УДК 510.22 DOI 10.25730/VSU.0536.22.002

Размерность упорядоченных множеств и ее свойства

Е. М. Вечтомов[1], И. А. Сазанов[2]

[1]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

[2]магистрант кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: ivan.sazmem@gmail.com

Аннотация. Анализируется понятие размерности упорядоченного множества. Доказаны существование и инвариантность размерности произвольных упорядоченных множеств. Доказаны основные свойства размерности конечных упорядоченных множеств. Приведены иллюстрирующие примеры. Рассматривается также полукольцо классов изоморфности упорядоченных множеств.

Ключевые слова: упорядоченное множество, конечное упорядоченное множество, цепь, размерность, свойства размерности.

Введение. Теория упорядоченных множеств – часть современной математики, возникшая в рамках теории множеств в 1920–1930 гг. Создателем теории множеств был немецкий математик Георг Кантор (1845–1916) [см. 1]. Порядковая структура является одной из трех фундаментальных математических структур – наряду с алгебраической и топологической структурами, выделенными группой Никола Бурбаки [3], объединившей в один коллектив видных французских математиков середины XX в. В 1940 г. вышло первое издание известной монографии [2], написанной основоположником теории решеток американским математиком Гарреттом Биркгофом (1911–1996). В настоящее время теория упорядоченных множеств и решеток служит одним из классических направлений современной математики [см. 2; 7; 11; 12; 13; 14; 15], играет важную роль в абстрактной алгебре, общей топологии, функциональном анализе, дискретной математике и компьютерных науках. Основы теории упорядоченных множеств можно найти в следующих источниках: [1, глава 1], [7, глава 3], [12, глава 3], [12, глава 3], [14, параграф 1], [15, глава 3]. Отметим также, что изучению упорядоченных множеств посвящены наши работы [4; 5; 6; 8; 9; 10].

Понятие размерности конечного упорядоченного множества появилось в начале 50-х гг. XX в. До сих пор это понятие вызывает интерес у математиков. Скажем, отдельно исследовались упорядоченные множества размерности 2. Теорема о совпадении порядковой и мультипликативной размерностей впервые опубликована норвежским математиком Ойстином Оре (1899–1968) в 1962 г. [13, теорема 10.4.2]. Дополнительная информация содержится в книге американского математика Ричарда Стенли (1944 г. р.) [15, с. 263].

В статье определяются исходные понятия порядковой структуры. Вводится общее понятие размерности упорядоченного множества. Приведены иллюстрирующие теорию примеры. Доказываются свойства функции размерности на множестве всех конечных упорядоченных множеств.

1. Основные понятия. Приведем определения базовых порядковых понятий.

Зафиксируем множества A и B. *Упорядоченной парой* (a, b), $a\in A$ и $b\in B$, называется объект, имеющий две компоненты (или координаты): первую – a, вторую – b. Предполагается, что равенство пар $(a, b)=(c, d)$ означает, что $a=c$ и $b=d$. *Прямым произведением* множеств A и B называется множество

$$A\times B = \{(a, b)\colon a\in A \ \&\ b\in B\}$$

всевозможных упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B.

Бинарным отношением (или *соответствием*) между множествами A и B называется произвольная направленная связь (закон) ρ между отдельными элементами $a\in A$ и $b\in B$. Если элементы a и b связаны ρ, то пишут $a\rho b$ и говорят также, что a и b находятся в отношении ρ. При $A=B$ отношение ρ называют *бинарным отношением на множестве A*. Говоря формально, *бинарным отношением* между множествами A и B называется любое подмножество ρ прямого произведения $A\times B$, то есть произвольное множество упорядоченных пар $(a; b)$, $a\in A$, $b\in B$. Связь между содержательным и формальным определениями бинарного отношения задается отождествлением $\rho\equiv\{(a; b)\colon a\rho b\}$.

Определение 1. (*Частично*) *упорядоченное множество* $\langle A, \leq\rangle$ – это непустое множество A с заданным на нем рефлексивным ($\forall a\in A\colon a\leq a$), транзитивным ($\forall a, b, c\in A\colon a\leq b\leq c \Rightarrow a\leq c$) и антисимметричным ($\forall a, b\in A\colon a\leq b\leq a \Rightarrow a=b$) бинарным отношением $\leq$, называемым *порядком* на A.

Отношение порядка, как правило, обозначается $\leq$ и зачастую опускается при упоминании упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$. Для упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ упорядоченное множество $\langle A, \geq\rangle$ называется *двойственным*, где $a\geq b$ означает $b\leq a$. Упорядоченное множество, изоморфное своему двойственному упорядоченному множеству, называется *самодвойственным*. Легко видеть, что имеет место *принцип двойственности*: если в теореме, сформулированной в терминах отношения порядка $\leq$, заменить порядок $\leq$ на двойственный порядок $\geq$, то снова получим теорему об упорядоченных множествах.

Пусть $\langle A, \leq\rangle$ – произвольное упорядоченное множество. Элементы $a, b\in A$ называются *сравнимыми*, если $a\leq b$ или $b\leq a$; в противном случае – *несравнимыми*. *Линейный порядок* есть такой порядок на множестве A, что любые два элемента из A сравнимы.

