УДК 51 DOI 10.25730/VSU.0536.21.003

Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств на едином государственном экзамене по математике профильного уровня

Н. А. Зеленина[1], И. В. Ситникова[2]
[1]кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-4238-6282. E-mail: sezel@mail.ru
[2]кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-0003-2905. E-mail: i.sitn@mail.ru

Аннотация. В предлагаемой статье рассмотрены различные способы решения неравенств, которые применялись учащимися на едином государственном экзамене по математике профильного уровня в 2019–2020 гг. Авторы, имеющие большой опыт проверки экзаменационных работ, анализируют типичные ошибки и затруднения учащихся при использовании различных способов решения неравенств. Материалы статьи предназначены для учителей математики, работающих в старших классах, а также старшеклассников. Они позволят более эффективно организовать обучение решению неравенств, предотвратив возможные ошибки и затруднения.

Ключевые слова: обучение математике, неравенство, различные способы решения неравенств, единый государственный экзамен по математике.

Контрольно-измерительные материалы единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня традиционно включают в себя в качестве задачи повышенной сложности (№ 15) дробно-рациональное, показательное или логарифмическое неравенство. Решение такой задачи позволяет проверить владение достаточно обширным материалом курса алгебры и математического анализа, в частности: знание свойств основных элементарных функций; умение выполнять тождественные преобразования алгебраических и трансцендентных выражений; умение находить пересечение и объединение множеств; владение различными методами решения неравенств [5; 6].

Наш многолетний опыт работы в региональной предметной комиссии по математике показывает, что к решению неравенства приступает большое число школьников, однако дать обоснованное правильное решение удается далеко не всем. Согласно ежегодно публикуемой статистике, полный балл за решение неравенства в лучшем случае получают около четверти выпускников. Статистика решения этой задачи выпускниками Кировской области за последние пять лет приведена в табл. 1 [3; 4].

Таблица 1

Доля участников ЕГЭ, получивших максимальный балл за решение задачи № 15 в 2016–20 гг., %

2016 г.	2017 г.	2018 г.	2019 г.	2020 г.
13,5	12,1	13,3	22,4	16,8

Проверка развернутых ответов участников профильного ЕГЭ по математике показывает, что выпускники владеют различными методами решения неравенств, в том числе и выходящими за рамки школьной программы. Вместе с тем можно выделить типичные ошибки и затруднения учащихся при использовании различных способов решения. Обратимся к анализу этих ошибок на примере решения неравенств профильного экзамена 2019 и 2020 гг.

В 2019 году для решения была предложена следующая задача.

Решите неравенство

$$log_3(5-5x) \geq log_3(x^2-3x+2) - log_3(x+4) \text{ [2].}$$

Для решения многие учащиеся использовали преобразования с помощью свойств логарифмов и переход к решению рационального неравенства. В процессе решения необходимо было учитывать область определения функций в правой и левой частях неравенства.

Рассмотрим один из вариантов решения подробно.

$$log_3(5-5x) \geq log_3(x^2-3x+2) - log_3(x+4) \Leftrightarrow$$
$$log_3(5-5x) + log_3(x+4) \geq log_3(x^2-3x+2) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 5-5x > 0, \\ x+4 > 0, \\ x^2-3x+2 > 0, \\ log_3(5-5x)(x+4) \geq log_3(x^2-3x+2) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x < 1, \\ x > -4, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right., \\ 5(1-x)(x+4) \geq (x-1)(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 1, \\ (x-1)(x-2+5x+20) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -4 < x < 1, \\ (x-1)(6x+18) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 1, \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 1.$$

Ответ: $x \in [-3; 1)$.

Предложенный вариант решения опирается на преобразования с использованием равносильных переходов.

Как правило, прежде чем начать преобразовывать неравенство, школьников учат находить область допустимых значений (ОДЗ) переменной, далее решать его сведением к рациональному или дробно-рациональному неравенству, а затем пересекать найденное решение с ОДЗ. В связи с этим большинство учащихся, приступая к решению неравенства, на первом этапе решения находили ОДЗ переменной. Далее для преобразования неравенства учащиеся использовали разные варианты. Часть выбирала рассмотренный выше способ, который приводит к квадратному неравенству. Некоторые учащиеся не переносили $log_3(x+4)$ в левую часть неравенства, а заменяли в правой части разность логарифмов по одному основанию логарифмом частного. Тогда после использования свойства возрастания логарифмической функции и потенцирования обеих частей неравенства получали:

$$5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4}.$$

Решение дробно-рационального неравенства, как известно, является более сложной задачей, в которой допускаются стандартные ошибки. Самой распространенной из них является умножение обеих частей неравенства на знаменатель. Хотя в данном случае, при условии верно найденной ОДЗ, умножение на знаменатель и являлось правомерным действием, учащиеся должны были пояснить, что при условии $-4 < x < 1$ умножение на знаменатель не меняет знака неравенства, или решить его методом интервалов, а затем пересечь найденное решение с ОДЗ.

