УДК 517.54 DOI 10.25730/VSU.0536.21.002

Различные свойства выпуклых функций в решении одной задачи

Л. В. Панкратова[1], Н. С. Протасов[2]
[1]кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru
[2]студент 5 курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профили Математика, Информатика), Вятский государственный университет. Россия, г. Киров

Аннотация. Понятие выпуклой функции является одним из фундаментальных понятий не только математического анализа, но и ряда смежных с ним дисциплин, таких как экономика, теория управления и оптимизации и др. Это обусловливает активное развитие тематики выпуклых функций и устойчивый интерес к ней со стороны исследователей. Целью представляемой статьи является систематизация известных свойств выпуклых функций как образовательного ресурса. В данном контексте авторами рассмотрена задача, опубликованная в журнале «Crux Mathematicorum», и проанализированы способы ее решения, восходящие к использованию неравенств Эрмита – Адамара и Караматы, а также геометрической характеризации графика выпуклой функции. Кроме того, в статье сформулировано обобщение обсуждаемой задачи, осмыслен ее образовательный потенциал.

Ключевые слова: выпуклая функция, неравенство Караматы, неравенства Эрмита – Адамара.

Некоторое время назад наше внимание привлекла задача, опубликованная в журнале «Crux Mathematicorum» [4]. Приведем ее формулировку.

*Пусть f: [0, 11] → **R** – интегрируемая и выпуклая функция. Доказать, что* $\int_3^5 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx \le \int_0^2 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx$.

Заметим, что формулировка задачи лаконична, но при этом восходит к классическим понятиям анализа, таким как выпуклость функции и интегрируемость функции по Риману. В данном контексте решение предложенной задачи может исходить из различных свойств выпуклых функций, что позволяет использовать ее в качестве методической составляющей при обучении студентов математическому анализу.

Перейдем к обсуждению способов решения задачи. Остановимся вначале на тех, что были присланы читателями журнала «Crux Mathematicorum» и опубликованы в [5].

Р е ш е н и е 1. Пусть линейная функция $g(x)=ax+b$ такова, что $g(3)=f(3)$ и $g(8)=f(8)$. Поскольку $f(x)$ выпукла, то

$$f(x)\ge g(x),\ \text{если}\ 0\le x\le 3\ \text{или}\ 8\le x\le 11,$$

и

$$f(x)\le g(x),\ \text{если}\ 3\le x\le 8.$$

Тогда левая часть доказываемого неравенства оценится сверху так:

$$\int_3^5 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx \le \int_3^5 g(x)dx+\int_6^8 g(x)dx = 22a+4b.$$

В то же время его правая часть $\int_0^2 f(x)dx+\int_9^{11} f(x)dx$ будет не меньше, чем

$$\int_0^2 g(x)dx+\int_9^{11} g(x)dx = 22a+4b.$$

Неравенство установлено.

З а м е ч а н и е 1. Напрашивается предположение, что представленный способ решения не случайно помещен редакцией «Crux Mathematicorum» первым. Свойство продолжения хорды графика выпуклой функции, не проходящей через его концы, используется довольно редко. Однако здесь его применение естественно и понятно.

З а м е ч а н и е 2. Осмысление представленного решения позволяет подобрать и другие линейные функции $g(x)=ax+b$, обеспечивающие результат задачи. К примеру, $g(x)$ может проходить через точки $(2;\ f(2))$ и $(9;\ f(9))$.

Р е ш е н и е 2. Напомним, что функция $f: l \to \mathbf{R}$ называется *выпуклой* на промежутке *l* числовой прямой *Ox*, если для любых чисел *a* и *b* из *l* и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

По условию задачи функция $f(x)$ выпукла, значит,

$$f(3+x) \le \frac{2}{3}f(x)+\frac{1}{3}f(9+x)$$

и

$$f(6+x) \le \frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}f(9+x).$$

Следовательно,

$$\int_3^5 f(x)\,dx+\int_6^8 f(x)\,dx=\int_0^2 \big(f(3+x)+f(6+x)\big)\,dx \le$$

$$\le \int_0^2 \big(f(x)+f(9+x)\big)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_9^{11} f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 3. Как указано в [5], большинство читателей, представивших свои решения обсуждаемой задачи, придерживались именно этого подхода.

Р е ш е н и е 3. Применим неравенство Эрмита – Адамара (см., напр., [2]) для выпуклой на отрезке [*a*; *b*] функции:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Будем иметь:

$$\int_3^5 f(x)\,dx \le f(3)+f(5) \le$$

$$\le \left(\frac{7}{9}f(1)+\frac{2}{9}f(10)\right)+\left(\frac{5}{9}f(1)+\frac{4}{9}f(10)\right)=\frac{4}{3}f(1)+\frac{2}{3}f(10).$$

Здесь мы вновь воспользовались определением выпуклой функции, исходя из которого

$$f(3)=f\left(\frac{7}{9}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot 10\right) \le \frac{7}{9}f(1)+\frac{2}{9}f(10)$$

и

$$f(5)=f\left(\frac{5}{9}\cdot 1+\frac{4}{9}\cdot 10\right) \le \frac{5}{9}f(1)+\frac{4}{9}f(10).$$

Аналогично получим, что $\int_6^8 f(x)\,dx \le f(6)+f(8) \le \frac{2}{3}f(1)+\frac{4}{3}f(10)$.