Элемент $a\in A$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x\leq a$ ($a\leq x$) для всех $x\in A$. Заметим, что наибольший (наименьший) элемент упорядоченного множества единственен, если он существует.

Элемент из A называется *максимальным* (*минимальным*), если в A нет больших (меньших) его элементов. Если в A существует наибольший (наименьший) элемент, то он является единственным максимальным (минимальным) элементом.

Пусть теперь B – непустое подмножество упорядоченного множества A. Элемент $a\in A$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* B, если $b\leq a$ ($a\leq b$) для всех $b\in B$. *Точной верхней* (*нижней*) *гранью* B называется наименьший (наибольший) элемент множества всех верхних (нижних) граней B в A, обозначаемый $\sup B$ ($\inf B$). Отметим, что $\sup B$ ($\inf B$) может как существовать, так и не существовать, принадлежать B или не принадлежать B. Существование $\sup A$ ($\inf A$) означает, что A имеет наибольший (наименьший) элемент. Множество B называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если B имеет в A хотя бы одну верхнюю (нижнюю) грань.

Упорядоченное множество называется:

цепью или *линейно упорядоченным*, если порядок на нем – линейный;

антицепью, если любые два его различных элемента несравнимы;

вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество обладает наименьшим элементом;

решеткой, если любые два его элемента имеют точные верхнюю и нижнюю грани.

Легко видеть, что вполне упорядоченные множества являются цепями, а цепи являются решетками.

Пусть $f\colon \langle A, \leq\rangle \to \langle B, \leq\rangle$ – отображение упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ в упорядоченное множество $\langle B, \leq\rangle$. Отображение f называется *изотонным*, если $x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$ для всех $x, y\in A$.

Определение 2. Взаимно однозначное отображение f между упорядоченными множествами A и B, для которого отображения f и f^{-1} – изотонные, то есть

$$(\forall x, y\in A)\ x\leq y \Leftrightarrow f(x)\leq f(y),$$

называется (*порядковым*) *изоморфизмом*, а сами упорядоченные множества A и B – *изоморфными*. Изоморфные упорядоченные множества обладают одними и теми же порядковыми свойствами.

Для наглядного изображения конечных упорядоченных множеств с небольшим числом элементов используются диаграммы Хассе [7, с. 122, 123].

Конечные упорядоченные множества A обладают важными числовыми инвариантами, такими как длина, ширина, размерность. *Длиной* A называется наибольшее из чисел элементов его цепей, уменьшенное на 1. *Ширина* X есть наибольшее из чисел элементов всевозможных антицепей в A. А под *размерностью* $\langle A, \leq\rangle$ понимается наименьшее число линейных порядков на A, пересечением которых является данный порядок $\leq$ на A.

2. Операции над упорядоченными множествами. Определим четыре операции над упорядоченными множествами A и B. *Суммой* (*порядковой суммой*) A и B называется упорядоченное множество $A+B$ ($A\oplus B$), носителем которого служит дизъюнктное объединение множеств A и B, а порядок $\leq$ продолжает порядки на A и на B и для любых $a\in A$ и $b\in B$ элементы a и b несравнимы ($a<b$, соответственно). *Прямым произведением* (*лексикографическим произведением*) A и B называется их теоретико-множественное прямое произведение $A\times B$ с покоординатным порядком: $(a_1, b_1)\leq(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1\leq a_2$ и $b_1\leq b_2$ (соответственно, с лексикографическим порядком: $(a_1, b_1)\leq(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1<a_2$ или $(a_1=a_2$ и $b_1\leq b_2))$ для всех $a_1, a_2\in A$ и $b_1, b_2\in B$.

Операции суммы (называемой еще кардинальной), порядковой (или ординальной) суммы, прямого и лексикографического произведений можно обобщить на произвольное семейство $(A_i)_{i\in I}$ упорядоченных множеств A_i, индексированное элементами упорядоченного множества I [14, с. 15].

Определим покоординатный порядок $\leq$ и лексикографический порядок $\angle$ (рефлексивность предполагается) на прямом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ произвольных упорядоченных множеств A_1, $A_2,\ldots, A_n$. Для любых двух n-ок из $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ положим:

$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\leq(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1\leq b_1,\ a_2\leq b_2,\ldots, a_n\leq b_n;$$

$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\angle(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1<b_1 \text{ или } \exists k>0\ (a_1=b_1,\ldots, a_k=b_k,\ a_{k+1}<b_{k+1}).$$

Из определения лексикографического порядка непосредственно вытекает

Предложение 1. *Если упорядоченные множества $A_1, A_2,\ldots, A_n$ являются цепями (вполне упорядоченными множествами), то лексикографический порядок на их прямом произведении также будет линейным (соответственно, полным линейным) порядком.*

Предложение 2. *Покоординатный порядок на прямом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ упорядоченных множеств A_i равен пересечению n лексикографических порядков, ассоциированных с перестановками $12\ldots n$, $21\ldots n$,…, $n1\ldots n{-}1$.*

Доказательство. Легко видеть, что покоординатный порядок $\leq$ на прямом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ равен пересечению n лексикографических порядков $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_n$, где $\angle_1=\angle$ из определения,

$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\angle_2(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_2<b_2 \text{ или } \exists k\geq 0\ (a_2=b_2,\ldots, a_k=b_k,\ a_{k+1}<b_{k+1}),$$

$$\ldots,$$

$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\angle_n(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_n<b_n \text{ или } \exists k\geq 0\ (a_n=b_n,\ldots, a_k=b_k,\ a_{k+1}<b_{k+1}).$$

3. Размерность. Инвариантность и существование. Определим понятие размерности произвольного упорядоченного множества.

