УДК 372.851 DOI 10.25730/VSU.0536.21.006

Совершенствование геометрической подготовки будущих учителей математики при изучении элементарной геометрии

Л. В. Тимшина
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. Важное место в подготовке будущих учителей математики отводится умению решать задачи элементарной геометрии, поскольку именно этот раздел геометрии напрямую связан с их профессиональной деятельностью. Практика работы показывает, что большинство студентов испытывает затруднения при решении стереометрических задач. Определенным решением данной проблемы является использование в обучении опорных задач. Результат, полученный при решении такой задачи, в дальнейшем применяется для работы с другими задачами. В статье описаны некоторые математические зависимости и приемы выполнения чертежа, которые могут составлять содержание опорных задач, иллюстрируется их применение. Предложенные подходы работы с задачей совершенствуют методику обучения студентов методам решения стереометрических задач и могут быть использованы при проведении занятий по элементарной геометрии.

Ключевые слова: элементарная геометрия, стереометрическая задача, геометрический чертеж.

Ведущая роль в содержании курса элементарной математики, в том числе и курса элементарной геометрии, отводится задачам. Использование задач в учебном процессе может служить многим конкретным целям обучения, выполнять разнообразные дидактические функции.

Существует достаточное количество учебной литературы по элементарной геометрии, например, [2; 3; 5], которая включает разнообразный набор стереометрических задач, содержит образцы решения. Однако проведение входного контроля при изучении с будущими учителями математики разделов элементарной геометрии и предъявление для решения задач из раздела «Задачи повышенной трудности» учебного пособия [1] выявляет слабый уровень умения решать стереометрические задачи.

Опыт работы со студентами-педагогами показывает необходимость рассмотрения опорных задач, которые позволяют в дальнейшем осуществлять более целенаправленный поиск решения стереометрической задачи или дают возможность найти более рациональный способ ее решения. К опорным, например, можно отнести следующие геометрические факты и конструкции: формулу площади ортогональной проекции фигуры; пирамиды с особыми свойствами; формулу для нахождения радиуса вписанной сферы; метод построения центра описанной сферы многогранника; особенность выполнения чертежа при взаимном расположении сфер.

Рассмотрим отмеченные факты более подробно.

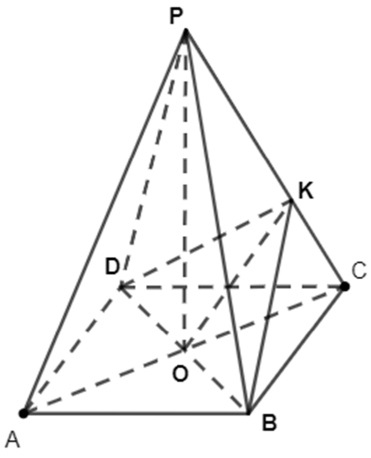

Рис.1

Площадь ортогональной проекции F' фигуры F, лежащей в плоскости, равна произведению площади этой фигуры и косинуса угла между ее плоскостью и плоскостью проекции: $S_{F'} = S_F \cos\alpha$. Доказательство данного утверждения можно найти, например, в [3].

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120º. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S.

Решение. Так как прямая BO перпендикулярна плоскости PAC, треугольник POC является ортогональной проекцией боковой грани PBC пирамиды на плоскость диагонального сечения (рис. 1). Для использования формулы площади проекции нужно определить угол между плоскостями этих треугольников. Пусть угол BKD линейный при ребре PC. По условию он равен $120°$. Треугольник BKD равнобедренный. Значит, его медиана OK является биссектрисой угла DKB, тогда угол $OKB = 60^\circ$. Он является линейным углом, так как прямая PC перпендикулярна прямым KB и OK. Таким образом, $S_{POC} = S_{PBC} \cos 60^\circ$. По условию

$S_{POC} = \frac{S}{2}$, значит, по формуле площади проекции $\frac{S}{2} = S_{PBC} \cdot \frac{1}{2}$. Откуда $S_{PBC} = S$ и, значит, $S_{бок} = 4S$.

Задача 2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания BA и BC равны a и b соответственно, а угол между ними равен α. Через биссектрису данного угла и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с основанием острый угол β. Найти площадь сечения.

Решение. Пусть BK – биссектриса основания *ABC* (рис. 2). Сечением призмы является треугольник BA_1K. Треугольник BAK – ортогональная проекция сечения на плоскость основания BAC. Угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции равен β. Для использования формулы площади проекции нужно определить площадь треугольника BAK. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению прилежащих сторон. Получаем, что $S_{BAK} = \frac{a^2 b \sin\alpha}{2(a+b)}$. Далее по формуле площади проекции $S_{BA_1K} = \frac{S_{BAK}}{\cos\beta}$. Значит, $S_{BA_1K} = \frac{a^2 b \sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$.

