аспиранта и 20 магистрантов. Исследовательской работе с магистрантами [21] и аспирантами [23] на кафедре уделяется большое внимание.

За годы существования кафедры – от кафедры математики ВПИ до кафедры фундаментальной математики ВятГУ – состоялось 88 выпусков учителей математики, включая учителей математики и физики, физики и математики, математики и информатики (всего около 6 тысяч человек), 8 выпусков магистров направления подготовки 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», профиль «Алгебра и дискретная математика» (56 человек), 7 выпусков магистров направления подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование», профиль «Математика» (21 человек).

Кафедра фундаментальной математики ВятГУ представляет собой сплоченный коллектив профессионалов, способный решать серьезные научные, образовательные и организационные задачи в сфере математики, достойно отвечать на вызовы времени.

1 сентября 2020 г. кафедре фундаментальной математики исполнилось 90 лет! – как последовательной правопреемнице первой кафедры математики на Вятской земле.

Список литературы

1. *Березанская Е. С., Нагибин Ф. Ф.* Упражнения для устных занятий по алгебре для 6–7 классов средней школы : пособие для учителей. М. : Учпедгиз, 1949. 144 с.

2. *Березанская Е. С., Нагибин Ф. Ф.* Сборник вопросов и упражнений по алгебре и тригонометрии. Для 8–10 классов средней школы : пособие для учителей. Изд. 2-е. М. : Учпедгиз, 1955. 160 с.

3. *Варанкина В. И.* (составитель). Е. М. Вечтомов. Математик. Педагог. Философ : биобиблиографический указатель. Киров : Кировская областная научная библиотека имени А. И. Герцена ; Веси, 2018. 288 с. (Ученые Вятского края; вып. 5).

4. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Математика для юристов. Практические занятия и контрольные работы : учебное пособие. Киров : Изд-во Кировского филиала Московского гуманитарно-экономического института, 1998. 59 с.

5. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* III Всероссийская научная конференция «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2004. № 11. С. 206–207.

6. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* К 80-летию профессора Е. С. Канина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. С. 6–12.

7. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* XXV Всероссийский семинар преподавателей математики университетов и педагогических вузов // Математика в школе. 2007. № 1. С. 79–80.

8. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Научная алгебраическая школа // Герценка: Вятские записки. 2009. Вып. 15. С. 199–207.

9. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* IV Всероссийская научно-методическая конференция «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России» // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2009. № 2(1). С. 144–146.

10. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Аркадий Михайлович Слободчиков в нашей жизни // Педагог. Ученый. Личность / А. М. Слободчиков. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2011. С. 36–38.

11. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Профессора-математики в истории математического образования Вятского края // Педагогические технологии математического творчества : сб. статей участников Международной научно-практической конференции. Арзамас : АГПИ, 2011. С. 51–57.

12. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Преподаватели математики Вятского педагогического института в 20–30-е годы XX века // Сб. материалов VI региональной научно-практической конференции «Вятская земля в прошлом и настоящем». Киров : Изд-во ВятГГУ, 2012. С. 260–266.

13. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* V Всероссийская научно-методической конференции «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России» // Математика в школе. 2013. № 1. С. 70–71.

14. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* О качестве математического образования // Математика в образовании. 2013. Вып. 9. С. 148–152.

15. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Евгений Степанович Канин (1926–2013) // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2014. Вып. 16. С. 7–23.

16. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Математика в Вятском государственном университете: история и современность // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 5. С. 158–169.

17. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* О качестве математического образования // Математика в образовании. 2013. Вып. 9. С. 148–152.

18. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Профессор Федор Федорович Нагибин // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 5. С. 170–176.

19. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* XXXIII Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов // Математика в школе. 2015. № 2. С. 61–62.

20. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Развитие функциональной алгебры в Вятском государственном гуманитарном университете // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2015. № 5. С. 137–145.

21. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Первые магистратуры на Вятской земле // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2015. № 11. С. 144–149.

22. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Непрерывное математическое образование в Кировской области // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2016. Вып. 18. С. 6–19.

23. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Обучение аспирантов направления подготовки «Математика и механика» // Н. И. Лобачевский и математическое образование в России: Материалы Международного форума по математическому образованию, посвященного 225-летию Н. И. Лобачевского. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2017. Т. 1. С. 48–52.

24. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Кировская научно-методическая школа по математическому образованию // 3-я Национальная (Всероссийская) научная конференция «Математическое моделирование и информационные технологии : сб. материалов. Сыктывкар : Изд-во СыктГУ, 2019. С. 52–54.

25. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Канин Е. С.* Профессор Федор Нагибин. Сквозь призму времени. Серия: Научно-педагогическое наследие ВятГГУ. Т. 1. Киров : Изд-во ВятГГУ, Лобань, 2014. 316 с.

26. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Лутошкина И. А.* Периодические издания по математике Вятского государственного гуманитарного университета // См. [64]. С. 62–66.

27. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Мордкович А. Г.* Математическое образование в Вятском государственном гуманитарном университете // Тенденции и перспективы развития математического образования : материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, посвященное 100-летию ВятГГУ. Киров : Изд-во ВятГГУ, Радуга-ПРЕСС, 2014. С. 4–18.

28. *Варанкина В. И., Канин Е. С.* Элементарные функции и их графики: учебное пособие. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2012. 160 с.

29. *Варанкина В. И., Кочурова Д. В.* Николай Андреевич Колмогоров: математик и педагог // См. [64]. С. 209–213.

30. *Варанкина В. И., Тебенькова С. В.* Профессор Ф. Ф. Нагибин. Страницы истории советского математического образования // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2011. № 3 (2). С. 88–95.

31. *Васенина Е. А., Окулов С. М.* О факультете информатики // См. [64]. С. 75–80.

32. Василию Владимировичу Чермных – 50 лет // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2013. № 1 (2). С. 166–167.

33. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы : учебное пособие для спецкурса. Киров, М. : Изд-во КГПИ, МПГУ, 1992. 121 с.

34. *Вечтомов Е. М.* Функциональные представления колец : монография. Киров, М. : Изд-во КГПИ, МПГУ, 1993. 191 с.

35. *Вечтомов Е. М.* Теория решеток : учебно-методическая разработка спецкурса. Киров : Изд-во КГПИ, 1995. 40 с.

36. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца : пособие для студентов и аспирантов. Киров : Изд-во ВятГПУ, 2000. 44 с.

37. *Вечтомов Е. М.* Алгебра в Вятском госпедуниверситете // Сб. материалов V региональной научно-практической конференции «Вятская земля в прошлом и настоящем». Киров : Изд-во ВГПУ, 2001. С. 91–93.

38. *Вечтомов Е. М.* Об истории математического образования в Вятском государственном гуманитарном университете // III Всероссийская научная конференция «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России». Киров : Изд-во ВятГГУ, 2004. С. 3–8.

39. *Вечтомов Е. М.* Математические очерки : учебно-методическое пособие. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2004. 215 с.

40. *Вечтомов Е. М.* Метафизика математики : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2006. 508 с.

41. *Вечтомов Е. М.* 60-я юбилейная научная сессия ВятГГУ // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2008. № 2 (1). С. 175–176.

42. *Вечтомов Е. М.* Алгебраическое образование и алгебраические исследования в ВятГГУ // Сб. материалов IV Всероссийской научно-методической конференции «Проблемы математического образования в вузах и школах России в условиях его модернизации». Сыктывкар : Изд-во СыктГУ, 2014. С. 148–155.