Итак,

$$\int_3^5 f(x)\,dx+\int_6^8 f(x)\,dx \le 2f(1)+2f(10)=$$

$$=2f\left(\frac{0+2}{2}\right)+2f\left(\frac{9+11}{2}\right)\le\int_0^2 f(x)\,dx+\int_9^{11} f(x)\,dx.$$

Неравенство доказано.

Мы рассмотрели все способы решения, опубликованные в [5]. Перейдем теперь к изложению подходов, найденных нами.

Р е ш е н и е 4. Применяя подстановку $x=t+\dfrac{a+b}{2}$, будем иметь:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(t+\frac{a+b}{2}\right)dt$$

В таком случае

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(1+t)dt,\ \int_3^5 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(4+t)dt,$$

$$\int_6^8 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(7+t)dt,\ \int_9^{11} f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(10+t)dt.$$

Заметим теперь, что для доказательства обсуждаемого неравенства достаточно показать, что если функция f выпукла на отрезке [–1; 1], то

$$f(4+t)+f(7+t)\le f(1+t)+f(10+t). \qquad (1)$$

Установим (1). Воспользуемся для этого простейшим неравенством Караматы (см., напр., [3]), положив

$$u=1+t,\ u_1=4+t,\ v_1=7+t,\ v=10+t.$$

Очевидно, что $u<u_1\le v_1<v$ и $u+v=u_1+v_1$. Отсюда немедленно следует (1).

З а м е ч а н и е 4. Доказать (1) можно и посредством обращения к определению выпуклой функции:

$$f(4+t)+f(7+t)=f\left(\frac{2}{3}(1+t)+\frac{1}{3}(10+t)\right)+f\left(\frac{1}{3}(1+t)+\frac{2}{3}(10+t)\right)\le$$

$$\le\frac{2}{3}f(1+t)+\frac{1}{3}f(10+t)+\frac{1}{3}f(1+t)+\frac{2}{3}f(10+t)=f(1+t)+f(10+t).$$

Собственно, обоснование простейшего неравенства Караматы производится по аналогичной схеме.

Р е ш е н и е 5. Очередной подход реализуем с опорой на утверждение, нередко называемое леммой о трех хордах (см., напр., [1, с. 165]).

Л е м м а. *Пусть функция f выпукла на промежутке l, $x_1,x_2,x_3\in l$, $x_1<x_2<x_3$. Тогда*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \qquad (2)$$

Применим данную лемму к решению нашей задачи. Положим сначала $x_1=1+t$, $x_2=4+t$, $x_3=7+t$. Из (2) следует:

$$f(4+t)-f(1+t)\le f(7+t)-f(4+t). \qquad (3)$$

Пусть теперь $x_1=4+t$, $x_2=7+t$, $x_3=10+t$. Для них применение (2) влечет следующее неравенство:

$$f(7+t)-f(4+t)\le f(10+t)-f(7+t). \qquad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем (1). Требуемое установлено.

З а м е ч а н и е 5. Здесь мы продемонстрировали одно из применений леммы о трех хордах, выбрав подходящие значения x_1, x_2, x_3 и используя неравенство $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, вытекающее из (2). Однако использовать данную лемму при реализации решения можно иначе.

Обсуждение последних способов решения задачи, апеллирующих к неравенству Караматы, позволило сформулировать обобщение исследуемой задачи.

Напомним читателю (см., напр., [3, с. 43]) общее неравенство Караматы. Пусть $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – два упорядоченных набора действительных чисел ($a_i \ge a_{i+1}, b_i \ge b_{i+1}$ для $i=1,2,\ldots,n-1$). Тогда *a* мажорирует *b* (пишут $a \succ b$), если

$$\begin{cases} a_1 \ge b_1, \\ a_1+a_2 \ge b_1+b_2, \\ \ldots \\ a_1+a_2+\ldots+a_{n-1} \ge b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}, \\ a_1+a_2+\ldots+a_n = b_1+b_2+\ldots+b_n. \end{cases}$$

Справедлива

Т е о р е м а [3, с. 43]. Для любой выпуклой функции $f(x)$, определенной на промежутке *I*, и любых двух наборов чисел $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из этого промежутка, удовлетворяющих условию $a \succ b$, справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f(b_i)$, называемое неравенством Караматы.

Представим теперь обобщение обсуждаемой задачи, анонсированное ранее.

