УДК 372.851 DOI 10.25730/VSU.0536.21.005

Роль математики в формировании нелинейного мышления у школьников и студентов

В. А. Тестов
доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и информатики,
Вологодский государственный университет. Россия, г. Вологда.
ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация. В статье рассматривается трансдисциплинарная тенденция в содержании современного образования, выводящая синтез знаний на более высокий уровень, чем междисциплинарный. Благодаря этой тенденции появляются такие новые трансдисциплинарные области, как искусственный интеллект, большие данные и другие.

Показывается, что в основе этой тенденции лежит процесс математизации знаний. Кроме того, в силу креативности методов, используемых при изучении математики, эта дисциплина становится основой формирования креативного потенциала личности. В статье рассматривается формирование у школьников и студентов нелинейного мышления через изучение в математических курсах нелинейных порядковых структур (решеток, булевых алгебр и т. д.).

Приводятся также элементы специального курса, разработанного автором, по теории упорядоченных группоидов, в том числе ряд фактов, связанных с обобщением основной теоремы арифметики для риссово упорядоченных группоидов и невозможностью распространить эту теорему на направленные группоиды.

Ключевые слова: трансдисциплинарность образования, математизация наук, цифровая трансформация, порядковые структуры.

В настоящее время в науке и образовании преобладающей тенденцией становится более глубокий, чем междисциплинарный, синтез знания, выходящий на новый, более высокий уровень познания, который Жан Пиаже предложил назвать *трансдисциплинарным*. Трансдисциплинарность предполагает возникновение научных систем, находящихся над конкретными дисциплинами сверху, над дисциплинарным делением научного знания. В основе происходящих изменений лежит процесс математизации наук, который привел к возникновению таких наддисциплинарных научных систем, как кибернетика, теория информации, теория катастроф, синергетика и др. В современную цифровую эру появляются такие трансдисциплинарные области: искусственный интеллект, Big Data и др., которые отличает игнорирование междисциплинарных границ. Появились и новые трансдисциплинарные категории, к которым можно отнести понятия модели, операции, отношения, изоморфизма, алгоритма и ряд других, возникшие первоначально в математике, а затем распространившиеся и на другие науки [11].

Современная математика играет ведущую роль в цифровой революции. Сравнение роли математики и компьютера привел В. А. Садовничий: «Если за 20 лет (с 1992 по 2012) скорость компьютеров увеличилась примерно в 8 тысяч раз, то за счет развития математических методов скорость расчетов увеличилась более чем в 400 тысяч раз… Но самое лучшее, конечно, – это соединение прогресса математики и компьютеров» [6, с. 9].

В результате развития кибернетики, математического моделирования, компьютеров, а позднее и системы Интернета возник новый стиль научного мышления. Этот стиль стал основой системного осмысления методологии моделирования как новой исследовательской культуры с использованием уникальных возможностей математики и компьютеров [5].

Однако следует заметить, что продолжающиеся попытки сформировать у студентов большое количество различных компетенций вызывают неоправданное «размельчение» сетки учебных предметов в вузе и способствуют закреплению дисциплинарных различий, что приводит к фрагментарному видению реальности у студентов, к затруднению решения главной задачи вузов – фундаментальной подготовки выпускников, осознавших необходимость учиться «всю жизнь» и имеющих возможность менять профиль своей профессиональной деятельности.

Поэтому можно только приветствовать распространение трансдисциплинарного тренда и в образование. Трансдисциплинарность образования помогает человеку ориентироваться в современном мире, приобретать умение интегрировать знания из различных дисциплин, а главное – умение нестандартно и логически мыслить, что является основой креативного потенциала личности.

© Тестов В. А., 2021

Важнейшее место в такой системе образования должно принадлежать математике. Роль математики в образовании и науке была велика во все времена. В цифровую эру она стала многоплановой, все в большей степени происходит использование математических идей и методов в различных научных областях. Как отмечалось на состоявшемся в Москве Международном научном семинаре преподавателей математики и информатики (1–2 октября 2020 года), «в силу креативности методов, используемых при познании человеком математики и формировании способностей к ее применению, эта область научного знания является приоритетной в решении задачи формирования ключевых компетенций цифровой экономики» [4, с. 110].

