МАТЕМАТИКА

УДК 517.53 DOI 10.25730/VSU.0536.22.001

Некоторые ограниченные интегральные операторы в областях с углами

В. В. Борцов[1], А. С. Нестеров[2], Н. М. Махина[3], В. А. Беднаж[4]
[1]магистрант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии,
Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского. Россия, г. Брянск. E-mail: fmf.brgu@mail.ru
[2]магистрант, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского. Россия, г. Брянск. E-mail: pianist666665@yandex.ru
[3]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского.
Россия, г. Брянск. ORCID: 0000-0003-2270-1775. E-mail: mahinanm@yandex.ru
[4]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского.
Россия, г. Брянск. ORCID: 0000-0001-7829-6030. E-mail: vera.bednazh@mail.ru

Аннотация. В статье изучается возможность построения ограниченного оператора, отображающего пространство аналитических функций с углами на соответствующее пространство Лебега измеримых функций. Рассматриваются пространства, состоящие из конечного числа гладких дуг, образующих в точках стыка положительные углы заданного раствора. Исследуемый ограниченный оператор можно считать аналогом оператора Бергмана в указанных пространствах аналитических функций. Построение данного оператора выполнено на основе нового воспроизводящего ядра. Данное ядро содержит мнимую часть некоторой показательной функции с аргументом из рассматриваемой области. Доказательство утверждения основано на интегральном представлении аналитических функций в областях с угловыми точками и свойствами конформно-отображающих функций в таких областях. Работа может быть интересна специалистам в области комплексного и функционального анализа.

Ключевые слова: аналитическая функция, ограниченный оператор, область с углами.

Классическая теорема М. Рисса утверждает, что сингулярный интеграл с ядром Коши функции из $L^p(1<p<+\infty)$ пространства на действительной оси, является функцией класса Харди H^p в верхней полуплоскости.

Напомним, что пространство Харди (см. [17]) H^p, $0<p\le\infty$, определяется как множество функций аналитических в единичном круге, $f\in H(S)$, для которых

$$\|f\|_{H^p}\overset{def}{=}\sup_{0<r<1}M_p(r,f)<\infty,$$

где для $0<r<1$

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}(0<p<\infty);M_\infty(r,f)=\sup_{\theta\in R}\left|f(re^{i\theta})\right|.$$

Пусть $L^p(G)(1\le p<\infty)$ – пространство Лебега в G (G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости *C*), то есть множество функций, измеримых в области G и удовлетворяющих условию:

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_G\left|f(z)\right|^p dm_2(z)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Подпространство пространства $L^p(G)$, состоящее из функций, аналитических в области G, обозначим через $A^p(G)$.

Хорошо известно (данные результаты во многом определяются вышеуказанной теоремой М. Рисса), что в случае, когда G – область с гладкой границей, ограниченная и односвязная, то также существует ограниченный проектор, отображающий пространство $L^p(G)$ в $A^p(G)$.

Решением задачи о построении таких линейных ограниченных операторов, которые отображают пространства измеримых функций на порождаемые пространства аналитических функций, и приложениями данных вопросов занимались многие авторы в своих исследованиях. Отметим среди них, например, работы [1]–[3], [5]–[9], [12]–[16], [18]–[20].

Так, например, в работе [13] устанавливается, что для области G, граница которой является аналитической кривой во всех точках, кроме нуля, и образует угол раствора $\frac{\pi}{\alpha}$ в нуле (прямолинейный), оператор Бергмана $P_0(f)(z)=\int_G K(z,\zeta)f(\zeta)dm_2(\zeta)$ отображает пространство $L^p(G)$ на $A^p(G)$; ограничен при $\alpha\in[1,+\infty), p\in(1,+\infty)$, при $\frac{1}{2}\le\alpha<1, p\in\left(1,\frac{2}{\alpha+1}\right]\cup\left[\frac{2}{1-\alpha},+\infty\right)$; неограничен при остальных *p* и α.

В работах [4], [10], [11] также рассматриваются следующие классы функций и области с углами. Пусть $L^p_\beta(G)$ – класс измеримых по Лебегу в области G функций f таких, что

$$\int_G |f(w)|^p d^\beta(w,\partial G)dm_2(w)<+\infty, 0<p<+\infty, \beta>-1,$$

где dm_2 – плоская мера Лебега; $A^p_\beta(G)$ – подпространство пространства $L^p_\beta(G)$, состоящее из аналитических функций.