Отдельно отметим следующее. При нахождении области допустимых значений переменной участникам экзамена требовалось решить систему неравенств $\begin{cases} 5-5x > 0, \\ x+4 > 0, \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases}$. Очевидно, что решением последнего неравенства является объединение промежутков и получается следующая система $\begin{cases} x < 1, \\ x > -4, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Многие выпускники испытывали здесь затруднения при выборе ответа и не смогли преодолеть логическую трудность, связанную с включением в систему совокупности неравенств. Отчасти ошибки возникали из-за того, что, не применяя знак совокупности, школьники теряли и союз ***или***, соединяющий два последних неравенства системы.

Рассмотрим еще один метод решения, который применялся на экзамене, – обобщенный метод интервалов. Как известно, это универсальный метод решения неравенств, вопрос только в целесообразности его применения. Под целесообразностью здесь стоит понимать ответ на следующий вопрос: упрощает ли применение данного метода решение неравенства? Следуя методу, учащиеся приводили неравенство к виду

$$log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4) \geq 0.$$

Вводили функцию $f(x) = log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4)$.

Находили область ее определения $D(f)$: $\begin{cases} 5-5x > 0, \\ x+4 > 0, \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 1.$

Находили нули функции:

$$log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4) = 0;$$
$$log_3(5-5x) + log_3(x+4) = log_3(x^2-3x+2);$$
$$log_3(5-5x)(x+4) = log_3(x^2-3x+2);$$
$$-5x^2-15x+20 = x^2-3x+2;$$
$$x^2+2x-3=0;$$
$$x_1 = -3 \text{ – нуль функции, } x_2 = 1 \notin D(f).$$

Определяли знаки функции на промежутках области определения функции и выбирали промежутки нужного знака:

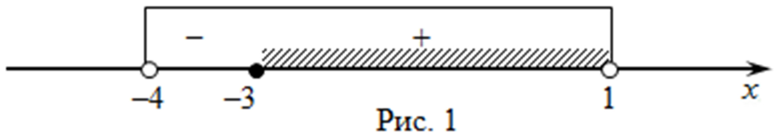

Рис. 1

Ответ: $x \in [-3; 1)$.

Из двух приведенных решений первое, на наш взгляд, является более простым. Это объясняется тем, что применение обобщенного метода интервалов требует нахождения знаков на промежутках для довольно сложной функции $f(x) = log_3(5-5x) - log_3(x^2-3x+2) + log_3(x+4)$. Отметим здесь также тот факт, что многие выпускники не осознают, что проверка знака функции в данном случае является неотъемлемой частью решения.

В 2020 году на ЕГЭ по математике профильного уровня была предложена следующая задача.

Решите неравенство

$$x^2 log_{343}(x+3) \le log_7(x^2+6x+9)[1].$$

Решение этого смешанного неравенства отличалось разнообразием применяемых методов решения.

Чаще всего схема решения была следующей. Учащиеся находили ОДЗ переменной: $x > -3$ и преобразовывали неравенство к виду $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right) \le 0$. Находили корни уравнения $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right) = 0$, это числа -2 и $\pm\sqrt{6}$, принадлежащие ОДЗ. Далее определяли знаки произведения $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)$ на ОДЗ (рис. 2) и выписывали правильный ответ $x \in (-3; -\sqrt{6}] \cup [-2; \sqrt{6}]$.

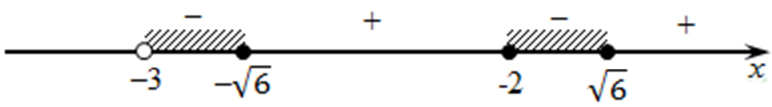

Рис. 2

Однако во многих работах учеников отмечалась грубая, но, как оказалось, типичная ошибка. Знаки произведения $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)$ были «определены» на промежутках всей числовой прямой, в том числе и на тех, где вышеупомянутое произведение не существует. Далее к выбранным в соответствии со знаком неравенства промежуткам применялась верно найденная ОДЗ переменной и получался верный (!) ответ. Такой способ рассуждений, с одной стороны, демонстрирует глубокое непонимание обобщенного метода интервалов, где последовательность шагов вполне определена и знак вводимой в рассмотрение функции $y = log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)$ ставится только на промежутках ее области определения. С другой стороны, говорит о несостоятельности той схемы решения неравенств, содержащих логарифмы, которой чаще всего обучают школьников на уроках математики: 1) найдите ОДЗ переменной; 2) решите неравенство; 3) найдите пересечение решения неравенства с найденной ОДЗ. Эта схема работает, но далеко не всегда.