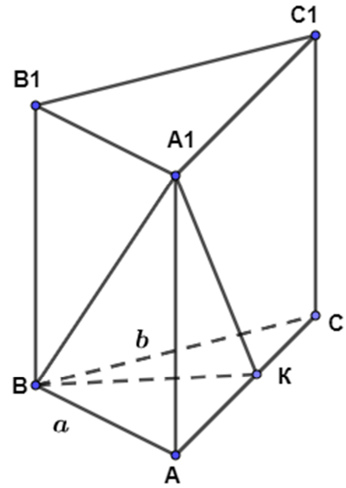

Рис. 2

Укажем два класса пирамид, основаниями высот которых являются особые точки.

Если в пирамиде равны двугранные углы (рассматриваем внутренние углы пирамиды) при основании или равны апофемы боковых граней, то высота пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания. Если рассматривать углы наклона боковых граней к плоскости основания, то ортогональной проекцией вершины будет точка, равноудаленная от всех сторон основания. Для треугольной пирамиды, например, основание высоты может совпасть с центром одной из вневписанных окружностей основания.

Задача 3. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция с боковой стороной *a* и острым углом *α*. Все боковые грани образуют с основанием равные углы *β*. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Пусть *PO* высота, тогда по свойству пирамиды *O* – центр вписанной окружности основания (рис. 3). Так как существует вписанная окружность, то $AB + CD = AD + BC$. Из прямоугольного треугольника *ABB₁*: $BB_1 = a\sin\alpha.$ Выразим площадь основания $S_{осн} = \frac{AD+BC}{2} BB_1 = \frac{AB+CD}{2} BB_1 = \frac{2a}{2} a\sin\alpha = a^2\sin\alpha.$

Для нахождения площади боковых граней необходимо предварительно вычислить радиус вписанной окружности основания, далее найти апофемы боковых граней, которые для данной пирамиды равны, затем вычислить площадь боковой поверхности. Также для нахождения площади боковой поверхности можно применить формулу площади проекции фигуры, использованную в решении задач 1 и 2. Проекцией боковых граней является основание. Тогда $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\beta} = \frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}$. $S_{полн.пов} = a^2\sin\alpha(\frac{1}{\cos\beta} + 1).$

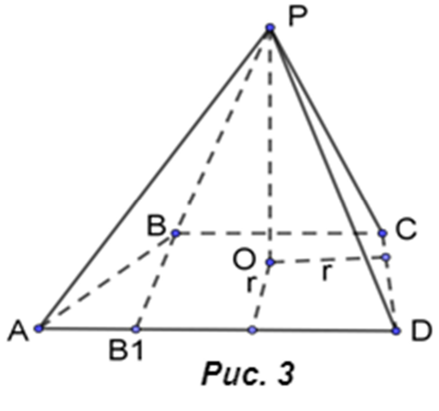

Рис. 3

Следующий класс образуют пирамиды, высота которых проектируется в центр описанной окружности основания. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия: боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, равны боковые ребра, боковые ребра составляют с высотой пирамиды равные углы. Указанные свойства пирамиды равносильны.

Задача 4. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой каждая из боковых сторон и меньшая из параллельных сторон равны *a*, острые углы равны *α*. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол *β*. Найти высоту пирамиды.

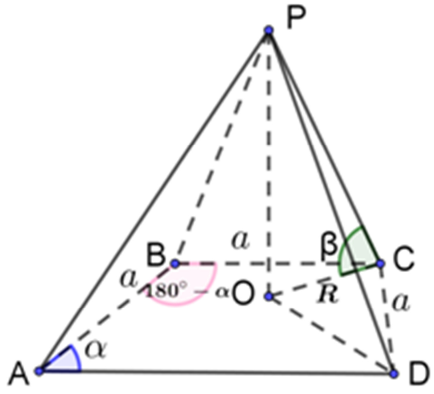

Рис. 4

Решение. Пусть *PO* высота пирамиды, тогда по свойству пирамиды *O* – центр описанной окружности основания (рис. 4). Из прямоугольного треугольника *POC* выразим *PO*: $PO = Rtg\beta$, где *R* – радиус описанной окружности основания. Он равен радиусу окружности, описанной около треугольника АВС. По теореме синусов для этого треугольника $\dfrac{a}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = 2R, где \dfrac{\alpha}{2}$ – величина угла *BAC*. Тогда $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. Подставим полученное значение *R* в формулу для нахождения *PO*. Получим $PO = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}tg\beta$.