Пусть (см. [11]) *(C)* – класс односвязных областей *G* на комплексной плоскости *C*, граница Γ каждой из которых состоит из конечного числа гладких дуг Γ_j, образующих между собой в точках стыка w_j положительные внутренние углы $\frac{\pi}{\alpha_j}, \frac{1}{2}\le\alpha_j<+\infty,\ j=1,2,\dots,m,\ m=m(G)$. Доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть* $G\in(C)$; $\varphi(z):S\to G$; $\varphi(0)=w_0$, $\varphi'(0)>0$, $w_0\in G$, $\psi=\varphi^{-1}$. *Тогда интегральный оператор вида*

$$P_\eta(f)(w)=F(w)=\frac{\eta+1}{\pi}\int_G\frac{(1-|\psi(\mu)|^2)^\eta}{(1-\overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\eta+2}}f(\mu)|\psi'(\mu)|^2dm_2(\mu)$$

непрерывно отображает $L^p_\beta(G)$ *на* $A^p_\beta(G)$, $1\le p<+\infty$, $\beta>-1$, $\eta>\max\{2(\beta+1);\lambda\}$, $\lambda=\max_{1\le j\le m}(\frac{1}{\alpha_j}-1)(\beta+2)+\beta$, $\frac{1}{2}\le\alpha_j<+\infty$, $j=1,2,\dots,m$, $m=m(G)$, *причем существует постоянная* $c(\beta,p)$:

$$\|F\|_{A^p_\beta(G)}\le c(\beta,p)\|f\|_{L^p_\beta(G)}.$$

В нашей работе рассмотрены области вида $\Omega=\left\{w\in C:|\arg w|<\frac{\pi\alpha}{2}\right\}$ – плоский угол раствора $\pi\alpha$ при всех $0<\alpha\le 2$.

Оказывается, указанный в теореме 1 оператор можно построить не только с аналогом ядра Бергмана, но и с ядрами других видов, одно из которых мы приведем в теореме 2:

Теорема 2. *Пусть* $\Omega = \left\{ w \in C : \left| \arg w \right| < \dfrac{\pi\alpha}{2} \right\}$, $0 < \alpha \le 2$, $\beta > \max\left\{ 2\alpha - 2 - \dfrac{\alpha}{2q}, -\dfrac{\alpha}{2q} \right\}$, $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Тогда интегральный оператор $P(f)(w) = \int\limits_{\Omega} K(w,\mu) f(\mu) dm_2(\mu)$, *где*

$$K(w,\mu) = -\frac{\beta+1}{\pi}(2i)^{\beta} \frac{\left[\operatorname{Im} h(\mu)\right]^{\beta}}{\left[h(w) - \overline{h(\mu)}\right]^{\beta}} \left| h'(\mu) \right|^{2}, h(w) = ie^{\frac{1}{\alpha}\ln w},$$

отображает $L^p(\Omega)$ *в* $A^p(\Omega)$ *и является ограниченным.*

Если при этом $f(w) \in A^p(\Omega)$, $\beta > 2\left(\dfrac{a}{p} - 1 \right)$, $\beta \ge 0$, *то* $P(f)(w) \equiv f(w)$.

Доказательство данной теоремы следует из нескольких утверждений.

Лемма 1.

$$\int\limits_{\Pi_+} \frac{\chi^q(\zeta)\eta^{\beta}}{\left| z - \overline{\zeta} \right|^{\beta+2}} dm_2(\zeta) \le c_0(\alpha,\beta)\chi^q(z),$$

где $\chi(z) = 1 / y^{\alpha/2pq}, z = x + iy, z \in \Pi_+$, $\zeta = \zeta + i\eta$, $1 < p < +\infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \alpha > 0, \beta > \dfrac{\alpha}{2p} - 1$,

$c_0(\alpha,\beta)$ – некоторая положительная постоянная, зависящая только от α,β.