Все чаще в последнее время при решении логарифмических неравенств на экзамене школьники применяют метод рационализации, позволяющий заменить логарифмическую функцию рациональной. Применение этого метода, опирается на утверждение, что знак функции $log_{f(x)}g(x)$ совпадает на области определения этой функции со знаком выражения $(f(x)-1)(g(x)-1)$. В рассматриваемом неравенстве после нахождения ОДЗ переменной $(x > -3)$ и приведения его к виду $log_7(x+3)\left(\frac{x^2}{3}-2\right) \le 0$ можно заменить множитель $log_7(x+3)$ на произведение $(7-1)(x+3-1)=6(x+2)$. Тогда неравенство становится рациональным:

$$6(x+2)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\le 0.$$

В таком неравенстве определение знаков на промежутках не вызывает трудностей, главное при получении ответа не забыть пересечь его решение с найденной ОДЗ. Несмотря на то что этот метод решения не является элементом школьной программы, он, на наш взгляд, самый простой и экономный с точки зрения времени, потраченного на решение.

Еще один метод, который был представлен в работах участников экзамена, – это метод расщепления неравенств, основанный на использовании условий неотрицательности (неположительности) произведения двух множителей.

$$x^2 log_{343}(x+3)\le log_7(x^2+6x+9)\Leftrightarrow x^2 log_{7^3}(x+3)\le log_7(x+3)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3}log_7(x+3)-2log_7|x+3|\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0,\\ log_7(x+3)\left(\dfrac{x^2}{3}-2\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>-3,\\ log_7(x+3)\le 0,\\ \dfrac{x^2}{3}-2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} x>-3,\\ log_7(x+3)\ge 0,\\ \dfrac{x^2}{3}-2\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>-3,\\ x+3\le 1,\\ x^2-6\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} x>-3,\\ x+3\ge 1,\\ x^2-6\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>-3,\\ x\le -2,\\ \left[\begin{array}{l} x\ge\sqrt{6}\\ x\le-\sqrt{6}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} x>-3,\\ x\ge -2,\\ -\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<x\le-\sqrt{6}\\ -2\le x\le\sqrt{6}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-3;\ -\sqrt{6}]\cup[-2;\ \sqrt{6}]$.

Главное достоинство этого метода – его строгая логичность, недостаток – логические трудности, связанные с умением решать системы и совокупности неравенств. Школьники, как правило, при записи решения неравенства не прибегают к равносильным переходам и не используют логическую символику. Наиболее часто в работах участников экзамена первая система разбивается на две системы, связанные союзом ***или***. Отдельно решается каждая система, полученные решения объединяются.

Заметим, что применение любого из рассмотренных выше методов решения подразумевает преобразование исходного неравенства к виду $\frac{x^2}{3}log_7(x+3)\le 2log_7|x+3|$ и раскрытию модуля при условии $x+3>0$. Многие учащиеся сразу заменяли выражение $log_7(x+3)^2$ на $2log_7(x+3)$, не поясняя правомерность такой замены.

При решении рассматриваемого неравенства довольно редко, но использовался и переход к показательно-степенному неравенству:

$$x^2 log_{343}(x+3)\le log_7(x^2+6x+9)\Leftrightarrow \frac{x^2}{3}log_7(x+3)\le log_7(x+3)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log_7(x+3)^{\frac{x^2}{3}}\le log_7(x+3)^2\Leftrightarrow (x+3)^{\frac{x^2}{3}}\le (x+3)^2.$$

Далее рассматривались два случая для основания степени:

$$(x+3)^{\frac{x^2}{3}}\le (x+3)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 0<x+3<1,\\ \dfrac{x^2}{3}\ge 2,\end{cases}\\ \begin{cases} x+3>1,\\ \dfrac{x^2}{3}\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} -3<x<-2,\\ \left[\begin{array}{l} x\ge\sqrt{6}\\ x\le-\sqrt{6}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} x>-2,\\ -\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<x\le-\sqrt{6}\\ -2<x\le\sqrt{6}\end{array}\right.$$

Распространенной ошибкой была потеря решения $x=-2$, которое получалось в результате рассмотрения случая, когда основание степени равно единице. Это связано на наш взгляд, с тем, что полученные в результате преобразований функции левой и правой частей неравенства воспринимались учащимися как показательные, у которых основание больше нуля и не равно единице.