Определение 3. (*Порядковой*) *размерностью* $\mathrm{ord}(A)$ упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ называется наименьшая из мощностей $|I|$ множеств $\{\leq_i: i\in I\}$ линейных порядков $\leq_i$ на A, пересечение которых совпадает с данным порядком:

$$a\leq b \Leftrightarrow \forall i\in I\ a\leq_i b \text{ (для любых } a, b\in A).$$

Определение 4. *Мультипликативной размерностью* $\mathrm{mud}(A)$ упорядоченного множества A называется наименьшая из мощностей $|I|$ семейств $(A_i)_{i\in I}$ (неодноэлементных) цепей A_i, в прямое произведение которых изоморфно вкладывается A.

Предложение 3 (о продолжении порядка). *Если a, b – несравнимые элементы упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$, то на A существует продолжающий $\leq$ порядок ρ (то есть $\leq\subseteq\rho$), для которого $a\rho b$.*

Доказательство. Пусть даны упорядоченное множество $\langle A, \leq\rangle$ и несравнимые элементы a, $b\in A$. Определим на множестве A бинарное отношение ρ следующим образом: для любых $x, y\in A$ положим

$$x\rho y \Leftrightarrow x\leq y \text{ или } x\leq a,\ b\leq y.$$

Ясно, что $\leq\subseteq\rho$ и $a\rho b$. Покажем, что $\langle A, \rho\rangle$ – упорядоченное множество, то есть ρ есть отношение порядка на множестве A. Рефлексивность отношения ρ очевидна. Пусть $x\rho y$ и $y\rho z$ для элементов $x, y, z\in A$. Если $x\leq y$, то $x\leq z$ в случае $y\leq z$ и $x\rho z$ в случае $y\leq a$, $b\leq z$. Аналогично, $x\rho z$, если $y\leq z$. Поскольку элементы a и b не сравнимы относительно порядка $\leq$, то одновременное выполнение пар неравенств $x\leq a$, $b\leq y$ и $y\leq a$, $b\leq z$ невозможно. Что доказывает транзитивность отношения ρ. Наконец, предположим, что $x\rho y$ и $y\rho x$. Если $x\leq y$ и $y\leq x$, то $x=y$. Если $x\leq y$ и $y\leq a$, $b\leq x$, то $b\leq x\leq y\leq a$, откуда $b\leq a$, что невозможно. В остальных двух случаях также получаем противоречие с несравнимостью элементов a и b. Поэтому отношение ρ антисимметрично. Предложение доказано.

Предложение 4. *Максимальные порядки на любом непустом множестве совпадают с линейными порядками на этом множестве.*

Доказательство. Рассмотрим множество M всевозможных порядков ρ на произвольно взятом непустом множестве A. Множество M является подмножеством булеана $\mathrm{B}(A\times A)$. Поэтому само M служит упорядоченным множеством относительно отношения включения $\subseteq$ множеств пар: $\rho\subseteq\sigma$ для любых порядков ρ, σ на A. Очевидно, что линейные порядки на A будут максимальными элементами упорядоченного множества $\langle M, \subseteq\rangle$. Обратно, пусть $\leq$ – максимальный порядок на множестве A. Если порядок $\leq$ не линейный, то в упорядоченном множестве $\langle A, \leq\rangle$ существуют несравнимые элементы a, b. Но тогда порядок $\leq$ строго содержится в порядке ρ из предложения 3.

Лемма Цорна. *Если любая цепь в упорядоченном множестве ограничена сверху, то это упорядоченное множество обладает хотя бы одним максимальным элементом.*

Это утверждение доказал американский математик немецкого происхождения Макс Цорн (1906–1993) в 1935 г. Заметим, что в теории множеств лемма Цорна эквивалентна знаменитой *аксиоме выбора*, поэтому она может быть принята без доказательства. Кроме того, лемма Цорна равносильна теореме Цермело (1904 г.), утверждающей, что каждое непустое множество A можно вполне упорядочить. Немецкий математик Эрнст Цермело (1871–1953) – один из основоположников аксиоматической теории множеств.