43. *Вечтомов Е. М.* Кафедра алгебры и дискретной математики Вятского государственного гуманитарного университета в историческом развитии // См. [64]. С. 57–61.

44. *Вечтомов Е. М.* О научно-методических конференциях по развитию математического образования // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 8. С. 160–162.

45. *Вечтомов Е. М.* Развитие непрерывного математического образования в регионах // Материалы V Всероссийской научно-практической конференции «Преподавание математики, физики, информатики в вузах и школах России: проблемы содержания, технологии и методики». Глазов : ГГПИ, Глазовская типография, 2015. С. 32–37.

46. *Вечтомов Е. М.* Результаты исследований научной алгебраической школы Вятского государственного университета «Функциональная алгебра и теория полуколец» в 2014–2016 годы // Advanced science. 2017. № 1. 1,2 п. л.

47. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 296 с.

48. *Вечтомов Е. М.* Философия математики : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 317 с.

49. *Вечтомов Е. М.* Нерешенные проблемы российского математического образования // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2019. Вып. 21. С. 25–36.

50. *Вечтомов Е. М., Канин Е. С.* Математика в Вятском государственном гуманитарном университете // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2004. Вып. 6. С. 3–20.

51. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Компьютерная геометрия: геометрические основы компьютерной графики : учебное пособие для вузов. 2-е изд. М. : Юрайт, 2020. 157 с.

52. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2012. 228 с.

53. *Вечтомов Е. М., Матвеев В. П.* Начала теории групп: методическая разработка. Киров : Изд-во КГПИ им. В. И. Ленина, 1990. 64 с.

54. *Вечтомов Е. М., Матвеев В. П., Созонова Л. В.* Элементы логики и теории множеств : методическая разработка. Киров : Изд-во КГПИ им. В. И. Ленина, 1988. 70 с.

55. *Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В.* Полукольца непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.

56. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 144 с.

57. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Абстрактная алгебра. Базовый курс : учебное пособие. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2014. 260 с.

58. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Полукольца непрерывных функций : монография. Киров : Изд-во ВятГУ, 2011. 312 с.

59. *Вечтомов Е. М., Созонова Л. В.* Алгебра. Вводный курс : методические рекомендации для студентов I курса математического факультета. Киров : Изд-во КГПИ, 1990. 43 с.

60. *Вечтомов Е. М., Широков Д. В.* Математика: логика, множества, комбинаторика : учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 243 с.

61. Вятская земля в прошлом и настоящем (к 100-летию Вятского государственного гуманитарного университета) : сб. материалов VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Киров, 20–21 ноября 2013 г. : в 2 т. Т. 1. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2014. 502 с.

62. Вятский государственный гуманитарный университет: 1914–2004 / Отв. ред. М. С. Судовиков. Киров : Изд-во ВятГУ, 2004. 304 с.

63. Геометрия. 6 класс : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, Ф. Ф. Семенович, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов. Изд. 7-е. М. : Просвещение, 1977.

64. Геометрия. 7 класс : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, Ф. Ф. Семенович, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов. Изд. 6-е. М. : Просвещение, 1977.

65. Геометр Яков Петрович Понарин (1934–2008) / В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, И. С. Рубанов, В. В. Чермных // Полином (электронный журнал). 2009. № 4. С. 116–125.

66. *Горев П. М.* Приобщение к математическому творчеству: дополнительное математическое образование. Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing, 2012. 156 с.

67. *Горев П. М., Утемов В. В.* Научное творчество: Практическое руководство по развитию креативного мышления. М. : ЛИБРОКОМ, 2013. 112 с.

68. *Горев П. М., Утемов В. В.* Уроки развивающей математики. 5–6 классы: Задачи математического кружка. Киров : Изд-во МЦИТО, 2014. 207 с.

69. Евгению Михайловичу Вечтомову – 60 лет // Математика в школе. 2013. № 6. С. 78.

70. Задачи и упражнения по началам математического анализа : пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики и для внеклассных занятий математикой / С. И. Калинин, Е. С. Канин, Г. М. Маянская [др.]. 2-е изд. М. : Московский лицей, 2001. 208 с.

71. *Зеленина Н. А., Крутихина М. В., Старостина О. В.* Математика: учебное пособие. Киров : Изд-во ВятГУ, 2018. 192 с.

72. *Иномистов В. Ю.* Кафедра прикладной математики и информатики ВятГУ: вчера, сегодня и завтра // См. [64]. С. 169–173.

73. *Калинин С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана : учебное пособие по спецкурсу. Киров : Изд-во ВГГУ, 2002. 368 с.

74. *Калинин С. И.* Обучение студентов математическому анализу в условиях фундаментализации высшего педагогического образования : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2008. 353 с.

75. *Калинин С. И.* Метод неравенств решения уравнений : учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. М. : Московский лицей, 2013. 112 с.

76. *Калинин С. И.* О студенческом научно-исследовательском семинаре по математическому анализу в ВятГГУ // См. [64]. С. 67–75.

77. *Калинин С. И.* Студенческие исследования по математическому анализу в ВятГГУ // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2015. № 6. С. 147–153.

78. *Калинин С. И., Панкратова Л. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка : учебное пособие. Красноярск : Научно-инновационный цент, 2020. 114 с. (Электронное издание).

79. *Калинин С. И., Ястребов А. В.* Избранные вопросы математического анализа и методики его преподавания: деятельностный аспект : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 260 с.

80. *Канин Е. С.* Ф. Ф. Нагибин (к 60-летию со дня рождения) // Математика в школе. 1969. № 1. С. 85.

81. *Канин Е. С.* Научно-методическая школа профессора Ф. Ф. Нагибина «Теория и методика обучения решению математических задач» // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2009. Вып. 11. С. 18–27.

82. *Канин Е. С.* Графические методы в математическом анализе и алгебре: учебное пособие / Под общ. ред. Е. М. Вечтомова. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2016. 160 с.

83. *Канин Е. С., Канина Е. М., Чернявский М. Д.* Упражнения по началам математического анализа в 9–10 классах : книга для учителя. М. : Просвещение, 1986. 160 с.

84. *Канин Е. С., Нагибин Ф. Ф.* Учебные математические задачи : учебное пособие. Киров : Изд-во КГПИ, 1980. 94 с.

85. *Колмогоров Н. А., Нагибин Ф. Ф., Чудиновских В. В.* Сборник задач для подготовки учащихся средних школ к математическим олимпиадам. Киров : Волго-Вятское книжное изд-во, 1968. 136 с.

86. *Лубягина Е. Н., Вечтомов Е. М.* Линейная алгебра : учебное пособие для вузов. 2-е изд. М. : Юрайт, 2019. 150 с.

87. Математика и компьютерное моделирование в исследованиях студентов и школьников : материалы Всероссийской молодежной научно-практической конференции (14–15 мая 2013 г.). Киров : Изд-во ВятГГУ, 2013.

88. Математике надо служить (Сергею Ивановичу Калинину – 60 лет) // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2013. № 1 (1). С. 184.