Процесс цифровой трансформации науки и образования, осуществляемый на основе математики, способствует трансформации и человеческого мышления, его компетенций, наиболее важных в цифровую эпоху. Математика во все времена служила признанным средством развития различных видов мышления. Многие ученые уже давно писали о развитии логического мышления с помощью математики. Позднее были введены понятия о таких видах мышления, как алгоритмическое, комбинаторное, функциональное, образно-геометрическое (визуальное) и рассмотрены способы их развития при обучении математике [7]. Указанные виды мышления играют большую роль как в обучении математике, так и в математическом творчестве.

Психологи выделяют свои типы мышления. Во всех креативных типах мышления одним из главных компонентов является нелинейность мышления, которая, как установлено психологами, легче всего развивается у детей, поскольку в их мышлении еще не укоренились упрощенные шаблоны мышления, особенно линейного, к которым они привыкают в процессе обучения.

Обычно прогнозы на будущее, как правило, строятся на основе линейной экстраполяции происходящего сейчас или в недавнем прошлом. Но большинство реальных явлений и процессов не могут быть описаны линейными моделями. Поэтому прогнозы-экстраполяции для нелинейных процессов на основе происходящего сейчас или в прошлом являются ненадежными и недостаточными. Линейное мышление, до сих пор преобладающее в умах многих людей и в некоторых областях науки, становится в современных условиях недостаточным и в принципе – даже опасным. Таким образом, необходимо формировать у школьников и студентов нелинейное мышление, которое предполагает поиск нешаблонных путей к достижению целей.

Одним из эффективных способов формирования нелинейного мышления является изучение в математических курсах нелинейных структур, в частности порядковых. В школьной математике учащиеся встречаются в основном лишь с линейным порядком. Однако уже в начальной школе можно начинать пропедевтику различения понятий линейного и нелинейного порядков. С нелинейными порядками школьники встречаются в некоторых логических задачах, а также при изучении отношения делимости. Используя это отношение, удается проиллюстрировать такие важные понятия, как решетки, булевы алгебры и т. д., которые лежат в основе теории нелинейных порядковых структур. Важно, чтобы при изучении отношения делимости учащиеся заметили сходство и отличие этого отношения от линейного порядка.

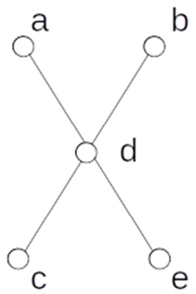


Рис. 1

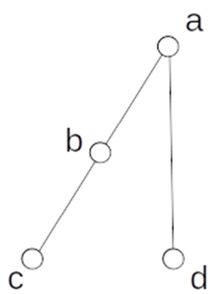


Рис. 2

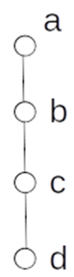


Рис. 3

На первом курсе вуза необходимо на лекциях и практических занятиях снова рассматривать примеры множеств с нелинейным порядком для того, чтобы у обучающихся не сложились стереотипы о порядковых структурах как чисто линейных. Весьма полезно конечные упорядоченные множества изображать графами (диаграммами Хассе): точками изображают элементы множества, а если $x < y$, то элемент x изображают ниже элемента y и соединяют их отрезком прямой. Из упорядоченных множеств, изображенных на рисунках 1–3, только третье (рис. 3) является линейно упорядоченным.

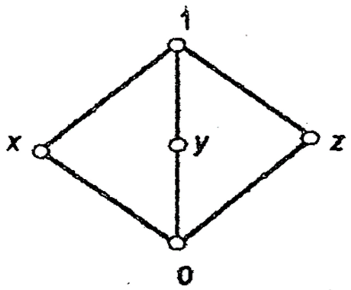
Можно предложить обучающимся решить следующую задачу: дано множество А = {2,3,5,6,10,15}, на котором отношение *p* задано условием: $xpy \Leftrightarrow x|y$. Построить граф этого отношения.

Такое предварительное знакомство с нелинейными структурами позволяет избежать определенных трудностей при изучении таких структур на старших курсах. В частности, многие студенты не могут понять различие между понятиями максимального и наибольшего, а также минимального и наименьшего элементов.