На основании принципа двойственности получаем

Предложение 5. *Верно утверждение, двойственное лемме Цорна.*

Теорема 1 (продолжаемость до линейного порядка). *Всякий порядок на любом непустом множестве вкладывается в некоторый линейный порядок на этом множестве.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \leq\rangle$ – произвольное упорядоченное множество. Обозначим через N подмножество множества M всех тех порядков на A, которые содержат данный порядок $\leq$. Получаем упорядоченное множество $\langle N, \subseteq\rangle$. Покажем, что оно удовлетворяет условию леммы Цорна. Для этого возьмем в $\langle N, \subseteq\rangle$ произвольную цепь $\{\leq_i: i\in I\}$ порядков $\leq_i$. Это означает, что любых индексов $i, j\in I$ имеем $\leq_i\subseteq\leq_j$ или $\leq_j\subseteq\leq_i$. Рассмотрим их объединение $\rho=\cup\{\leq_i: i\in I\}$, которое также будет отношением порядка на A. Действительно, пусть $a, b, c\in A$. Ясно, что $a\rho a$ (рефлексивность). Если $a\rho b$ и $b\rho c$, то $a\leq_i b$ и $b\leq_j c$ для некоторых $i, j\in I$. Но тогда $a\leq_k b$ и $b\leq_k c$ при $k=i$ или j. Поэтому $a\leq_k c$ и, значит, $a\rho c$ (транзитивность). Если же $a\rho b$ и $b\rho a$, то снова $a\leq_k b$ и $b\leq_k a$ для подходящего $k\in I$. Поэтому $a=b$ (антисимметричность). Получили порядок $\rho\in N$ – точную верхнюю грань цепи $\{\leq_i: i\in I\}$. По лемме Цорна упорядоченное множество $\langle N, \subseteq\rangle$ имеет максимальный элемент – порядок σ, являющийся максимальным порядком на множестве A. В силу предложения 4 σ будет искомым линейным порядком на A.

Замечание 1. Теорема 1 впервые сформулирована и доказана польским математиком Эдвардом Шпильрайном (1907–1976) в 1930 г. с применением аксиомы выбора. Известно, что теорема Шпильрайна слабее аксиомы выбора.

Замечание 2. Для конечных упорядоченных множеств теорема 1 доказывается без применения леммы Цорна. Для этого требуется конечное число раз использовать предложение 3.

Теорема 2 (существование и инвариантность размерности). *Любое упорядоченное множество имеет размерность. При этом изоморфные упорядоченные множества имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Пусть дано упорядоченное множество $\langle A, \leq\rangle$. Возьмем произвольную пару $a, b\in A$ несравнимых элементов. По предложению 3 на A существует порядок ρ, содержащий порядок $\leq$ и удовлетворяющий соотношению $a\rho b$. По теореме 1 порядок ρ продолжается до некоторого линейного порядка на A; обозначим его $\rho(a, b)$. Вместе с порядком $\rho(a, b)$ имеем линейный порядок $\rho(b, a)$, для которого $b\rho(b, a)a$. Очевидно, что пересечение линейных порядков $\rho(a, b)$ по всем упорядоченным парам несравнимых элементов $a, b\in A$ равно исходному порядку $\leq$.

Рассмотрим множество всех множеств $\{\leq_i: i\in I\}$ линейных порядков $\leq_I$ на множестве A, дающих в пересечении порядок $\leq$. Поскольку класс мощностей (кардинальных чисел) вполне упорядочен по величине, то среди мощностей $|I|$ указанных индексных множеств I имеется наименьшая мощность, обозначаемая $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(\langle A, \leq\rangle)$ и являющаяся размерностью упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$. Тем самым, мы доказали существование размерности любого упорядоченного множества.

Докажем инвариантность размерности: изоморфные упорядоченные множества имеют одинаковую размерность. Пусть f: $\langle A, \leq\rangle \to \langle B, \angle\rangle$ – изоморфизм упорядоченных множеств. Изоморфные упорядоченные множества служат копиями друг друга. Введем наглядные обозначения $\boldsymbol{A}:=B$, $\boldsymbol{\leq}:=\angle$ и $\boldsymbol{x}:=f(x)$ для каждого $x\in A$. Тогда $x\leq y \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\boldsymbol{\leq}\boldsymbol{y}$ при любых $x, y\in A$. Аналогичная эквиваленция имеет место и для любого бинарного отношения ρ на A и его «двойника» $\boldsymbol{\rho}$ на $\boldsymbol{A}$. Очевидно, что ρ является отношением порядка (линейным порядком) на A тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\rho}$ будет отношением порядка (линейным порядком) на $\boldsymbol{A}$. Поэтому равенство $\leq=\cap\{\leq_i: i\in I\}$ эквивалентно равенству $\boldsymbol{\leq}=\cap\{\boldsymbol{\leq_i}: i\in I\}$ (порядки выделены жирным шрифтом) для любого множества линейных порядков $\leq_i$ $(i\in I)$ на множестве A. Следовательно, $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(\boldsymbol{A})=\mathrm{ord}(B)$.

Предложение 6. *Размерности двойственных друг другу упорядоченных множеств совпадают.*

Замечание 3. В случае конечных упорядоченных множеств мощности суть натуральные числа. Поэтому при доказательстве теоремы 2 для конечных упорядоченных множеств достаточно воспользоваться принципом наименьшего числа: всякое непустое множество натуральных чисел обладает наименьшим элементом. Фактически это означает, что множество $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел с естественным порядком является вполне упорядоченным множеством, что эквивалентно принципу математической индукции.