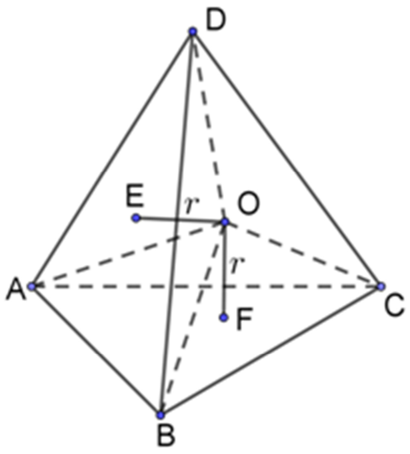

Рис. 5

Следующая серия задач связана со вписанной и описанной сферами многогранника и взаимным расположением сфер.

Задача 5. Доказать, что если в многогранник можно вписать сферу, то его объем равен одной трети произведения площади полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

Выполним иллюстрацию доказательства на изображении треугольной пирамиды (рис. 5). Соединим центр *O* сферы с вершинами многогранника. Тогда весь многогранник разбивается на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а вершинами – центр сферы. Например, пирамиды *ABCO* и *ABDO,* примыкающие к граням *ABC* и *ABD*. Перпендикуляры, опущенные на грани многогранника из центра *O*, например, *OF* и *OE* будут радиусами сферы и одновременно высотами пирамид. Объем многогранника можно представить в виде суммы объемов образовавшихся пирамид, откуда и получаем результат.

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{1}{3}rS_1 + \frac{1}{3}rS_2 + \ldots + \frac{1}{3}rS_n = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3}rS_{полн.пов.},$$

Записав равенство в другом виде $r = \dfrac{3V}{S_{полн.пов.}}$, получаем формулу, позволяющую находить радиус вписанной сферы без дополнительных построений к задаче.

Задача 6. Основанием пирамиды *PABC* служит треугольник *ABC* такой, что *AB* = *AC* = 10 *см* и *BC* = 12 *см*. Грань *PBC* перпендикулярна к основанию и *PB*=*PC*. Вычислить радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 1,4 *см*.

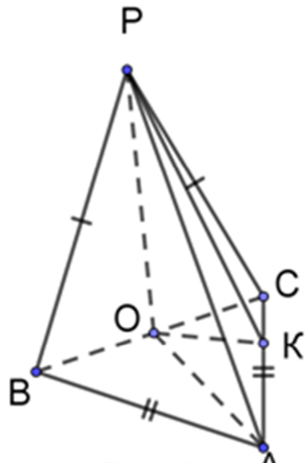

Рис. 6

Решение. Воспользуемся формулой $r = \dfrac{3V}{S_{полн.пов.}}$. Выражая объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_{OCH}H$, приведем формулу для вычисления радиуса к виду: $r = \dfrac{S_{осн}H}{S_{полн.пов}}$, где *H*=1,4 *см* (рис. 6). Площадь основания найдем по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. $S_{осн.}$ = 48 *см*². Высота *PO* пирамиды совпадет с высотой треугольника *PBC*, опущенной из вершины *P* и по условию равна 1,4 *см*. Площадь треугольника *PBC* равна 8,4 *см*². Найдем площади треугольников *PAC* и *PAB*, которые равны по трем сторонам. Пусть *PK* – апофема грани *PAC*. Рассмотрим отрезок *OK*. По теореме о трех перпендикулярах *OK* – перпендикуляр к *AC*. Длину *OK* вычислим, выразив дважды площадь треугольника *OCA*. С одной стороны, площадь равна половине площади треугольника *ABC* и равна 24 *см*², с другой стороны, $S_{OCA} = \frac{1}{2} OK \cdot CA \Rightarrow OK = 4{,}8$ *см*. Далее из прямоугольного треугольника *POK*: *PK* = 5 *см*. $S_{PAC} = S_{PAB} = \frac{1}{2} 5 \cdot 10 = 25$ *см*². По формуле $r = \frac{S_{осн} H}{S_{полн.пов}}$ найдем радиус шара.