89. Математический вестник университетов и педвузов Волго-Вятского региона: периодический межвузовский сборник научно-методических работ / Под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : Изд-во ВГПУ, ВятГГУ, 1998–2019. Выпуски: 1 (1998), 2 (2000), 3 (2001), 4 (2002), 5 (2003), 6 (2004), 7 (2005), 8 (2006), 9 (2007), 10 (2008), 11 (2009), 12 (2010), 13 (2011), 14 (2012), 15 (2013), 16 (2014), 17 (2015), 18 (2016), 19 (2017), 20 (2018), 21 (2019).

90. *Наврозов В. В., Ряттель А. В.* История возникновения и развития кафедры математики Вятской государственной сельскохозяйственной академии // См. [64]. С. 173–178.

91. *Нагибин Ф. Ф.* Математическая шкатулка. М. : Учпедгиз, 1958. 166 с.

92. *Нагибин Ф. Ф.* Экстремумы : пособие для учащихся старших классов. М. : Просвещение, 1966. 120 с. (Библиотека школьника).

93. *Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С.* Математическая шкатулка. Переработанное и дополненное издание. М. : Дрофа, 2006. 271 с.

94. *Окулов С. М.* Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике : учебное пособие. 2-е изд. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2012. 425 с.

95. *Окулов С. М., Лялин А. В.* Ханойские башни : учебное пособие. 2-е изд. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2015. 248 с.

96. *Окулов С. М., Разова Е. В., Лялин А. В.* Алгоритмы компьютерной арифметики : учебное пособие. 2-е изд. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2021. 285 с.

97. *Онегов В. А.* К истории образования кафедры прикладной математики // См. [64]. С. 190–195.

98. *Панкратова Л. В.* Числовые ряды : учебное пособие. Красноярск: Научно-инновационный цент, 2020. 100 с. (Электронное издание).

99. *Подгорная И. И.* Уроки математики : учебное пособие для поступающих в вузы. М. : Московский лицей, 2006. 692 с.

100. *Подлевских М. Н., Шилова З. В.* Математическое моделирование : учебное пособие. Киров : Изд-во ВятГУ, 2020. 140 с.

101. *Понарин Я. П.* Геометрия. 7–11 классы : учебное пособие для школ, лицеев, колледжей. Ростов-на-Дону : Феникс, 1997. 512 с.

102. *Понарин Я. П.* Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. 2-е изд. М. : МЦНМО, 2014. 160 с.

103. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: учебное пособие : в 3 т. Т. 1. Планиметрия, преобразования плоскости. 4-е изд. М. : МЦНМО, 2018. 312 с.

104. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: учебное пособие : в 3 т. Т. 2. Стереометрия, преобразования пространства. 3-е изд. М. : МЦНМО, 2015. 256 с.

105. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия : учебное пособие : в 3 т. Т. 3. Треугольники и тетраэдры. 2-е изд. М. : МЦНМО, 2015. 192 с.

106. *Понарин Я. П.* Аффинная и проективная геометрия. М. : МЦНМО, 2009. 288 с.

107. *Понарин Я. П., Скопец З. А.* Перемещения и подобия плоскости. Киев : Радянська школа, 1981. 173 с.

108. Преподаватели ВятГУ. Киров : Изд-во ВятГУ, 2004. 208 с.

109. Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах : материалы XXV Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов (20–22 сентября 2006 г.). Киров, М. : ВятГГУ, МГПУ, 2006. 300 с. (Издано при финансовой поддержке РГНФ, проект № 06-06-14066г).

110. Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России : тезисы докладов межрегиональной научной конференции (19–20 мая 1998 г.). Киров : Изд-во Вятского госпедуниверситета, 1998. 248 с.

111. Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России : тезисы докладов II межрегиональной научной конференции (9–10 апреля 2001 г.). Киров : Изд-во Вятского госпедуниверситета, 2001. 195 с.

112. Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России : тезисы докладов III Всероссийской научной конференции (12–14 мая 2004 г.). Киров : Изд-во ВятГГУ, 2004. 166 с.

113. Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России : материалы IV Всероссийской научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Ф. Ф. Нагибина (14–16 мая 2009 г.). Киров : Изд-во ВятГГУ, 2009. 172 с.

114. Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России: Интерактивные формы обучения математике студентов и школьников : материалы V Всероссийской научно-методической конференции (10–12 мая 2012 г.). Киров : Изд-во ВятГГУ, 2012. 348 с. (Издано при финансовой поддержке РГНФ, проект № 12-16-43501г)

115. Ректоры ВятГГУ. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2014. 192 с.

116. Тенденции и перспективы развития математического образования : материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, посвященного 100-летию ВятГГУ (25–27 сентября 2014 г.). Киров : Изд-во ВятГГУ : Радуга-ПРЕСС, 2014. 392 с.

117. Сборник задач и вопросов по геометрии: пособие для учителей средней школы / Е. С. Березанская, Н. А. Колмогоров, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов. Изд. 2-е. М. : Учпедгиз, 1962. 208 с.

118. *Сидоров В. В.* Алгебра: алгебраические структуры, комплексные числа, многочлены : учебное пособие. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2013. 232 с.

119. *Сидоров В. В.* Студенческие математические олимпиады города Кирова : учебное пособие. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 96 с.

120. *Чермных В. В.* Функциональные представления полуколец : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

121. *Чиркова Л. Н.* Решение оптимизационных задач линейного программирования : учебно-методическое пособие. Киров : Изд-во ВятГУ, 2018. 88 с.

122. *Чупраков Д. В.* Компьютерная алгебра. Алгоритмы теории чисел : учебное пособие. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2012. 152 с.

123. *Чупраков Д. В., Соколова А. Н.* Оформление результатов исследовательской работы студентов в LaTeX : учебное пособие. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2013. 256 с.

124. *Шатров А. В.* Кафедра математического моделирования в экономике Вятского государственного университета // См. [64]. С. 163–168.

125. *Шилова З. В.* Статистические методы обработки результатов научных исследований : учебно-методическое пособие. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2015. 268 с.

126. *Шилова З. В.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие. Saarbrucken : LAMBERT Academic Publishing, 2016. 288 с.

127. *Шилова З. В.* Математические методы в эконометрике : учебное пособие. Киров : Изд-во ВятГУ, 2017. 122 с.

128. *Широков Д. В.* Теория алгоритмов : учебное пособие. Киров : Изд-во ВятГУ, 2017. 164 с.

129. Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 1 / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. 384 с.

130. Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 2 / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2016. 316 с.

The first Department of Mathematics on the Vyatka land

V. I. Varankina[1], E. M. Vechtomov[2]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: veravarankina@gmail.com

[2]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The article considers the activity of the first department of Mathematics of the region in its historical development. The Department of Mathematics was established in 1930 at the Vyatka Pedagogical Institute named after V. I. Lenin; the first head of the department was Professor P. D. Belonovsky. Over the 90 years of its existence, the Department of Mathematics has undergone a number of organizational changes. Currently, it is the Department of Fundamental Mathematics of Vyatka State University as the final successor of the Vyatka Pedagogical Institute. In the middle of the XX century, the department operated postgraduate courses in tetrahedron geometry (headed by Professor N. A. Kolmogorov), in mathematics teaching methods (headed by Professor F. F. Nagibin), in nomography (headed by Associate Professor N. D. Ermilov). Under the leadership of F. F. Nagibin, the scientific and methodological school "Theory and Methods of teaching Mathematical Problem solving" was formed, which at the turn of the XX–XXI centuries was transformed into the "Kirov Scientific and Methodological School for Mathematical Education", headed by the Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor E. M. Vechtomov and Doctor of Pedagogical Sciences, Professor S. I. Kalinin. In 1994, postgraduate course in algebra was opened. The scientific algebraic school "Functional Algebra and the theory of semirings" is being developed. The Department of Fundamental Mathematics is a graduate department in two areas of bachelor's degree, two areas of master's degree and two specialties of postgraduate studies. The bibliography of the article contains 130 sources.