Доказательство.

$$\int\limits_{\Pi_+} \frac{\chi^q(\zeta)\eta^{\beta}}{\left| z - \overline{\zeta} \right|^{\beta+2}} dm_2(\zeta) = \int\limits_0^{+\infty} \eta^{\beta - \frac{\alpha}{2p}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\left| (x+iy) - (\xi - i\eta) \right|^{\beta+2}} \right) d\eta \le$$

$$\le \frac{2(\beta+2)}{\beta+1} \left(\int\limits_0^y \frac{\eta^{\beta - \frac{\alpha}{2p}}}{(y+\eta)^{\beta+1}} d\eta + \int\limits_y^{+\infty} \frac{\eta^{\beta - \frac{\alpha}{2p}}}{(y+\eta)^{\beta+1}} d\eta \right) \le$$

$$\le \frac{2(\beta+2)}{\beta+1} \left(\frac{1}{y^{\beta+1}} \int\limits_0^y \eta^{\beta - \frac{\alpha}{2p}} d\eta + \int\limits_y^{+\infty} \eta^{-1-\frac{\alpha}{2p}} d\eta \right) \le$$

$$\le \frac{2(\beta+2)}{\beta+1} \left(\frac{1}{\beta - \frac{\alpha}{2p} + 1} + \frac{2p}{\alpha} \right) y^{-\frac{\alpha}{2p}} = c_0(\alpha,\beta)\chi^q(z).$$

Использовали оценку $\beta > \dfrac{\alpha}{2p} - 1$ и следствие из теоремы Фубини.

Лемма 2.

$$\int\limits_{\Pi_+} \frac{\left| \gamma'(z) \right|^2 \chi^p(z)}{\left| z - \overline{\zeta} \right|^{\beta+2}} dm_2(z) \le c_1(\alpha,\beta) \frac{\left| \gamma'(\zeta) \right|^2 \chi^p(\zeta)}{\eta^{\beta}},$$

где $\zeta = \xi + i\eta, \zeta \in \Pi_+$, $\chi(z) = 1 / y^{\frac{\alpha}{2pq}}$, $\gamma(z) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha i}{2}\right)\exp\left(\alpha \ln z\right)$,

$$\beta > \max\{2\alpha - 2 - \frac{\alpha}{2q}, -\frac{\alpha}{2q}\}, 0 < \alpha \le 2.$$

Доказательство. Нетрудно показать, что в условиях леммы

$$\int_0^{+\infty} r^{2\alpha-1-\frac{\alpha}{2q}} dr \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(\sin\varphi)^{\frac{\alpha}{2q}}\left(\left(r-\rho\right)^2 + 4r\rho\sin^2\frac{\varphi+\theta}{2}\right)^{\frac{\beta+2}{2}}} \le \tilde{c}_1(\alpha,\beta)\frac{\rho^{2\alpha-\beta-2-\frac{\alpha}{2q}}}{(\sin\theta)^{\beta+2q}}.$$

Тогда $\int\limits_{\Pi_+} \frac{\left|\gamma'(z)\right|^2 \chi^p(z)}{\left|z-\bar{\zeta}\right|^{\beta+2}} dm_2(z) =$

$$= \alpha^2 \int_0^{+\infty} r^{2\alpha-1-\frac{\alpha}{2q}} dr \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(\sin\varphi)^{\frac{\alpha}{2q}}\left(\left(r-\rho\right)^2 + 4r\rho\sin^2\frac{\varphi+\theta}{2}\right)^{\frac{\beta+2}{2}}} \le$$

$$\tilde{c}_1(\alpha,\beta)\frac{\rho^{2\alpha-\beta-2-\frac{\alpha}{2q}}}{(\sin\theta)^{\beta+2q}} = c_1(\alpha,\beta)\frac{\left|\gamma'(\zeta)\right|^2 \chi^p(\zeta)}{\eta^\beta}.$$

Доказательство теоремы 2:

Пусть $f(w) \in L^p(\Omega), 1 < p < +\infty.$

Покажем, что в условиях теоремы $K(f) \in A^p(\Omega).$

Достаточно показать, что при соблюдении условий теоремы

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left|K(f)(w)\right|^p dm_2(w)\right)^{\frac{1}{p}} \le c_2(\alpha,\beta)\left\|f(w)\right\|_{L^p(G_\alpha)} < +\infty.$$

Рассмотрим функцию $G(z) = f(\gamma(z))$, где $\gamma(z) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha i}{2}\right)\exp\left(\alpha \ln z\right).$

Данная функция выполняет однолистное отображение верхней полуплоскости Π_+ на область Ω.