Замечание 4. По сути, теорема 2 – это теорема Дашника – Миллера 1941 г., утверждающая, что каждый порядок на произвольном непустом множестве является пересечением содержащих его линейных порядков.

Пример 1. Очевидно, что цепи суть в точности упорядоченные множества размерности 1.

Пример 2. Размерность любой неодноэлементной антицепи равна 2. В самом деле, пусть A – антицепь, то есть множество A берется с отношением равенства 1_A на нем. По теореме 1 порядок 1_A содержится в некотором линейном порядке $\leq_1$ на A. Через $\leq_2$ обозначим обратный к $\leq_1$ линейный порядок на A: $x\leq_2 y \Leftrightarrow y\leq_1 x$ для любых элементов $x, y\in A$. Тогда $\leq_1\cap\leq_2=1_A$. Так как неодноэлементные антицепи не являются цепями, то $\mathrm{ord}(A)=2$.

Далее, пусть порядок $\leq$ на конечном упорядоченном множестве A есть пересечение n линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$. Рассмотрим цепи $A_1=\langle A, \leq_1\rangle$, $A_2=\langle A, \leq_2\rangle$, …, $A_n=\langle A, \leq_n\rangle$ и их прямое произведение $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ с покоординатным порядком $\leq$. Положим

$$f: A\to A_1\times A_2\times\ldots\times A_n, f(a)=(a, a, \ldots, a) \text{ для всех } a\in A.$$

Отображение f инъективно. Для любых $a, b\in A$ имеем:

$$a\leq b \Leftrightarrow (\forall i=1, 2, \ldots, n)\ a\leq_i b \Leftrightarrow f(a)\leq f(b).$$

Стало быть, упорядоченное множество A изоморфно упорядоченному подмножеству $f(A)$ прямого произведения n цепей. При $n=\mathrm{ord}(A)$ заключаем, что $\mathrm{mud}(A)\leq\mathrm{ord}(A)$.

Теорема 3 (мультипликативность, теорема Оре). *Размерность любого конечного упорядоченного множества A совпадает с его мультипликативной размерностью: ord(A)=mud(A).*

Доказательство. Остается проверить выполнение обратного неравенства $\mathrm{ord}(A)\leq\mathrm{mud}(A)$. Предположим, что конечное упорядоченное множество A изоморфно упорядоченному подмножеству $\langle B, \leq\rangle$ прямого произведения n цепей $A_1, A_2, , A_n$. В силу предложений 1 и 2 порядок $\leq$ является пересечением n линейных порядков $(B\times B)\cap\angle_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Поэтому при $n=\mathrm{mud}(A)$ получаем $\mathrm{ord}(A)\leq\mathrm{mud}(A)$. Следовательно, $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{mud}(A)$.

Замечание 5. Теорема 3 верна и для произвольных бесконечных упорядоченных множеств, только слова *натуральное число n* следует заменить на слова *мощность n*.

4. Размерность малых упорядоченных множеств.

Пример 3. Все существующие (с точностью до изоморфизма) 82 упорядоченных множества, имеющие не более пяти элементов и не являющиеся цепями, имеют размерность 2. Кроме того, среди 318 шестиэлементных упорядоченных множеств одно имеет размерность 1 (цепь), три – размерность 3, остальные 314 – размерность 2 [см. 12, с. 113].

Пример 4. Если B – упорядоченное множество, полученное из упорядоченного множества A добавлением (новых) наибольшего и наименьшего элементов, то $\mathrm{ord}(B)=\mathrm{ord}(A)$.

Пример 5. Рассмотрим шестиэлементное упорядоченное множество $A=\{a, b, c, d, e, f\}$ со следующим порядком $\leq$: $a<d$, $a<e$, $b<d$, $b<f$, $c<e$, $c<f$. Заметим, что каждый из шести элементов упорядоченного множества A либо (строго) меньше ровно двух элементов, либо больше ровно двух элементов. Полученное упорядоченное множество $\langle A, \leq\rangle$ самодвойственное, имеет длину 1 и ширину 3. Изобразим A его диаграммой Хассе:

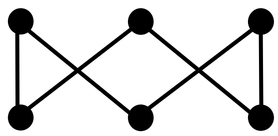

Рис. 1

Покажем, что размерность A равна 3. Сначала докажем от противного, что порядок $\leq$ не является пересечением двух линейных порядков A. Будем считать, что $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и один из линейных порядков, дающих в пересечении с другим линейным порядком исходный порядок $\leq$, естественный $1<2<3<4<5<6$. Второй линейный порядок $\angle$ задан перестановкой $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$ чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6:

$$i_k\angle i_l \Leftrightarrow k<l \text{ и } i_k<i_l.$$

Ясно, что $i_3=6$, $i_4=1$ и ни одно из чисел i_1, i_2, i_5, i_6 не равно 2, противоречие. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\geq 3$. С другой стороны, порядок $\leq$ на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ есть пересечение трех линейных порядков-перестановок: 123456, 145236, 246135. Биекция $a\to 1$, $b\to 2$, $c\to 4$, $d\to 3$, $e\to 5$, $f\to 6$ устанавливает изоморфизм упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ на упорядоченное множество $\langle\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq\rangle$. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\leq 3$. Следовательно, $\mathrm{ord}(A)=3$.