Keywords: Department of Mathematics, mathematics, mathematical education, scientific school, Vyatka State University.

References

1. *Berezanskaya E. S., Nagibin F. F. Uprazhneniya dlya ustnyh zanyatij po algebre dlya 6–7 klassov srednej shkoly : posobie dlya uchitelej* [Exercises for oral classes in algebra for 6–7 classes of secondary school : manual for teachers]. M. Uchpedgiz. 1949. 144 p.

2. *Berezanskaya E. S., Nagibin F. F. Sbornik voprosov i uprazhnenij po algebre i trigonometrii. Dlya 8–10 klassov srednej shkoly : posobie dlya uchitelej. Izd. 2-e* [Collection of questions and exercises in algebra and trigonometry. For 8–10 classes of secondary school : manual for teachers. Ed. 2nd]. M. Uchpedgiz. 1955. 160 p.

3. *Varankina V. I. (compiler). E. M. Vechtomov. Matematik. Pedagog. Filosof : biobibliograficheskij ukazatel'.* [Mathematician. Teacher. The Philosopher : biobibliographic index]. Kirov. Kirov Regional Scientific Library n. a. A. I. Herzen; Vesi, 2018. 288 p. (Scientists of the Vyatka Region; issue 5).

4. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Matematika dlya yuristov. Prakticheskie zanyatiya i kontrol'nye raboty : uchebnoe posobie* [Mathematics for lawyers. Practical classes and control works : textbook]. Kirov. Kirov branch of the Moscow Humanitarian and Economic Institute. 1998. 59 p.

5. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. III Vserossijskaya nauchnaya konferenciya "Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v vuzah i shkolah Rossii"* [III All-Russia Scientific Conference "Problems of modern mathematical education in universities and schools of Russia"] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University. 2004. No. 11. Pp. 206–207.

6. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. K 80-letiyu professora E. S. Kanina* [To the 80th anniversary of Professor E. S. Kanin] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2006. Is. 8. Pp. 6–12.

7. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. XXV Vserossijskij seminar prepodavatelej matematiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* [XXV All-Russian seminar of teachers of mathematics of universities and pedagogical universities] // *Matematika v shkole* – Mathematics at school. 2007. No. 1. Pp. 79–80.

8. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Nauchnaya algebraicheskaya shkola* [Scientific algebraic school] // Hertzenka: Vyatka notes. 2009. Issue 15. Pp. 199–207.

9. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. IV Vserossijskaya nauchno-metodicheskaya konferenciya "Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v vuzah i shkolah Rossii"* [IV All-Russian scientific and Methodological conference "Problems of modern mathematical education in universities and schools of Russia"] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University. 2009. No. 2 (1). Pp. 144–146.

10. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Arkadij Mihajlovich Slobodchikov v nashej zhizni* [Arkady Mikhailovich Slobodchikov in our life] // *Pedagog. Uchenyj. Lichnost'* – Teacher. Scientist. Personality / A.M. Slobodchikov. Kirov. VyatSHU Publishing House. 2011. Pp. 36–38.

11. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Professora-matematiki v istorii matematicheskogo obrazovaniya Vyatskogo kraya* [Professors of mathematics in the history of mathematical education in the Vyatka Region] // *Pedagogicheskie tekhnologii matematicheskogo tvorchestva : sb. statej uchastnikov Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii* – Pedagogical technologies of mathematical creativity : collection of articles of participants of the International Scientific and Practical Conference. Arzamas. AGPI. 2011. Pp. 51–57.

12. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Prepodavateli matematiki Vyatskogo pedagogicheskogo instituta v 20–30-e gody XX veka* [Teachers of mathematics of the Vyatka Pedagogical Institute in the 20–30s of the XX century] // *Sb. materialov VI regional'noj nauchno-prakticheskoj konferencii "Vyatskaya zemlya v proshlom i nastoyashchem"* – Collection of materials of the VI regional scientific and practical conference "Vyatka land in the past and present". Kirov. VyatSHU. 2012. Pp. 260–266.

13. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. V Vserossijskaya nauchno-metodicheskoj konferencii "Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v vuzah i shkolah Rossii"* [V All-Russian scientific and Methodological conference "Problems of modern mathematical education in universities and schools of Russia"] // *Matematika v shkole* – Mathematics at school. 2013. No. 1. Pp. 70–71.

14. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. O kachestve matematicheskogo obrazovaniya* [On the quality of mathematical education] // *Matematika v obrazovanii* – Mathematics in education. 2013. Is. 9. Pp. 148–152.

15. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Evgenij Stepanovich Kanin (1926–2013)* [Yevgeny Stepanovich Kanin (1926–2013)] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2014. Is. 16. Pp. 7–23.

16. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Matematika v Vyatskom gosudarstvennogo universiteta: istoriya i sovremennost'* [Mathematics at the Vyatka State University: history and modernity] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University. 2014. No. 5. Pp. 158–169.

17. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. O kachestve matematicheskogo obrazovaniya* [On the quality of mathematical education] // *Matematika v obrazovanii* – Mathematics in education. 2013. Is. 9. Pp. 148–152.

18. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Professor Fedor Fedorovich Nagibin* [Prof. Fedor Fedorovich Nagibin] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University. 2014. No. 5. Pp. 170–176.

19. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. XXXIII Mezhdunarodnyj nauchnyj seminar prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* [XXXIII International scientific seminar of teachers of mathematics and informatics of universities and pedagogical universities] // *Matematika v shkole* – Mathematics at school. 2015. No. 2. Pp. 61–62.

20. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Razvitie funktsionalnoy algebray v Vyatskom gosudarstvennogo gumanitarnom universiteta* [Development of functional algebra in the Vyatka State Humanitarian University] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University 2015. No. 5. Pp. 137–145.

21. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Pervye magistratury na Vyatskoj zemle* [The first magistracies on the Vyatka land] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University. 2015. No. 11. Pp. 144–149.

22. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Nepreryvnoe matematicheskoe obrazovanie v Kirovskoj oblasti* [Continuous mathematical education in the Kirov region] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2016. Is. 18. Pp. 6–19.

23. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Obuchenie aspirantov napravleniya podgotovki "Matematika i mekhanika"* [Education of postgraduate students of the direction of training "Mathematics and Mechanics"] // *N. I. Lobachevskij i matematicheskoe obrazovanie v Rossii : Materialy Mezhdunarodnogo foruma po matematicheskomu obrazovaniyu, posvyashchennogo 225-letiyu N. I. Lobachevskogo* – N. I. Lobachevsky and mathematical education in Russia : Materials of the International Forum on Mathematical Education dedicated to the 225th anniversary of N. I. Lobachevsky. Kazan. Kazan University. 2017. Vol. 1. Pp. 48–52.

24. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Kirovskaya nauchno-metodicheskaya shkola po matematicheskomu obrazovaniyu* [Kirov Scientific and Methodological School for Mathematical Education] // *3-ya Nacional'naya (Vserossijskaya) nauchnaya konferenciya "Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye tekhnologii" : sb. materialov* – 3rd National (All-Russian) Scientific Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" : collection of materials. Syktyvkar. Syktyvkar State University. 2019. Pp. 52–54.

25. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Kanin E. S. Professor Fedor Nagibin. Skvoz' prizmu vremeni. Seriya: Nauchno-pedagogicheskoe nasledie VyatGGU. T. 1* [Professor Fedor Nagibin. Through the prism of time. Series: Scientific and pedagogical heritage of VyatSHU. Vol. 1]. Kirov. VyatSHU ; Loban. 2014. 316 p.

26. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Lutoshkina I. A. Periodicheskie izdaniya po matematike Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* [Mathematical periodicals of Vyatka State University of Humanities] // See [64]. Pp. 62–66.

27. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Mordkovich A. G. Matematicheskoe obrazovanie v Vyatskom gosudarstvennom gumanitarnom universitete* [Mathematical education is in the Vyatka State Humanitarian University] // *Tendencii i perspektivy razvitiya matematicheskogo obrazovaniya : materialy XXXIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov, posvyashchennoe 100-letiyu VyatGGU* – Trends and prospects for the development of mathematics education : proceedings of the XXXIII International scientific seminar of teachers of mathematics and Informatics universities and pedagogical institutes, dedicated to the 100th anniversary of VyatSHU. Kirov. VyatSHU. Raduga-PRESS. 2014. Pp. 4–18.

28. *Varankina V. I., Kanin E. S. Elementarnye funkcii i ih grafiki : uchebnoe posobie* [Elementary functions and their graphs : textbook]. Kirov. VyatSHU. 2012. 160 p.

29. *Varankina V. I., Kochurova D. V. Nikolaj Andreevich Kolmogorov: matematik i pedagog* [Nikolay Andreevich Kolmogorov: mathematician and teacher] // See [64]. Pp. 209–213.

30. *Varankina V. I., Teben'kova S. V. Professor F. F. Nagibin. Stranicy istorii sovetskogo matematicheskogo obrazovaniya* [Professor F. F. Nagibin. Pages of the History of Soviet Mathematical Education] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University for the Humanities. 2011. No. 3 (2). Pp. 88–95.

31. *Vasenina E. A., Okulov S. M. O fakul'tete informatiki* [About the Faculty of Informatics] // See [64]. Pp. 75–80.

32. *Vasiliyu Vladimirovichu Chermnyh – 50 let* – Vasily Vladimirovich Chermnykh – 50 years old // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of the Vyatka State University for the Humanities. 2013. No. 1 (2). Pp. 166–167.

33. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij na topologicheskih prostranstvah. Izbrannye temy : uchebnoe posobie dlya speckursa* [Rings of continuous functions on topological spaces. Selected topics : textbook for a special course]. Kirov, M. KSPI, MPSU. 1992. 121 p.

34. *Vechtomov E. M. Funkcional'nye predstavleniya kolec : monografiya* [Functional representations of rings : monograph]. Kirov, M. KSPI, MPSU. 1993. 191 p.

35. *Vechtomov E. M. Teoriya reshetok : uchebno-metodicheskaya razrabotka speckursa* [Theory of lattices : educational and methodological development of a special course]. Kirov. KSPI. 1995. 40 p.

36. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca : posobie dlya studentov i aspirantov* [Introduction to semi-rings : manual for students and postgraduates]. Kirov. VyatSPU. 2000. 44 p.

37. *Vechtomov E. M. Algebra v Vyatskom gospeduniversitete* [Algebra at Vyatka State University] // *Sb. materialov V regional'noj nauchno-prakticheskoj konferencii "Vyatskaya zemlya v proshlom i nastoyashchem"* – Collection of materials of the V regional scientific and practical conference "Vyatka land in the past and present". Kirov. VSPU. 2001. Pp. 91–93.

38. *Vechtomov E. M. Ob istorii matematicheskogo obrazovaniya v Vyatskom gosudarstvennom gumanitarnom universitete* [On the history of mathematical education in the Vyatka State Humanitarian University] // *III Vserossijskaya nauchnaya konferenciya "Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v vuzah i shkolah Rossii"* – III All-Russian Scientific Conference "Problems of modern Mathematical Education in universities and schools of Russia". Kirov. VyatSHU. 2004. Pp. 3–8.

39. *Vechtomov E. M. Matematicheskie ocherki : uchebno-metodicheskoe posobie* [Mathematical essays : an educational and methodological manual]. Kirov. VyatSHU. 2004. 215 p.

40. *Vechtomov E. M. Metafizika matematiki : monografiya* [Metaphysics of Mathematics : monograph]. Kirov. VyatSHU. 2006. 508 p.

41. *Vechtomov E. M. 60-ya yubileynaya nauchnaya sessiya VyatGGU* [60th anniversary scientific session of Vyatka State University of Humanities] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of VyatSHU. 2008. No. 2 (1). Pp. 175–176.

42. *Vechtomov E. M. Algebraicheskoe obrazovanie i algebraicheskie issledovaniya v VyatGGU* [Algebraic education and algebraic research in VyatSHU] // *Sb. materialov IV Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii "Problemy matematicheskogo obrazovaniya v vuzah i shkolah Rossii v usloviyah ego modernizacii"* – Collection of materials of the IV All-Russian Scientific and Methodological Conference "Problems of mathematical education in universities and schools of Russia in the conditions of its modernization". Syktyvkar. Syktyvkar State University. 2014. Pp. 148–155.

43. *Vechtomov E. M. Kafedra algebry i diskretnoj matematiki Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta v istoricheskom razvitii* [Department of Algebra and Discrete Mathematics of the Vyatka State Humanitarian University in historical development] // See [64]. Pp. 57–61.

44. *Vechtomov E. M. O nauchno-metodicheskih konferenciyah po razvitiyu matematicheskogo obrazovaniya* [About scientific and methodological conferences on the development of mathematical education] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University for the Humanities. 2014. No. 8. Pp. 160–162.

45. *Vechtomov E. M. Razvitie nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya v regionah* [Development of continuous mathematical education in the regions] // *Materialy V Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Prepodavanie matematiki, fiziki, informatiki v vuzah i shkolah Rossii: problemy soderzhaniya, tekhnologii i metodiki"* – Materials of the V All-Russian scientific and practical conference "Teaching mathematics, physics, informatics in universities and schools of Russia: problems of content, technology and methodology". Glazov. GSPI, Glazovskaya tipografiy. 2015. Pp. 32–37.

46. *Vechtomov E. M. Rezul'taty issledovanij nauchnoj algebraicheskoj shkoly Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta "Funkcional'naya algebra i teoriya polukolec" v 2014–2016 gody* [Results of research of the scientific algebraic school of Vyatka State University "Functional algebra and the theory of semirings" in 2014–2016] // Advanced science. 2017. No. 1, 2. P. l.

47. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie structury : uchebnoe posobie dlya akademicheskogo baccalaureate* [Mathematics: basic mathematical structures : tutorial for academic bachelor's degree program]. 2nd ed. M. Yurayt. 2018. 296 p.

48. *Vechtomov E. M. Filosofiya matematiki : uchebnoe posobie dlya bakalavriata i magistratury* [Philosophy of mathematics : textbook for bachelor's degree program and master studies]. 2nd ed. M. Yurayt. 2018. 317 p.

49. *Vechtomov E. M. Nereshennye problemy rossijskogo matematicheskogo obrazovaniya* [Unsolved problems of Russian mathematical education] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2019. Is. 21. Pp. 25–36.