Далее, $\int\limits_{\Omega} \left|K(f)(w)\right|^p dm_2(w) = \frac{\beta+1}{\pi}(2i)^\beta \int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{\Omega} \frac{\left[\operatorname{Im} h(\mu)\right]^\beta}{\left[h(w)-\overline{h(\mu)}\right]^{\beta+2}}\left|h'(\mu)\right|^2 f(\mu) dm_2(\mu)\right|^p dm_2(w) \le$

$$\le \frac{\beta+1}{\pi}(2i)^\beta \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta}{\left[h(w)-\bar{\zeta}\right]^{\beta+2}}\left|G(\zeta)\right| dm_2(\zeta)\right)^p dm_2(w) =$$

$$= \frac{\beta+1}{\pi}(2i)^\beta \int\limits_{\Pi_+}\left|\gamma'(z)\right|^2\left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta}{\left[z-\bar{\zeta}\right]^{\beta+2}}\left|G(\zeta)\right| dm_2(\zeta)\right)^p dm_2(z).$$

Используя неравенство Гельдера, получаем:

$$\int\limits_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2}} \left|G(\zeta)\right| dm_2(\zeta) \right)^p dm_2(z) \le$$

$$= \int\limits_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right| \eta^{\frac{\beta}{p}}}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\frac{\beta+2}{p}} \chi(\zeta)} \frac{\eta^{\frac{\beta}{q}} \chi(\zeta)}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\frac{\beta+2}{q}}} dm_2(\zeta) \right)^p dm_2(z) \le$$

$$\le \int\limits_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right|^p \eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2} \chi^p(\zeta)} dm_2(\zeta) \left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta \chi^q(\zeta)}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2}} dm_2(\zeta) \right)^{p/q} \right) dm_2(z).$$

Так как $f(w) \in L^p(\Omega), 1 < p < +\infty$, то

$$\int\limits_{\Pi_+} \left|K(f)(w)\right|^p dm_2(w) = \left(\left\|f\right\|^p_{L^p(G_\alpha)} \right)^{1/p} < +\infty.$$

Из леммы 2 $\displaystyle\int\limits_{\Pi_+} \frac{\left|\gamma'(z)\right|^2 \chi^p(z)}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^{\beta+2}} dm_2(z) \le c_1(\alpha,\beta) \frac{\left|\gamma'(\zeta)\right|^2 \chi^p(\zeta)}{\eta^\beta}.$

Тогда

$$\int\limits_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \chi^p(z) \left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right|^p \eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2} \chi^p(\zeta)} dm_2(\zeta) \right) dm_2(z) \le c(\alpha,\beta) \left(\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \right)^p < +\infty.$$

Далее, так как $\beta > \max\left\{ 2\alpha - 2 - \frac{\alpha}{2q}, -\frac{\alpha}{2q} \right\}, 0 < \alpha \le 2,$

то согласно лемме 1 $\displaystyle\int\limits_{\Pi_+} \frac{\chi^q(\zeta)\eta^\beta}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^{\beta+2}} dm_2(\zeta) \le c_0(\alpha,\beta)\chi^q(z),$ а значит,

$$\int\limits_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right|^p \eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2} \chi^p(\zeta)} dm_2(\zeta) \left(\int\limits_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta \chi^q(\zeta)}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2}} dm_2(\zeta) \right)^{p/q} \right) dm_2(z) \le$$

$\le c_1(\alpha,\beta) \left(\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \right)^p < +\infty.$ Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Антоненкова О. Е., Часова Н. А.* Об интегральных операторах в пространствах аналитических в верхнем полупространстве функций со смешанной нормой // Ученые записки Брянского государственного университета. 2017. № 3 (7). С. 7–14.

2. *Беднаж В. А.* О кратной интерполяции в классах Р. Неванлинны в единичном круге // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2008. № 1 (143). С. 3–4.

3. *Беднаж В. А.* Описание следов, характеризация главных частей в разложении Лорана классов мероморфных функций с ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны: специальность 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» : дисс. … канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2007. 116 с.

4. *Махина Н. М.* Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестник Омского университета. 2018. Т. 23:3. С. 47–51.

5. *Махина Н. М.* О сопряженных пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420–423.

6. *Махина Н. М.* Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 16–22.

7. *Махина Н. М., Шамоян Ф. А.* Базисы в весовых пространствах функций, аналитических в областях со спрямляемой границей // Вестник Брянского государственного университета. 2013. № 4. С. 27–30.

8. *Родикова Е. Г., Беднаж В. А.* Об интерполяции в классах И. И. Привалова в круге // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 1762–1775.

9. *Соловьев А. А.* Оценки в Lp интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций // Сибирский математический журнал. 1985. Т. 26:3. С. 168–191.

10. *Ткаченко Н. М.* Весовые Lp-оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости: специальность 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» : дисс. … канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2009. 116 с.