$$r = \frac{48 \cdot 1{,}4}{48 + 25 + 25 + 8{,}4} = \frac{12}{19} см.$$

При рассмотрении описанной сферы многогранника (пирамиды или призмы) ее центр может быть построен исходя из следующих рассуждений. Рассмотрим точку, которая является центром описанной сферы. Опустим из этой точки перпендикуляр на основание многогранника и соединим ее со всеми вершинами основания. Отрезки, соединяющие центр с вершинами, являются наклонными к плоскости основания, и по условию они равны, так как являются радиусами сферы. Тогда будут равны и проекции отрезков на плоскость основания. Получили, что основание перпендикуляра равноудалено от всех вершин основания и, значит, является центром описанной около основания окружности. Таким образом, первое свойство центра описанной сферы состоит в том, что он находится на прямой, перпендикулярной к плоскости основания и проходящей через центр описанной окружности основания. Кроме того, центр равноудален от вершин, принадлежащих боковому ребру, следовательно, лежит в плоскости, перпендикулярной к этому ребру и проходящей через его середину. Из сказанного получаем центр описанной сферы как точку пересечения указанных прямой и плоскости. Построение центра по рассмотренному алгоритму позволяет соотнести его расположение с элементами многогранника и, соответственно, облегчает решение задачи.

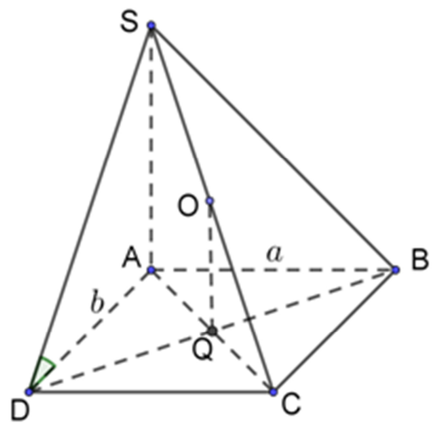

Рис. 7

Задача 7. Основанием четырехугольной пирамиды *SABCD* служит прямоугольник *ABCD*. *AB = a*, *AD = b*. Грани *SAD* и *SAB* перпендикулярны плоскости основания, а грань *SDC* составляет с ней угол 45º. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Решение. Из условия перпендикулярности двух граней к плоскости основания заключаем, что их общее ребро *SA* также перпендикулярно плоскости основания (рис. 7). Угол *SDA* является линейным углом двугранного угла при ребре *DC* (*AD* – перпендикуляр к *DC* и является проекцией *SD* на плоскость основания, значит, *SD* – перпендикуляр к *DC* по теореме о трех перпендикулярах), следовательно, равен 45°. Треугольник *DAS* прямоугольный равнобедренный. *DA = AS = b*. Построим центр описанной сферы. Через точку *Q* – центр описанной окружности основания – проведем перпендикуляр *QO* к плоскости основания. Эта прямая будет параллельна *AS* и, значит, будет лежать в плоскости *SAC*. Из описанных свойств заключаем, что *QO* является средней линией треугольника *ASC*. Точка *O* пересечения прямой *SC* и *QO* – середина *SC*. Заметим, что полученная точка *O* является искомой, поскольку равноудалена от вершин *S* и *C* ребра *SC*. Радиус описанной сферы равен половине ребра *SC*. Длину *SC* выразим из прямоугольного треугольника *SAC*, в котором $SA = b, AC = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow R = \frac{1}{2} SC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2}$.

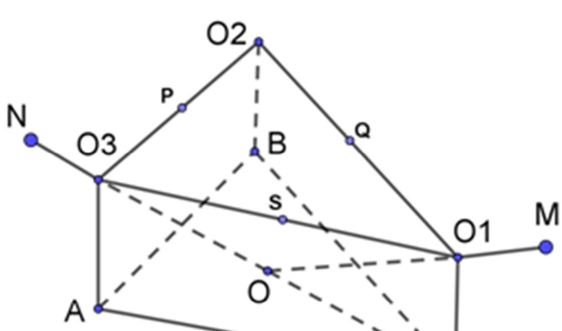

Рис. 8

Задача 8. В пространство, заключенное между сферической поверхностью и плоскостью, проходящей через ее центр, вложено три одинаковых шара радиусом r так, что каждый шар касается двух других, сферической поверхности и указанной плоскости. Найти радиус сферической поверхности.

Решение. При выполнении чертежа в задачах на взаимное расположение сфер достаточно, как правило, изобразить центры данных сфер и всевозможные точки касания. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры данных шаров, *A, B, C* – точки касания с плоскостью, указанной в задаче, *P, Q, S* – попарные точки касания шаров (рис. 8). Для искомой сферической поверхности: O – центр, лежащий в плоскости ABC, M и N – точки касания с шарами с центрами в точках O_1 и O_3. В этом случае отрезки OM и ON являются искомыми радиусами. Для решения задачи необходимо найти длину отрезка OO_1. Так как O_1 принадлежит отрезку OM, то радиус OM равен сумме длин отрезков OO_1 и O_1M, где $O_1M = r$.