50. *Vechtomov E. M., Kanin E. S. Matematika v Vyatskom gosudarstvennom gumanitarnom universitetu* [Mathematics in Vyatka State Humanitarian University] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of Volga-Vyatka region. 2004. Is. 6. Pp. 3–20.

51. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Komp'yuternaya geometriya: geometricheskie osnovy komp'yuternoj grafiki : uchebnoe posobie dlya vuzov* [Computer geometry: geometric foundations of computer graphics : textbook for universities]. 2nd ed. M. Yurayt. 2020. 157 p.

52. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnyh V. V. Elementy teorii polukolec : monografiya* [Elements of the theory of semi-rings : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 228 p.

53. *Vechtomov E. M., Matveev V. P. Nachala teorii grupp: metodicheskaya razrabotka* [The beginnings of group theory: methodological development]. Kirov. KSPI n. a. V. I. Lenin. 1990. 64 p.

54. *Vechtomov E. M., Matveev V. P., Sozonova L. V. Elementy logiki i teorii mnozhestv : metodicheskaya razrabotka* [Elements of logic and set theory : methodological development]. Kirov. KSPI n. a. V. I. Lenin. 1988. 70 p.

55. *Vechtomov E. M., Mihalev A. V., Sidorov V. V. Polukol'ca nepreryvnyh funkcij* [Semirings of continuous functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and Applied Mathematics. 2016. Vol. 21. Is. 2. Pp. 53–131.

56. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem : monografiya* [Semirings with idempotent multiplication : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 144 p.

57. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Abstraktnaya algebra. Bazovyj kurs : uchebnoe posobie* [Abstract algebra. Basic course : tutorial]. Kirov. Raduga-PRESS. 2014. 260 p.

58. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Polukol'ca nepreryvnyh funkcij : monografiya* [Semirings of continuous functions : monograph]. Kirov. VyatSU. 2011. 312 p.

59. *Vechtomov E. M., Sozonova L. V. Algebra. Vvodnyj kurs : metodicheskie rekomendacii dlya studentov I kursa matematicheskogo fakul'teta* [Algebra. Introductory course: guidelines for first-year students of the Faculty of Mathematics]. Kirov. KSPI. 1990. 43 p.

60. *Vechtomov E. M., Shirokov D. V. Matematika: logika, mnozhestva, kombinatorika : uchebnoe posobie dlya akademicheskogo bakalavriata. 2-e izd.* [Mathematics: logic, sets, combinatorics : textbook for academic undergraduate studies]. 2nd ed. M. Yurayt. 2018. 243 p.

61. *Vyatskaya zemlya v proshlom i nastoyashchem (k 100-letiyu Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta) : sb. materialov VII Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem* – Vyatka Land in the past and present (to the 100th anniversary of the Vyatka State University for the Humanities) : collection of materials of the VII All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation. Kirov, November 20–21, 2013: in 2 vols. Vol. 1. Kirov. VyatSHU. 2014. 502 p.

62. *Vyatskij gosudarstvennyj gumanitarnyj universitet: 1914–2004* – Vyatka State Humanitarian University: 1914–2004 / Ed. by M. S. Sudovikov. Kirov. VyatSU. 2004. 304 p.

63. *Geometriya. 6 klass : uchebnoe posobie* – Geometry. 6 grade : textbook / A. N. Kolmogorov, F. F. Semenovich, F. F. Nagibin, R. S. Cherkasov. Ed. 7th. M. Prosveshchenie (Enlightment). 1977.

64. *Geometriya. 7 klass : uchebnoe posobie* – Geometry. Grade 7 : textbook / A. N. Kolmogorov, F. F. S., F. F. Nagibin, R. S. Cherkasov. Ed. 6th. M. Prosveshchenie (Enlightment). 1977.

65. *Geometr Yakov Petrovich Ponarin (1934–2008* – Geometr Yakov Petrovich Ponarin (1934–2008) / V. I. Varankina, E. M. Vechtomov, S. I. Rubanov, V. V. Chermnykh // *Polinom (elektronnyj zhurnal)* – Polynomial (electronic journal). 2009. No. 4. Pp. 116–125.

66. *Gorev P. M. Priobshchenie k matematicheskomu tvorchestvu: dopolnitel'noe matematicheskoe obrazovanie* [Introduction to mathematical creativity: additional mathematical education]. Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing. 2012. 156 p.

67. *Gorev P. M., Utemov V. V. Nauchnoe tvorchestvo: Prakticheskoe rukovodstvo po razvitiyu kreativnogo myshleniya* [Scientific creativity: practical guide to the development of creative thinking]. M. LIBROCOM. 2013. 112 p.

68. *Gorev P. M., Utemov V. V. Uroki razvivayushchej matematiki. 5–6 klassy: Zadachi matematicheskogo kruzhka* [Lessons of developing mathematics. Grades 5-6: Problems of the mathematical circle]. Kirov. ICITO. 2014. 207 p.

69. *Evgeniyu Mihajlovichu Vechtomovu – 60 let* – Yevgeny Mikhailovich Vechtomov – 60 years old // *Matematika v shkole* – Mathematics at school. 2013. No. 6. P. 78.

70. *Zadachi i uprazhneniya po nachalam matematicheskogo analiza : posobie dlya uchashchihsya shkol i klassov s uglublennym izucheniem matematiki i dlya vneklassnyh zanyatij matematikoj* – Tasks and exercises on the principles of mathematical analysis: a manual for students of schools and classes with in-depth study of mathematics and for extracurricular classes in mathematics / S. I. Kalinin, E. S. Kanin, G. M. Mayanskaya [etc.]. 2nd ed. M. Moscow Lyceum. 2001. 208 p.

71. *Zelenina N. A., Krutihina M. V., Starostina O. V. Matematika : uchebnoe posobie* [Mathematics : textbook]. Kirov. VyatSU. 2018. 192 p.

72. *Inomistov V. Yu. Kafedra prikladnoj matematiki i informatiki VyatGU: vchera, segodnya i zavtra* [Department of Applied Mathematics and Informatics of VyatSU: yesterday, today and tomorrow] // See [64]. Pp. 169–173.

73. *Kalinin S. I. Srednie velichiny stepennogo tipa. Neravenstva Koshi i Ki Fana : uchebnoe posobie po speckursu* [Average values of the power type. Cauchy and Ki-Fan inequalities : textbook for a special course]. Kirov. VSHU. 2002. 368 p.

74. *Kalinin S. I. Obuchenie studentov matematicheskomu analizu v usloviyah fundamentalizacii vysshego pedagogicheskogo obrazovaniya : monografiya* [Teaching students mathematical analysis in the conditions of fundamentalization of higher pedagogical education : monograph]. Kirov. VyatSHU. 2008. 353 p.

75. *Kalinin S. I. Metod neravenstv resheniya uravnenij : uchebnoe posobie po elektivnomu kursu dlya klassov fiziko-matematicheskogo profilya* [The method of inequalities for solving equations : textbook on the elective course for classes of physical and mathematical profile]. M. Moscow Lyceum. 2013. 112 p.

76. *Kalinin S. I. O studencheskom nauchno-issledovatel'skom seminare po matematicheskomu analizu v VyatGGU* [About the student research seminar on mathematical analysis at Vyatka State University] // See [64]. Pp. 67–75.