Еще один способ решения показательно-степенного неравенства был связан с рационализацией последнего. В основе этого рассуждения лежит утверждение, что знак выражения $f(x)^{g(x)}-f(x)^{h(x)}$ совпадает на области определения выражения со знаком произведения $(f(x)-1)\big(g(x)-h(x)\big)$.

Применяя это утверждение, школьники получали, что при условии $x+3>0$ неравенство $(x+3)^{\frac{x^2}{3}}-(x+3)^2\le 0$ можно заменить рациональным $(x+3-1)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\le 0$ или $(x+2)\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\le 0$. Использование этого метода, как видим, позволяет избежать потери решения $x=-2$.

Рассмотренные выше способы решения неравенств и типичные ошибки выпускников помогут учителям математики более эффективно организовать работу по обучению решению неравенств и подготовке к итоговой аттестации по предмету.

Список литературы

1. Задания 15 ЕГЭ–2020 : сб. задач. URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=34042998.

2. Задания 15 (С3) ЕГЭ 2019 : сб. задач. URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=24900054.

3. *Зеленина Н. А., Крутихина М. В.* Некоторые итоги ЕГЭ по математике 2018 года в Кировской области // Концепт. 2019. № V3. С. 75–89. URL: http://e-koncept.ru/2019/196029.htm.

4. *Зеленина Н. А., Носова Н. В.* Анализ результатов ЕГЭ по учебному предмету «Математика» // Единый государственный экзамен в Кировской области. Анализ результатов ЕГЭ-2020 : сборник информационно-аналитических и методических материалов / Сост. Н. В. Носова, Авторский коллектив. Киров : ИРО Кировской области, 2020. С. 71–80. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44256983.

5. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике. URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.

6. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена. URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.

Typical mistakes and difficulties of schoolchildren in solving inequalities at the unified state exam in mathematics of the profile level

N. A. Zelenina[1], I. V. Sitnikova[2]

[1]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-4238-6282. E-mail: sezel@mail.ru

[2]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-0003-2905. E-mail: i.sitn@mail.ru

Abstract. The proposed article considers various ways of solving inequalities that were used by students at the unified state exam in mathematics of the profile level in 2019-2020. The authors, who have extensive experience in checking exam papers, analyze the typical mistakes and difficulties of students when using various ways to solve inequalities. The materials of the article are intended for mathematics teachers working in high school, as well as high school students. They will make it possible to organize training in solving inequalities more effectively, preventing possible mistakes and difficulties.

Keywords: teaching mathematics, inequality, various ways of solving inequalities, unified state exam in mathematics.

References

1. *Zadaniya 15 EGE–2020 : sb. zadach* – Tasks 15 Unified State Exam–2020 : collection of tasks. Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=34042998.

2. *Zadaniya 15 (S3) EGE 2019 : sb. zadach* – Tasks 15 (S3) Unified State Exam–2019 : collection of tasks. Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=24900054.

3. *Zelenina N. A., Krutihina M. V. Nekotorye itogi EGE po matematike 2018 goda v Kirovskoj oblasti* [Some results of the Unified State Exam in mathematics in 2018 in the Kirov region] // *Koncept* – Concept. 2019. No. V3. Pp. 75–89. Available at: http://e-koncept.ru/2019/196029.htm.

4. *Zelenina N. A., Nosova N. V. Analiz rezul'tatov EGE po uchebnomu predmetu "Matematika"* [Analysis of the results of the Unified State Exam on the academic subject "Mathematics". Analysis of the results of the Unified State Exam-2020: collection of information-analytical and methodological materials / Comp. N. V. Nosova, Author's team. Kirov. IRO of the Kirov region. 2020. Pp. 71–80. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44256983.

5. *Kodifikator trebovanij k urovnyu podgotovki vypusknikov obrazovatel'nyh organizacij dlya provedeniya edinogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike* – Codifier of requirements for the level of training of graduates of educational organizations for the unified state exam in mathematics. Available at: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#! / tab/151883967-2.

6. *Kodifikator elementov soderzhaniya po matematike dlya sostavleniya kontrol'nyh izmeritel'nyh materialov dlya provedeniya edinogo gosudarstvennogo ekzamena* – Codifier of elements of content in mathematics for the preparation of control measuring materials for the unified state exam. Available at: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.