11. *Ткаченко Н. М.* Об оценках модуля производной аналитической в угловой области функции // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2008. № 1 (37). С. 96–98.

12. *Шамоян Ф. А., Беднаж В. А.* Об инвариантности класса N_α^∞ относительно оператора дифференцирования // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. С. 106–111.

13. *Шихватов А. М.* О пространствах аналитических функций в области с угловой точкой // Математические заметки. 1975. Т. 18:3. С. 411–420.

14. *Antonenkova O. E., Shamoyan F. A.* The Cauchy transform of continuous linear functionals and projections on the weighted spaces of analytic functions // Siberian Mathematical Journal. 2005. V. 46:6. Pp. 969–994.

15. *Bednazh V. A., Rodikova E. G., Shamoyan F. A.* Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series for meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic // Complex analysis and operator theory. 2017. V. 11:1. Pp. 197–215.

16. *Burbea J.* The Bergman projection over plane regions // Ark. for mat. 1980. V.18:1. Pp. 207–221.

17. *Duren P. L.* Theory of Hp Spaces. New York/London : Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York : Dover. 292 p.

18. *Hedenmalm H.* The dual of Bergman Space on Simply connected domains // J. d' Analyse Mathematique. 2002. V. 88. Pp. 311–335.

19. *Shamoyan F. A., Bednazh V. A., Karbanovich O. V.* On classes of analytic functions in a disk with a characteristic R. Nevanlinny and α-characteristic of weighted Lp spaces // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 150–167.

20. *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On continuous linear functionals in SOME weighted functional classes on product domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 651–678.

Some bounded integral operators in domains with angles

V. V. Bortsov[1], A. S. Nesterov[2], N. M. Mahina[3], V. A. Bednazh[4]

[1]master student of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky. Russia, Bryansk. E-mail: fmf.brgu@mail.ru

[2]master student, associate professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky. Russia, Bryansk. E-mail: pianist666665@yandex.ru

[3]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematical Analysis,
Algebra and Geometry, Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky.
Russia, Bryansk. ORCID: 0000-0003-2270-1775. E-mail: mahinanm@yandex.ru

[4]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematical Analysis,
Algebra and Geometry, Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky.
Russia, Bryansk. ORCID: 0000-0001-7829-6030. E-mail: vera.bednazh@mail.ru

Abstract. The article studies the possibility of constructing a bounded operator mapping the space of analytic functions with angles to the corresponding Lebesgue space of measurable functions. Spaces consisting of a finite number of smooth arcs forming positive angles of a given solution at the junction points are considered. The studied bounded operator can be considered an analogue of the Bergman operator in the specified spaces of analytic functions. The construction of this operator is based on a new reproducing core. This kernel contains an imaginary part of some exponential function with an argument from the domain under consideration. The proof of the statement is based on an integral representation of analytic functions in domains with corner points and properties of conformal mapping functions in such domains. The work may be of interest to specialists in the field of complex and functional analysis.

Keywords: analytical function, bounded operator, area with angles.

References

1. *Antonenkova O. E., Chasova N. A. Ob integral'nyh operatorah v prostranstvah analiticheskih v verhnem poluprostranstve funkcij so smeshannoj normoj* [On integral operators in spaces of analytic functions with mixed norm in the upper half-space] // *Uchenye zapiski Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Scientific Notes of Bryansk State University. 2017. No. 3 (7). Pp. 7–14.

2. *Bednazh V. A. O kratnoj interpolyacii v klassah R. Nevanlinny v edinichnom kruge* [On multiple interpolation in R. Nevanlinna's classes in a single circle] // *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Seriya: Estestvennye nauki* – News of higher educational institutions. The North Caucasus region. Series: Natural Sciences. 2008. No. 1 (143). Pp. 3–4.

3. *Bednazh V. A. Opisanie sledov, harakterizaciya glavnyh chastej v razlozhenii Lorana klassov meromorfnyh funkcij s ogranicheniyami na rost harakteristiki R. Nevanlinny: special'nost' 01.01.01 "Veshchestvennyj, kompleksnyj i funkcional'nyj analiz" : diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Description of traces, characterization of the main parts in the Laurent decomposition of classes of meromorphic functions with restrictions on the growth of R. Nevanlinna's characteristics: specialty 01.01.01 "Real, complex and functional analysis" : diss. ... PhD in Physical and Mathematical Sciences]. Bryansk. 2007. 116 p.