Пример 6. Пусть $B=\mathrm{B}(\{x, y, z\})$ – булеан трехэлементного множества $\{x, y, z\}$, то есть множество всех подмножеств в $\{x, y, z\}$ с отношением включения $\subseteq$ множеств. Упорядоченное подмножество $C=B\setminus\{\varnothing, \{x, y, z\}\}$ в $\langle B, \subseteq\rangle$, состоящее из одноэлементных и двухэлементных множеств, изоморфно упорядоченному множеству $\langle A, \leq\rangle$ из примера 5. Значит, в силу утверждения примера 4, $\mathrm{ord}(B)=\mathrm{ord}(C)=\mathrm{ord}(A)=3$.

Приведем диаграммы Хассе еще двух шестиэлементных упорядоченных множеств размерности 3.

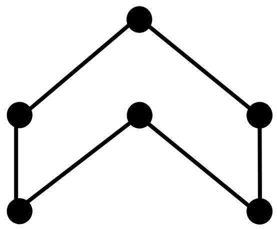

Рис. 2

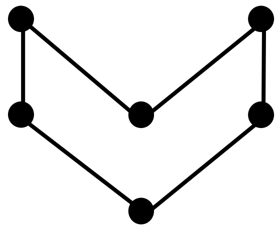

Рис. 3

Упорядоченные множества на рис. 2 и 3 двойственны друг другу, имеют длину 2, ширину 3 и размерность 3. Заметим, что диаграмма Хассе на рис. 2 построена снизу вверх, начиная с минимальных элементов, а диаграмма Хассе на рис. 3 построена сверху вниз, начиная с максимальных элементов.

Иллюстрация. Покажем, как в примере 5 возникли перестановки 145236 и 246135. Имеем изоморфные упорядоченные множества $\langle A, \leq \rangle$ и $\langle C, \subseteq \rangle$ при следующем биективном соответствии:

$$a \to \{z\},\ b \to \{y\},\ c \to \{x\},\ d \to \{y, z\},\ e \to \{x, z\},\ f \to \{x, y\}.$$

Далее каждому элементу из C поставим в соответствие его характеристическую функцию $\{x, y, z\} \to \{0, 1\}$, представляющую собой упорядоченную тройку чисел 0 и 1:

$$\{x\} \equiv (1, 0, 0),\ \{y\} \equiv (0, 1, 0),\ \{z\} \equiv (0, 0, 1),$$
$$\{x, y\} \equiv (1, 1, 0),\ \{x, z\} \equiv (1, 0, 1),\ \{y, z\} \equiv (0, 1, 1).$$

В результате упорядоченное множество A изоморфно вложено в прямое произведение трех двухэлементных цепей $\{0, 1\}$, $0<1$: $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^3$. Как и в предложении 1, зададим на образе A в произведении $\{0, 1\}^3$ три линейных лексикографических порядка:

$$(0, 0, 1) < (0, 1, 0) < (0, 1, 1) < (1, 0, 0) < (1, 0, 1) < (1, 1, 0) \text{ – по 1-й координате;}$$
$$(0, 0, 1) < (1,0, 0) < (1, 0, 1) < (0, 1, 0) < (0, 1, 1) < (1, 1, 0) \text{ – по 2-й координате;}$$
$$(0, 1, 0) < (1, 0, 0) < (1, 1, 0) < (0, 0, 1) < (0, 1, 1) < (1, 0, 1) \text{ – по 3-й координате.}$$

Обозначим $(0, 0, 1)=\mathbf{1}$, $(0, 1, 0)=\mathbf{2}$, $(0, 1, 1)=\mathbf{3}$, $(1, 0, 0)=\mathbf{4}$, $(1, 0, 1)=\mathbf{5}$, $(1, 1, 0)=\mathbf{6}$. Получаем три перестановки **123456**, **145236**, **246135**, дающие в пересечении порядок упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ из примера 5. При этом $\langle A, \leq \rangle$ изоморфно упорядоченному подмножеству прямого произведения трех шестиэлементных цепей (см. рис. 4)

$$\mathbf{1<2<3<4<5<6},\ \mathbf{1<4<5<2<3<6},\ \mathbf{2<4<6<1<3<5}$$

при взаимно однозначном соответствии

$$a \to (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}),\ b \to (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}),\ c \to (\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}),\ d \to (\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}),\ e \to (\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{5}),\ f \to (\mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{6}).$$

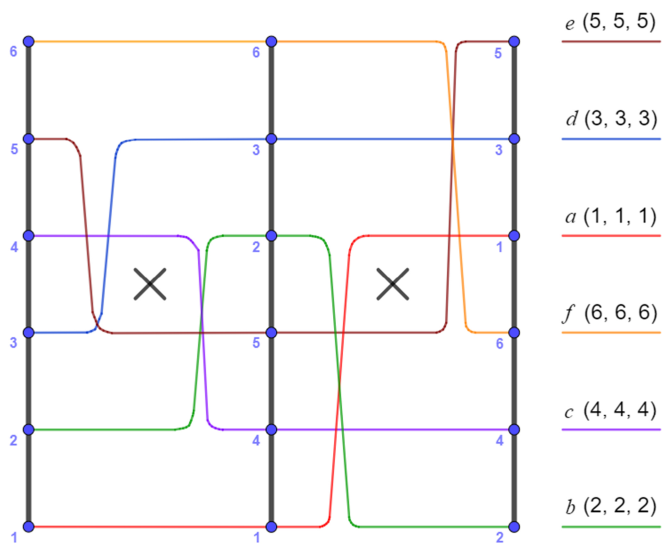

Рис. 4

5. Свойства размерности конечных упорядоченных множеств. Пусть далее A, B – произвольные конечные упорядоченные множества с одинаково обозначаемым порядком $\leq$.