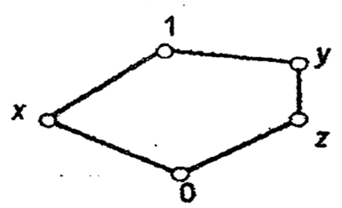
В усвоении этих и других понятий может оказать помощь представление упорядоченных множеств в виде диаграмм Хассе. Так, на рис. 1 легко увидеть, что изображенное на нем упорядоченное множество не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, но в нем имеются два максимальных и два минимальных элемента, а упорядоченное множество, изображенное на рис. 2, имеет один наибольший элемент и два минимальных элемента.

При решении задач со студентами следует уточнить соотношения между этими понятиями. Важно показать, что в любом упорядоченном множестве наибольший элемент является максимальным, а обратное утверждение справедливо только для некоторых классов упорядоченных множеств, в частности для линейно упорядоченных.

Среди встречающихся в математике типов нелинейных упорядоченных структур наиболее распространенными являются решетки. Этот тип нелинейных структур в большинстве вузов в базовом курсе алгебры не изучается, однако он имеет самое прямое отношение к школьной математике, поэтому желательно его включение в программу курса алгебры для будущих учителей математики. В Вологодском университете уже более 20 лет по разработанной нами программе изучение решеток и булевых алгебр предусматривается в пятом семестре. Положительный опыт преподавания нелинейных порядковых структур имеется в Вятском государственном университете [1; 2; 3]



Пример 4



Пример 5

В теории упорядоченных множеств точная верхняя грань двухэлементного множества $\{a, b\}$ обозначается через $a \vee b$, а точная нижняя грань этого множества обозначается через $a \wedge b$. Если для любых двух элементов упорядоченного множества L существуют $a \vee b$ и $a \wedge b$, то упорядоченное множество L называется решеткой.

Решетка, как известно, называется дистрибутивной, если она удовлетворяет тождествам дистрибутивности:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Студентам в качестве упражнений можно предложить проверить, что решетки, приведенные на рисунках 1–3, дистрибутивны, а решетки L_1 и L_2 в следующих примерах 4 и 5 – недистрибутивные.

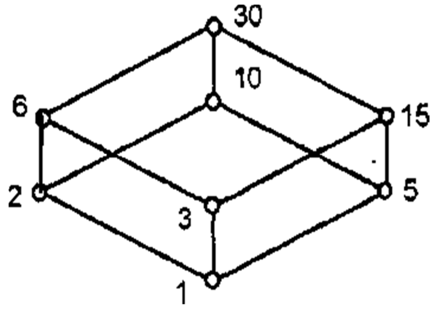
Действительно, в решетке L_1 : $x \vee (y \wedge z) = x$, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = 1$.

В решетке L_2 : $z \vee (x \wedge y) = z$; $(z \vee x) \wedge (z \vee y) = y$.

Примеры 4 и 5 хорошо иллюстрируют понятия нуля и единицы решетки. Наименьший элемент решетки называется нулем решетки и обозначается символом «0», а наибольший элемент решетки называется единицей решетки и обозначается символом «1».

Частный случай решеток представляют собой булевые алгебры. Дистрибутивная решетка B является булевой алгеброй, если в ней имеются нуль и единица, неравные друг другу, и для любого элемента $a \in B$ найдется элемент $\bar{a}$, называемый дополнением элемента a, такой, что $\bar{a} \vee a = 1$, $\bar{a} \wedge a = 0$.

Различные модели булевых алгебр (алгебра множеств, алгебра высказываний, алгебра НОД и НОК) желательно разобрать еще на младших курсах. В качестве примера булевой алгебры можно взять множество всех делителей числа 30 с отношением «|». В этом множестве число 30 является наибольшим элементом, число 1 является наименьшим элементом, а дополнением числа a является число $\bar{a} = 30/a$. Эта булева алгебра состоит из 8 элементов и может быть изображена в виде следующего графа:



Нетрудно проверить, что во всякой булевой алгебре справедливы тождества: $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$.

Полезно познакомить студентов и с такими обобщениями решеток, как направленное и риссово упорядоченные множества. Если в упорядоченном множестве X для любых элементов a, b существуют верхняя и нижняя грани, то множество X называется *направленным*. Направленное множество называется *риссовым,* если оно обладает следующим интерполяционным свойством: $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in X$ таких, что $a_i < b_j$ (i = 1, 2; j = 1, 2), существует элемент $c \in X$ такой, что $a_i < c < b_j$ (i = 1, 2; j =1, 2).