Многогранник $CBAO_1O_2O_3$ является правильной треугольной призмой со стороной основания ABC, равной $2r$, точка O – центроид основания ABC. Длина бокового ребра CO_1 призмы равна r. Треугольник CO_1O прямоугольный. Катет OC составляет $\frac{2}{3}$ медианы треугольника ABC и равен $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, второй катет CO_1 равен r. Тогда гипотенуза $OO_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}r$ и радиус $OM = \frac{\sqrt{21}+3}{3}r$.

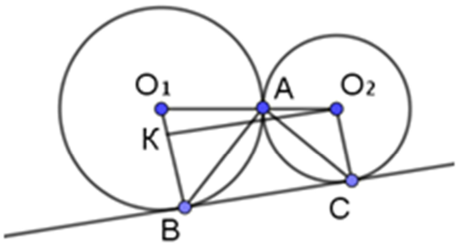

Рис. 9

Отметим, что в решении предложенных задач активно работают некоторые идеи элементарной планиметрии. В частности, в задачах на взаимное расположение сфер при внешнем их касании рассмотрение плоских сечений позволяет свести решение задачи к стандартной планиметрической конфигурации, состоящей из двух касающихся окружностей и общей касательной (рис. 9). Особенности данной конфигурации рассматривались нами в [4].

Организация решения опорных задач и акцентирование внимания студентов на используемых математических зависимостях и приемах выполнения чертежа, способствует осознанию информации, формирует умения и навыки решения стереометрических задач, создает основу для творческого применения знаний в новой ситуации.

Список литературы

1. Геометрия, 10–11 классы : учеб. для образоват. учреждений: базовый и проф. уровни / Л. С. Атанасян [и др.]. 19-е изд. М. : Просвещение, 2010. 255 с.

2. *Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по элементарной математике: Геометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 1992. 352 с.

3. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия : в 2 т. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. М. : НЦНМО, 2006. 256 с.

4. *Тимшина Л. В.* Организация самостоятельной работы студентов педагогов при изучении учебной дисциплины «Элементарная геометрия» // Advanced Science. Киров : Изд-во Вятского государственного университета. 2018. № 3. С. 28–32.

5. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике: Решение задач : учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. М. : Просвещение, 1991. 384 с.

Improving the geometric training of future teachers of mathematics in the study of elementary geometry

L. V. Timshina

senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. An important place in the training of future teachers of mathematics is given to the ability to solve problems of elementary geometry, since this section of geometry is directly related to their professional activities. Practical work shows that most students have difficulties in solving stereometric problems. A certain solution to this problem is the use of reference tasks in training. The result obtained when solving such a task is then used to work with other tasks. The article describes some mathematical dependencies and drawing techniques that can form the content of reference tasks, and illustrates their application. The proposed approaches to working with the problem improve the methodology of teaching students methods for solving stereometric problems and can be used in conducting classes in elementary geometry.

Keywords: elementary geometry, stereometric problem, geometric drawing.

References

1. *Geometriya, 10–11 klassy : ucheb. dlya obrazovat. uchrezhdenij: bazovyj i prof. urovni* – Geometry, grades 10–11 : textbook for educational institutions: basic and prof. levels / L. S. Atanasyan [et al.]. 19th ed. M. Prosveshchenie (Enlightment). 2010. 255 p.

2. *Gusev V. A., Litvinenko V. N., Mordkovich A. G. Praktikum po elementarnoj matematike: Geometriya : ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. spec. ped. in-tov i uchitelej. 2-e izd., pererab. i dop.* [Practicum on elementary mathematics: Geometry : textbook for students of physics and mathematics. specialities of ped. Institutes and teachers. 2nd ed., reprint and add.] M. Prosveshchenie (Enlightment). 1992. 352 p.

3. *Ponarin YA. P. Elementarnaya geometriya : v 2 t. T. 2: Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva* [Elementary geometry : in 2 vols. Vol. 2: Stereometry, space transformations]. M. Moscow Center for Continuing Mathematical Education. 2006. 256 p.

4. *Timshina L. V. Organizaciya samostoyatel'noj raboty studentov pedagogov pri izuchenii uchebnoj discipliny "Elementarnaya geometriya"* [Organization of independent work of students of teachers in the study of the academic discipline "Elementary geometry"] // Advanced Science. Kirov. Vyatka State University. 2018. No. 3. Pp. 28–32.

5. *Sharygin I. F., Golubev V. I. Fakul'tativnyj kurs po matematike: Reshenie zadach : ucheb. posobie dlya 11 kl. sred. shk.* [Elective course in Mathematics: Solving problems : manual for 11 grade of secondary school]. M. Prosveshchenie (Enlightment). 1991. 384 p.