Свойство 1 (монотонность). *Если A – упорядоченное подмножество B, то $ord(A) \leq ord(B)$.*

Доказательство. Порядок на подмножестве A – индуцированный, то есть совпадает с пересечением $\leq \cap (A \times A)$. Если порядок $\leq$ упорядоченного множества B является пересечением линейных порядков $\leq_1$, …, $\leq_m$, то $\leq\cap(A\times A)=(\leq_1\cap(A\times A))\cap\ldots\cap(\leq_m\cap(A\times A))$ – пересечение m линейных порядков на A. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\leq\mathrm{ord}(B)$.

Свойство 2 (о размерности прямого произведения). *Верны неравенства*

$$max(ord(A), ord(B)) \leq ord(A\times B) \leq ord(A)+ord(B).$$

Доказательство. Возьмем по элементу $a\in A$ и $b\in B$. Имеем $A\cong A\times\{b\}$ и $B\cong\{a\}\times B$, откуда по свойству 1 $\mathrm{ord}(A)\leq\mathrm{ord}(A\times B)$ и $\mathrm{ord}(B)\leq\mathrm{ord}(A\times B)$. Далее, пусть порядок на A равен пересечению n линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$, а порядок на B равен пересечению m линейных порядков $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$. Тогда покоординатный порядок на $A\times B$ будет пересечением следующих $n+m$ линейных порядков:

Пример 7. Рассмотрим двухэлементную цепь A и двухэлементную антицепь B. Имеем $\mathrm{ord}(A)=1$, $\mathrm{ord}(B)=2$ и $\mathrm{ord}(A\times B)=2<3=\mathrm{ord}(A)+\mathrm{ord}(B)$. Кроме того, $\mathrm{ord}(A\times A)=2>1=\mathrm{ord}(A)$ и $\mathrm{ord}(B\times B)=2=\mathrm{ord}(B)$. Значит, равенства в неравенствах свойства 2 могут не выполняться.

Свойство 3 (о размерности дизъюнктной суммы). *Если одно из упорядоченных множеств A, B не является цепью, то*

$$ord(A+B)=max(ord(A), ord(B)).$$

Доказательство. Пусть $2\leq n=\mathrm{ord}(A)\geq\mathrm{ord}(B)=m$. Порядок на A есть пересечение линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$, а порядок на B равен пересечению линейных порядков $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$. Тогда порядок на сумме $A+B$ будет пересечением n линейных порядков $\angle_1\leq_1, \leq_2\angle_2, \ldots, \leq_m\angle_m, \ldots, \leq_n\angle_m$ на $A\cup B$. Получаем требуемое равенство.

Свойство 4. *Если A и B – цепи, то ord(A+B)=2.*

Действительно, выстроим цепи сначала в порядке A, B, а затем – в порядке B, A.

Свойство 5 (о размерности порядковой суммы). *Верно равенство*

$$ord(A\oplus B)=max(ord(A), ord(B)).$$

Доказательство. Допустим, как при доказательстве свойства 3, что, порядок на A есть пересечение линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$ и порядок на B равен пересечению линейных порядков $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$. Тогда порядок на $A\cup B$ равен пересечению n линейных порядков $\leq_1\angle_1, \leq_2\angle_2, \ldots, \leq_m\angle_m, \ldots, \leq_n\angle_m$ при $n\geq m$ и будет пересечением m линейных порядков $\leq_1\angle_1, \leq_2\angle_2, \ldots, \leq_n\angle_n, \ldots, \leq_n\angle_m$ при $n\leq m$. Откуда вытекает доказываемое равенство.

Теперь рассмотрим лексикографическое произведение $A\Pi B$ упорядоченных множеств A и B.

Свойство 6 (о размерности лексикографического произведения). *Справедливо равенство ord(AПB)=max(ord(A), ord(B)).*

Доказательство. Заметим, что $A\Pi B$ будет порядковой суммой $\oplus B_a$, $B_a=B$, по всем элементам a упорядоченного множества A. Пусть даны линейные порядки $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$ на A и линейные порядки $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$ на B, пересечения которых равны порядкам на A и на B соответственно. Обозначим через $\leq_i\Pi\angle_j$ линейный лексикографический порядок цепей $\langle A, \leq_i\rangle$ и $\langle B, \angle_j\rangle$. Тогда порядок на $A\Pi B$ будет равен пересечению n линейных порядков $\leq_1\Pi\angle_1, \ldots, \leq_m\Pi\angle_m, \ldots, \leq_n\Pi\angle_m$ при $n\geq m$ и пересечению m линейных порядков $\leq_1\Pi\angle_1, \ldots, \leq_n\Pi\angle_n, \ldots, \leq_n\Pi\angle_m$ при $n<m$.