Пусть функция $f(x)$ *выпукла и интегрируема на некотором отрезке* $[A;B]$ *числовой прямой, а наборы чисел* $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *и* $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *из этого отрезка удовлетворят условию* $a \succ b$. *Для* $\Delta > 0$, *такого, что* $a_1 + \Delta \le B$, *докажите неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+\Delta} f(x)\,dx \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{b_i}^{b_i+\Delta} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Р е ш е н и е. По аналогии с приемом, продемонстрированным в решении 4, воспользуемся подстановками $x = t + a_i + \frac{\Delta}{2}$ и $x = t + b_i + \frac{\Delta}{2}$ соответственно, где $i=1,\ldots,n$. Будем иметь:

$$\int_{a_i}^{a_i+\Delta} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t + a_i + \frac{\Delta}{2}\right)dt, \quad \int_{b_i}^{b_i+\Delta} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t + b_i + \frac{\Delta}{2}\right)dt.$$

Тогда (5) эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t + a_i + \frac{\Delta}{2}\right)dt \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f\left(t + b_i + \frac{\Delta}{2}\right)dt. \tag{6}$$

В силу того что $\Delta > 0$, для доказательства (6) достаточно установить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(t + a_i + \frac{\Delta}{2}\right) \ge \sum_{i=1}^{n} f\left(t + b_i + \frac{\Delta}{2}\right),$$

которое немедленно вытекает из неравенства Караматы в силу условия $a \succ b$.

В заключение отметим, что работа с обсуждаемой задачей оказалась полезной по нескольким причинам. Во-первых, при ее решении удалось систематизировать широкий спектр утверждений, справедливых для выпуклых функций. Среди них неравенства Караматы и Эрмита – Адамара, лемма о трех хордах, геометрическая характеризация графика выпуклой функции. Во-вторых, анализ представленных решений позволил оценить возможности модификации решений в рамках изложенных схем. В таком контексте данная задача становится упражнением для отработки навыка взаимодействия с выпуклыми функциями. Кроме того, удалось сформулировать обобщение задачи.

Список литературы

1. *Виноградов О. Л.* Математический анализ : учебник. СПб. : БХВ-Петербург, 2017. 752 с.

2. *Калинин С. И., Панкратова Л. В.* Неравенства Эрмита – Адамара: образовательно-исторический аспект // Математическое образование, 2018. № 3 (87). С. 17–31.

3. *Номировский Д. А.* Неравенство Караматы // Квант. 2000. № 4. С. 43–45.

4. Crux Mathematicorum. Vol. 44 (2). February 2018. P. 70, problem 4316. URL: https://cms.math.ca/crux/v44/n2/Problems_44_2.pdf.

5. Crux Mathematicorum. Vol. 45 (2). February 2019. Pp. 96–97. URL: https://cms.math.ca/crux/v45/n2/Solutions_45_2.pdf.

Various properties of convex functions in solving a single problem

L. V. Pankratova[1], N. S. Protasov[2]

[1]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

[2]student of the 5th year of the direction of training 44.03.05 Pedagogical education (profiles Mathematics, Computer Science), Vyatka State University. Russia, Kirov

Abstract. The concept of a convex function is one of the fundamental concepts not only of mathematical analysis, but also of a number of related disciplines, such as economics, control and optimization theory, etc. This leads to the active development of the topic of convex functions and a steady interest in it on the part of researchers. The purpose of this article is to systematize the known properties of convex functions as an educational resource. In this context, the authors consider the problem published in the journal "Crux Mathematicorum" and analyze the ways of its solution, which go back to the use of the Hermite – Hadamard and Karamata inequalities, as well as the geometric characterization of the graph of a convex function. In addition, the article summarizes the problem under discussion, and its educational potential is understood.

Keywords: convex function, Karamata inequality, Hermite – Hadamard inequalities.

References

1. *Vinogradov O. L. Matematicheskij analiz : uchebnik* [Mathematical analysis : textbook]. SPb. BHV-Petersburg. 2017. 752 p.

2. *Kalinin S. I., Pankratova L. V. Neravenstva Ermita – Adamara: obrazovatel'no-istoricheskij aspekt* [Hermite – Hadamard inequalities: educational and historical aspect] // *Matematicheskoe obrazovanie* – Mathematical education. 2018. No. 3 (87). Pp. 17–31.

3. *Nomirovskij D. A. Neravenstvo Karamaty* [Karamata inequality] // *Kvant* – Kvant. 2000. No. 4. Pp. 43–45.

4. Crux Mathematicorum. Vol. 44 (2). February 2018. P. 70, problem 4316. Available at: https://cms.math.ca/crux/v44/n2/Problems_44_2.pdf.

5. Crux Mathematicorum. Vol. 45 (2). February 2019. Pp. 96–97. Available at: https://cms.math.ca/crux/v45/n2/Solutions_45_2.pdf.