4. *Mahina N. M. Nekotorye ocenki konformno otobrazhayushchej funkcii v oblastyah s kusochno-gladkoj i asimptoticheski konformnoj granicej* [Some estimates of a conformally mapping function in regions with piecewise smooth and asymptotically conformal boundary] // *Vestnik Omskogo universiteta* – Herald of Omsk University. 2018. Vol. 23:3. Pp. 47–51.

5. *Mahina N. M. O sopryazhennyh prostranstvah k nekotorym vesovym prostranstvam analiticheskih funkcij* [On conjugate spaces to some weight spaces of analytic functions] // *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of Bryansk State University. 2015. No. 2. Pp. 420–423.

6. *Mahina N. M. Ocenki proizvodnyh analiticheskih i garmonicheskih funkcij v nekotoryh oblastyah kompleksnoj ploskost* [Estimates of derivatives of analytical and harmonic functions in some areas of the complex plane] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* – Herald of Moscow State Regional University. Series: Physics-Mathematics. 2017. No. 2. Pp. 16–22.

7. *Mahina N. M., Shamoyan F. A. Bazisy v vesovyh prostranstvah funkcij, analiticheskih v oblastyah so spryamlyaemoj granicej* [Bases in weight spaces of analytic functions in domains with a rectified boundary] // *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of the Bryansk State University. 2013. No. 4. Pp. 27–30.

8. *Rodikova E. G., Bednazh V. A. Ob interpolyacii v klassah I. I. Privalova v kruge* [On interpolation in I. I. Privalov's classes in a circle] // *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* – Siberian Electronic Mathematical News. 2019. Vol. 16. Pp. 1762–1775.

9. *Solov'ev A. A. Ocenki v Lp integral'nyh operatorov, svyazannyh s prostranstvami analiticheskih i garmonicheskih funkcij* [Estimates in Lp of integral operators associated with spaces of analytic and harmonic functions] // *Sibirskij matematicheskij zhurnal* – Siberian Mathematical Journal. 1985. Vol. 26:3. Pp. 168–191.

10. *Tkachenko N. M. Vesovye Lp-ocenki analiticheskih i garmonicheskih funkcij v odnosvyaznyh oblastyah kompleksnoj ploskosti: special'nost' 01.01.01 "Veshchestvennyj, kompleksnyj i funkcional'nyj analiz" : diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Weighted Lp-estimates of analytical and harmonic functions in simply connected domains of the complex plane: specialty 01.01.01 "Real, complex and functional analysis" : diss. ... PhD in Physical and Mathematical Sciences]. Bryansk. 2009. 116 p.

11. *Tkachenko N. M. Ob ocenkah modulya proizvodnoj analiticheskoj v uglovoj oblasti funkcii* [On estimates of the module of an analytical derivative in the angular domain of a function] // *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* – Herald of Izhevsk State Technical University. 2008. No. 1 (37). Pp. 96–98.

12. *Shamoyan F. A., Bednazh V. A. Ob invariantnosti klassa otnositel'no operatora differencirovaniya* [On the invariance of a class with respect to the differentiation operator] // *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of Bryansk State University. 2009. No. 4. Pp. 106–111.

13. *Shihvatov A. M. O prostranstvah analiticheskih funkcij v oblasti s uglovoj tochkoj* [On spaces of analytic functions in a domain with an angular point] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1975. Vol. 18:3. Pp. 411–420.

14. *Antonenkova O. E., Shamoyan F. A.* The Cauchy transform of continuous linear functionals and projections on the weighted spaces of analytic functions // Siberian Mathematical Journal. 2005. V. 46:6. Pp. 969–994.

15. *Bednazh V. A., Rodikova E. G., Shamoyan F. A.* Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series for meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic // Complex analysis and operator theory. 2017. V. 11:1. Pp. 197–215.

16. *Burbea J.* The Bergman projection over plane regions // Ark. for mat. 1980. V.18:1. Pp. 207–221.

17. *Duren P. L.* Theory of Hp Spaces. New York/London : Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York : Dover. 292 p.

18. *Hedenmalm H.* The dual of Bergman Space on Simply connected domains // J. d' Analyse Mathematique. 2002. V. 88. Pp. 311–335.

19. *Shamoyan F. A., Bednazh V. A., Karbanovich O. V.* On classes of analytic functions in a disk with a characteristic R. Nevanlinny and α-characteristic of weighted Lp spaces // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 150–167.

20. *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On continuous linear functionals in SOME weighted functional classes on product domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 651–678.