В качестве примера можно рассмотреть множество X, являющееся декартовым квадратом множества действительных чисел $\boldsymbol{R}^2$. Отношение порядка на этом множестве определим следующим образом:

$$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (a < c)\&(b < d) \vee (a = c)\&(b = d).$$

Нетрудно проверить, что этот порядок является риссовым.

Можно доказать, что в положительном конусе P риссового группоида начальные отрезки мультипликативны, т. е. $[e, a]\cdot[e, b]=[e, a\cdot b]$, где e – нейтральный элемент группоида. Такие упорядоченные множества целесообразно рассматривать в рамках спецкурса. Там же можно рассмотреть элементы теории как решеточно, так и риссово упорядоченных группоидов и различные обобщения основной теоремы арифметики для риссовых упорядоченных группоидов [9–11; 12].

Расширение этой теоремы до направленных группоидов уже неверно, что показывает следующий пример.

Рассмотрим группоид $G(+) = \{ (m, n) | \ m, n \epsilon \mathrm{Z},\ mB + n \epsilon 2\mathrm{Z}\}$, где сложение определено покомпонентно: $(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$, а порядок определен так: $(a,b)<(c,d) <=> a<c \ \& \ b<d$. Нетрудно проверить, что данный порядок не является риссовым. В этом группоиде элемент (2,2) имеет два различных разложения в сумму простых элементов (атомов):

$$(2,2) = (2,0) + (0,2) = (1,1) + (1,1).$$

Упражнение. Доказать, что в группоиде $К(\cdot) = \{x \in \mathbf{N} |\ x = 4n +1, n =0,1,...\}$ с обычным умножением и с отношением делимости «|» не выполняется однозначность разложения на простые элементы.

Таким образом, современная математика играет трансдисциплинарную роль в получении школьниками и студентами фундаментальных междисциплинарных знаний и представлений. Но, кроме того, математика является также основой формирования креативного потенциала личности, наиболее плодотворного способа мышления, нелинейного мышления, который является важнейшей составляющей компетенций специалиста в цифровую эпоху. Необходимо при разработке стандартов и образовательных программ учитывать роль математики в образовании и вернуть этой фундаментальной дисциплине подобающее ей место в образовательных программах.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник ВятГГУ. 2010. 2 (1). С. 111–120.

2. *Вечтомов Е. М.* Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 15–34.

3. *Вечтомов Е. М., Абрамова И. В., Шилова З. В.* Методика преподавания порядковых структур в обучении студентов вуза // Перспективы науки и образования. 2019. № 5 (41). С. 170–188. DOI: 10.32744/pse.2019.5.13.

4. Математика – основа компетенций цифровой эры : Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Москва. Россия. 1–2 октября 2020 года. МГПУ, 2020. 396 с.

5. *Перминов Е. А., Тестов В. А.* Методология моделирования как основа реализации междисциплинарного подхода в подготовке студентов педагогических направлений // Образование и наука. 2020. Т. 22. № 6. С. 9–30.

6. *Садовничий В. А.* Большие данные в современном мире. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017. 28 с.

7. *Тестов В. А.* Математическая одаренность и ее развитие // Перспективы науки и образования: международный электронный научно-практический журнал. 2014. № 6. С. 60–67. URL: http://pnojournal.wordpress.com.

8. *Тестов В. А.* О решеточно упорядоченных группоидах с условием минимальности : Научно-метод. конф. препод. матем. кафедр, тезисы докл. Киров : КГПИ, 1990. С. 20.

9. *Тестов В. А.* Об аналоге основной теоремы арифметики в упорядоченных группоидах. // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 6. С. 910–915.

10. *Тестов В. А.* Порядковые структуры в алгебре и теории чисел. Москва : МПГУ, 1997. 109 с.

11. *Тестов В. А., Перминов Е. А.* Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. 2021. Т. 23. № 3. С. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.

12. *Тестов В. А.* On a Riesz ordered groupoid. Webs & quasigroups : Сб. науч. трудов. Tver, 1994. Pp. 76–81.