77. *Kalinin S. I. Studencheskie issledovaniya po matematicheskomu analizu v VyatGGU* [Student studies on mathematical analysis at Vyatka State University] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University for the Humanities. 2015. No. 6. Pp. 147–153.

78. *Kalinin S. I., Pankratova L. V. Obyknovennye differencial'nye uravneniya pervogo poryadka : uchebnoe posobie* [Ordinary differential equations of the first order : textbook]. Krasnoyarsk. Scientific and Innovative Center. 2020. 114 p. (Electronic edition).

79. *Kalinin S. I., Yastrebov A. V. Izbrannye voprosy matematicheskogo analiza i metodiki ego prepodavaniya: deyatel'nostnyj aspekt : monografiya* [Selected questions of mathematical analysis and methods of its teaching: activity aspect : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 260 p.

80. Kanin E. S. [F. F. Nagibin (to the 60th anniversary of his birth)] // Mathematics at School. 1969. No. 1. P. 85.

81. *Kanin E. S. Nauchno-metodicheskaya shkola prof. F. F. Nagibina "Teoriya i metodika obucheniya resheniyu matematicheskikh zadach"* [Scientific and methodological school of Professor F. F. Nagibin "Theory and methodology of teaching to solve mathematical problems"] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region 2009. Is. 11. Pp. 18–27.

82. *Kanin E. S. Graficheskie metody v matematicheskom analize i algebre: uchebnoe posobie* [Graphic methods in mathematical analysis and algebra : textbook] / Under the general editorship of E. M. Vechtomov. Kirov. VyatSHU. 2016. 160 p.

83. *Kanin E. S., Kanina E. M., Chernyavskij M. D. Uprazhneniya po nachalam matematicheskogo analiza v 9–10 klassah : kniga dlya uchitelya* [Exercises on the basis of mathematical analysis in grades 9–10 : teacher's book]. M. Prosveshchenie (Enlightment). 1986. 160 p.

84. *Kanin E. S., Nagibin F. F. Uchebnye matematicheskie zadachi : uchebnoe posobie* [Learning math tasks : tutorial]. Kirov. KSPI. 1980. 94 p.

85. *Kolmogorov N. A., Nagibin F. F., Chudinovskih V. V. Sbornik zadach dlya podgotovki uchashchihsya srednih shkol k matematicheskim olimpiadam* [Collection of problems for the preparation of secondary school students for mathematical Olympiads]. Kirov. Volgo-Vyatka Publishing House. 1968. 136 p.

86. *Lubyagina E. N., Vechtomov E. M. Linejnaya algebra : uchebnoe posobie dlya vuzov* [Linear algebra : textbook for universities]. 2nd ed. M. Yurayt. 2019. 150 p.

87. *Matematika i komp'yuternoe modelirovanie v issledovaniyah studentov i shkol'nikov : materialy Vserossijskoj molodezhnoj nauchno-prakticheskoj konferencii (14–15 maya 2013 g.)* – Mathematics and computer modeling in the research of students and schoolchildren: materials of the All-Russian Youth Scientific and Practical Conference (May 14–15, 2013). Kirov. VyatSHU. 2013.

88. *Matematike nado sluzhit' (Sergeyu Ivanovichu Kalininu – 60 let)* – Mathematics must be served (Sergey Ivanovich Kalinin – 60 years old) // Herald of the Vyatka State University for the Humanities. 2013. No. 1 (1). P. 184.

89. *Matematicheskij vestnik universitetov i pedvuzov Volgo-Vyatskogo regiona: periodicheskij mezhvuzovskij sbornik nauchno-metodicheskih rabot* – Mathematical herald of universities and pedagogical universities of the Volga-Vyatka region: periodic interuniversity collection of scientific and methodological works / Ed. by E. M. Vechtomov. Kirov. VSPU Publishing House, VyatSHU. 1998-2019. Releases: 1 (1998), 2 (2000), 3 (2001), 4 (2002), 5 (2003), 6 (2004), 7 (2005), 8 (2006), 9 (2007), 10 (2008), 11 (2009), 12 (2010), 13 (2011), 14 (2012), 15 (2013), 16 (2014), 17 (2015), 18 (2016), 19 (2017), 20 (2018), 21 (2019).

90. *Navrozov V. V., Ryattel' A. V. Istoriya vozniknoveniya i razvitiya kafedry matematiki Vyatskoj gosudarstvennoj sel'skohozyajstvennoj akademii* [History of the origin and development of the Department of Mathematics of the Vyatka State Agricultural Academy] // See [64]. Pp. 173–178.

91. *Nagibin F. F. Matematicheskaya shkatulka* [Mathematical box]. M. Uchpedgiz, 1958. 166 p.

92. *Nagibin F. F. Ekstremumy : posobie dlya uchashchihsya starshih klassov* [Extrema : manual for high school students]. M. Prosveshchenie (Enlightment). 1966. 120 p.

93. *Nagibin F. F., Kanin E. S. Matematicheskaya shkatulka. Pererabotannoe i dopolnennoe izdanie* [Mathematical box. Revised and expanded edition]. M. Drofa (Bustard). 2006. 271 p.

94. *Okulov S. M. Diskretnaya matematika. Teoriya i praktika resheniya zadach po informatike : uchebnoe posobie* [Discrete mathematics. Theory and practice of solving problems in computer science : textbook]. 2nd ed. M. Binom. Laboratory of Knowledge. 2012. 425 p.

95. *Okulov S. M., Lyalin A. V. Hanojskie bashni : uchebnoe posobie* [Hanoi towers : textbook]. 2nd ed., M. Binom. Laboratory of Knowledge. 2015. 248 p.

96. *Okulov S. M., Razova E. V., Lyalin A. V. Algoritmy komp'yuternoj arifmetiki : uchebnoe posobie* [Algorithms of computer arithmetic : textbook]. 2nd ed., M. Binom. Laboratory of Knowledge, 2021. 285 p.

97. *Onegov V. A. K istorii obrazovaniya kafedry prikladnoj matematiki* [On the history of education of the Department of Applied Mathematics] // See [64]. Pp. 190–195.

98. *Pankratova L. V. Chislovye ryady : uchebnoe posobie* [Numerical series : textboo. Krasnoyarsk. Scientific and Innovative Center. 2020. 100 p. (Electronic edition).

99. *Podgornaya I. I. Uroki matematiki : uchebnoe posobie dlya postupayushchih v vuzy* [Mathematics lessons : textbook for students entering higher education institutions]. M. Moscow Lyceum. 2006. 692 p.

100. *Podlevskih M. N., Shilova Z. V. Matematicheskoe modelirovanie : uchebnoe posobie* [Mathematical modeling : textbook]. Kirov. VyatSU. 2020. 140 p.

101. *Ponarin Ya. P. Geometriya. 7–11 klassy : uchebnoe posobie dlya shkol, liceev, kolledzhej* [Geometry. Grades 7–11 : textbook for schools, lyceums, colleges]. Rostov-na-Donu. Phenix. 1997. 512 p.

102. *Ponarin Ya. P. Algebra kompleksnyh chisel v geometricheskih zadachah* [Algebra of complex numbers in geometric problems]. 2nd ed. M. Moscow Center for Continuing Mathematical Education. 2014. 160 p.

103. *Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya: uchebnoe posobie : v 3 t. T. 1. Planimetriya, preobrazovaniya ploskosti. 4-e izd.* [Elementary geometry: textbook : in 3 vols. Vol. 1. Planimetry, plane transformations. 4th ed.] M. Moscow Center for Continuing Mathematical Education. 2018. 312 p.