The role of mathematics in the formation of nonlinear thinking of schoolchildren and students

V. A. Testov

Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Vologda State University. Russia, Vologda. ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Abstract. The article examines the transdisciplinary trend in the content of modern education, which brings the synthesis of knowledge to a higher level than the interdisciplinary one. Thanks to this trend, new transdisciplinary fields such as artificial intelligence, big data, and others are emerging.

It is shown that this trend is based on the process of mathematization of knowledge. In addition, due to the creativity of the methods used in the study of mathematics, this discipline becomes the basis for the formation of the creative potential of the individual. The article deals with the formation of nonlinear thinking in schoolchildren and students through the study of nonlinear ordinal structures (lattices, Boolean algebras, etc.) in mathematical courses.

Elements of a special course developed by the author on the theory of ordered groupoids are also presented, including a number of facts related to the generalization of the main theorem of arithmetic for Riesz-ordered groupoids and the impossibility of extending this theorem to directed groupoids.

Keywords: transdisciplinarity of education, mathematization of sciences, digital transformation, ordinal structures.

References

1. *Vechtomov E. M. Izuchenie poryadkovoj struktury* [The study of the ordinal structure] // *Vestnik VyatGGU* – Herald of VyatSHU. 2010. 2 (1). Pp. 111–120.

2. *Vechtomov E. M. Natural'nyj ryad* [Natural series] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2012. No. 10. Pp. 15–34.

3. *Vechtomov E. M., Abramova I. V., Shilova Z. V. Metodika prepodavaniya poryadkovyh struktur v obuchenii studentov vuza* [Methods of teaching ordinal structures in teaching university students] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya* – Prospects of science and education. 2019. No. 5 (41). Pp. 170–188. DOI: 10.32744/pse. 2019.5.13.

4. *Matematika – osnova kompetencij cifrovoj ery : Materialy XXXIX Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* – Mathematics is the basis of Digital Age competencies : Proceedings of the XXXIX International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Informatics of Universities and Pedagogical Universities. Moscow. Russia. October 1–2, 2020. MSPU. 2020. 396 p.

5. *Perminov E. A., Testov V. A. Metodologiya modelirovaniya kak osnova realizacii mezhdisciplinarnogo podhoda v podgotovke studentov pedagogicheskih napravlenij* [Methodology of modeling as a basis for the implementation of an interdisciplinary approach in the preparation of students of pedagogical directions]. 2020. Vol. 22. No. 6. Pp. 9–30.

6. *Sadovnichij V. A. Bol'shie dannye v sovremennom mire* [Big data in the modern world]. M. Lomonosov Moscow State University. 2017. 28 p.

7. *Testov V. A. Matematicheskaya odarennost' i ee razvitie* [Mathematical giftedness and its development] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya : mezhdunarodnyj elektronnyj nauchno-prakticheskij zhurnal* – Prospects of science and education : international electronic scientific and practical journal. 2014. No. 6. Pp. 60–67. Available at: http://pnojournal.wordpress.com.

8. *Testov V. A. O reshetochno uporyadochennyh gruppoidah s usloviem minimal'nosti : Nauchno-metod. konf. prepod. matem. kafedr, tezisy dokl.* [On lattice-ordered groupoids with the minimality condition : Scientific method. conference of teachers of math. departments, theses of reports]. Kirov. KSPI. 1990. P. 20.

9. *Testov V. A. Ob analoge osnovnoj teoremy arifmetiki v uporyadochennyh gruppoidah* [On the analogue of the main theorem of arithmetic in ordered groupoids] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1997. Vol. 62. Is. 6. Pp. 910–915.

10. *Testov V. A. Poryadkovye struktury v algebre i teorii chisel* [Ordinal structures in algebra and number theory]. M. MPSU. 1997. 109 p.

11. *Testov V. A., Perminov E. A. Rol' matematiki v transdisciplinarnosti soderzhaniya sovremennogo obrazovaniya* [The role of mathematics in the transdisciplinarity of the content of modern education] // *Obrazovanie i nauka* – Education of science. 2021. Vol. 23. No. 3. Pp. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.

12. *Testov V. A.* On a Riesz ordered groupoid. Webs & quasigroups: Collection of scientific Works. Tver. 1994. Pp. 76–81.