104. *Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya: uchebnoe posobie : v 3 t. T. 2. Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva. 3-e izd.* [Elementary geometry: textbook : in 3 vols. Vol. 2. Stereometry, space transformations. 3rd ed.] M. Moscow Center for Continuing Mathematical Education. 2015. 256 p.

105. *Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya : uchebnoe posobie : v 3 t. T. 3. Treugol'niki i tetraedry. 2-e izd.* [Elementary geometry: textbook : in 3 vols. Vol. 3. Triangles and tetrahedra. 2nd ed.] M. Moscow Center for Continuing Mathematical Education. 2015. 192 p.

106. *Ponarin Ya. P. Affinnaya i proektivnaya geometriya* [Affine and projective geometry]. M. Moscow Center for Continuing Mathematical Education. 2009. 288 p.

107. *Ponarin Ya. P., Skopec Z. A. Peremeshcheniya i podobiya ploskosti* [Displacement and similarity of the plane]. Kiev. Radyansk School. 1981. 173 p.

108. *Prepodavateli VyatGU* – Teachers of Vyatka State University. Kirov. VyatSU. 2004. 208 p.

109. *Problemy podgotovki uchitelya matematiki k prepodavaniyu v profil'nyh klassah : materialy XXV Vserossijskogo seminara prepodavatelej matematiki universitetov i pedagogicheskih vuzov (20–22 sentyabrya 2006 g.)* – Problems of preparation of the teacher of mathematics for teaching in specialized classes : materials of the XXV All-Russian seminar of teachers of mathematics of universities and pedagogical universities (September 20–22, 2006). Kirov, M. VyatSHU, MSPU. 2006. 300 p. (Published with the financial support of the RGNF, project No. 06-06-14066).

110. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii : tezisy dokladov mezhregional'noj nauchnoj konferencii (19–20 maya 1998 g.* – Problems of modern mathematical education in pedagogical universities and schools of Russia : abstracts of reports of the interregional Scientific Conference (May 19–20, 1998). Kirov. Vyatka State University. 1998. 248 p.

111. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii : tezisy dokladov II mezhregional'noj nauchnoj konferencii (9–10 aprelya 2001 g.)* – Problems of modern mathematical education in pedagogical universities and schools of Russia : abstracts of the II Interregional Scientific Conference (April 9–10, 2001). Kirov. Vyatka State University. 2001. 195 p.

112. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii : tezisy dokladov III Vserossijskoj nauchnoj konferencii (12–14 maya 2004 g.)* – Problems of modern mathematical education in pedagogical universities and schools in Russia : abstracts of the III all-Russian scientific conference (12–14 may 2004). Kirov. VyatSHU. 2004. 166 p.

113. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii : materialy IV Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii, posvyashchennoj 100-letiyu so dnya rozhdeniya professora F. F. Nagibina (14–16 maya 2009 g.)* – Problems of modern mathematical education in pedagogical universities and schools in Russia : materials of the IV all-Russian scientific-methodical conference dedicated to the 100 anniversary of the birth of Professor F. F. Nagibina (14–16 may 2009). Kirov. VyatSHU. 2009. 172 p.

114. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii: Interaktivnye formy obucheniya matematike studentov i shkol'nikov : materialy V Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii (10–12 maya 2012 g.)* – Problems of modern mathematical education in pedagogical universities and schools in Russia: Interactive forms of teaching mathematics to students and schoolchildren : materials of the V All-Russian Scientific and Methodological Conference (May 10–12, 2012). Kirov. VyatSHU. 2012. 348 p. (Published with the financial support of the RGNF, project No. 12-16-43501g)

115. *Rektory VyatGGU* – Rectors of VyatSHU. Kirov. VyatSHU. 2014. 192 p.

116. *Tendencii i perspektivy razvitiya matematicheskogo obrazovaniya : materialy XXXIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov, posvyashchennogo 100-letiyu VyatGGU (25–27 sentyabrya 2014 g.)* – Trends and prospects for the development of mathematical education : materials of the XXXIII International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Informatics of universities and pedagogical universities, dedicated to the 100th anniversary of VyatSHU (September 25–27, 2014). Kirov. VyatSHU, Raduga-PRESS. 2014. 392 p.

117. *Sbornik zadach i voprosov po geometrii: posobie dlya uchitelej srednej shkoly* – Collection of problems and questions on geometry: manual for secondary school teachers / E. S. Berezanskaya, N. A. Kolmogorov, F. F. Nagibin, R. S. Cherkasov. Ed. 2-E. M. Uchpedgiz. 1962. 208 p.

118. *Sidorov V. V. Algebra: algebraicheskie struktury, kompleksnye chisla, mnogochleny : uchebnoe posobie* [Algebra: algebraic structures, complex numbers, polynomials : textbook]. Kirov. Raduga-PRESS. 2013. 232 p.

119. *Sidorov V. V. Studencheskie matematicheskie olimpiady goroda Kirova : uchebnoe posobie* [Student mathematical olympiads of the city of Kirov : textbook]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 96 p.

120. *Chermnyh V. V. Funkcional'nye predstavleniya polukolec : monografiya* [Functional representations of semirings : monograph]. Kirov. VyatSHU. 2010. 224 p.

121. *Chirkova L. N. Reshenie optimizacionnyh zadach linejnogo programmirovaniya : uchebno-metodicheskoe posobie* [Solving optimization problems of linear programming : educational and methodological manual]. Kirov. VyatSU. 2018. 88 p.

122. *Chuprakov D. V. Komp'yuternaya algebra. Algoritmy teorii chisel : uchebnoe posobie* [Computer algebra. Algorithms of number theory : textbook]. Kirov. VyatSHU. 2012. 152 p.

123. *Chuprakov D. V., Sokolova A. N. Oformlenie rezul'tatov issledovatel'skoj raboty studentov v LaTeX : uchebnoe posobie* [Formalization of the results of students' research work in LaTeX : textbook]. Kirov. Raduga-PRESS. 2013. 256 p.

124. *Shatrov A. V. Kafedra matematicheskogo modelirovaniya v ekonomike Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Department of Mathematical Modeling in Economics of Vyatka State University] // See [64]. Pp. 163–168.

125. *Shilova Z. V. Statisticheskie metody obrabotki rezul'tatov nauchnyh issledovanij : uchebno-metodicheskoe posobie* [Statistical methods of processing the results of scientific research : educational and methodological manual]. Kirov. VyatSHU. 2015. 268 p.

126. *Shilova Z. V. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika : uchebnoe posobie* [Probability theory and mathematical statistics : textbook]. Saarbrucken. LAMBERT Academic Publishing. 2016. 288 p.

127. *Shilova Z. V. Matematicheskie metody v ekonometrike : uchebnoe posobie* [Mathematical methods in econometrics : textbook]. Kirov. VyatSU. 2017. 122 p.

128. *Shirokov D. V. Teoriya algoritmov : uchebnoe posobie* [Theory of algorithms : textbook]. Kirov. VyatSU. 2017. 164 p.

129. *Elementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 1* – Elements of functional algebra : monograph : in 2 vols. Vol. 1 / E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 384 p.

130. *Elementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 2* – Elements of functional algebra: monograph : in 2 vols. Vol. 2 / E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 316 p.

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 1 (20) (2021)

16+

Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964