Свойство 7 (размерность булеана). *Размерность булеана n-элементного множества равна n.*

Доказательство. Булеан n-элементного множества изоморфен прямому произведению $A=\{0, 1\}^n$ n экземпляров двухэлементной цепи $\{0, 1\}$. В силу предложений 1 и 2 покоординатный порядок $\leq$ в $\{0, 1\}^n$ совпадает с пересечением n линейных порядков. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\leq n$.

Докажем обратное включение. Рассмотрим в A элементы $\alpha_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_2=(0, 1, \ldots, 0)$, …, $\alpha_n=(0, 0, \ldots, 1)$, $\beta_1=(0, 1, \ldots, 1)$, $\beta_2=(1, 0, \ldots, 1)$, …, $\beta_n=(1, 1, \ldots, 0)$, составляющие упорядоченное подмножество B в A. Для любых индексов $i, j\in\{1, 2, \ldots, n\}$ имеем: $\alpha_i<\beta_j$ при $i\neq j$ и несравнимые элементы α_i, β_i. Пусть дано множество Δ линейных порядков на множестве A, пересечение которых совпадает с порядком $\leq$. Для каждого $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$в Δ найдется такой линейный порядок $\leq_i$, что $\beta_i <_i \alpha_i$. Если $\alpha_i <_i \alpha_j$ при некотором j, то $\alpha_i <_i \beta_i$, поскольку $\alpha_j<\beta_i$ и, значит, $\alpha_j<_i \beta_i$. Полученное противоречие показывает, что относительно порядка $\leq_i$ элемент α_i будет наибольшим элементом множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Следовательно, порядки $\leq_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, различны уже на множестве B и, стало быть, множество Δ имеет не менее n элементов. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\geq\mathrm{ord}(B)\geq n$. В результате получаем: $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(B)=n$.

Пример 8. Прямая степень $A=\{0, 1\}^n$ содержит 2^n элементов, имеет длину n и размерность n по свойству 7. Упорядоченное подмножество $B=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ в A содержит $2n$ элементов, имеет длину 1, ширину n и размерность n в силу свойства 7. Последнее утверждение обобщает пример 5.

Теорема 4 (размерность прямого произведения цепей). *Размерность прямого произведения n неодноэлементных цепей равна n.*

Доказательство. Пусть даны неодноэлементные цепи $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Рассмотрим их прямое произведение A с покоординатным порядком. В каждой цепи A_i ($i=1, 2, \ldots, n$) выделим двухэлементную подцепь B_i. Их прямое произведение B будет упорядоченным подмножеством в A. По свойству 7

$\mathrm{ord}(B)=n$, откуда по свойству 1 $\mathrm{ord}(A)\geq n$. С другой стороны, в силу предложений 1 и 2, $\mathrm{ord}(A)\leq n$. Значит, $\mathrm{ord}(A_1\times A_2\times \ldots \times A_n)=n$.

6. Полукольцо классов изоморфности упорядоченных множеств. Введенные в параграфе 2 бинарные операции над упорядоченными множествами обладают следующими алгебраическими свойствами – с точностью до порядкового изоморфизма. Операции взятия суммы + и прямого произведения × коммутативны и ассоциативны, операции порядкового сложения ⊕ и лексикографического произведения не коммутативны и ассоциативны. Кроме того, операция × дистрибутивна относительно операции +.

Обозначим через **S** множество (на самом деле, класс) всех классов $\boldsymbol{A}=\{X$ – упорядоченное множество: $X\cong A\}$ изоморфности по всевозможным упорядоченным множествам A. На множестве **S** рассмотрим операции сложения и умножения: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\{X$ – упорядоченное множество: $X\cong A+B\}$ и $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\{X$ – упорядоченное множество: $X\cong A\times B\}$. В результате получаем алгебраическую структуру $\langle \mathbf{S}, +, \cdot\rangle$, называемую *коммутативным полукольцом*: $\langle \mathbf{S}, +\rangle$ и $\langle \mathbf{S}, \cdot\rangle$ – коммутативные полугруппы, причем, умножение дистрибутивно относительно сложения $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}$ для любых упорядоченных множеств A, B, C. Заметим, что класс $\boldsymbol{1}$ всех одноэлементных упорядоченных множеств служит единичным (нейтральным по умножению) элементом в полукольце **S**.

Тем самым, доказано следующее утверждение:

Предложение 7. *Множество* $\boldsymbol{S}$ *всех классов изоморфности упорядоченных множеств с операциями + и · является коммутативным полукольцом с единицей.*

Замечание 7. Пусть **F** – подполукольцо в **S**, состоящее из классов изоморфности конечных упорядоченных множеств. Получаем коммутативное полукольцо **F** с единицей, обладающее свойством аддитивной сократимости: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ для любых конечных упорядоченных множеств A, B, C. Поэтому полукольцо **F** имеет кольцо разностей, а также обладает свойством мультипликативной сократимости [см. 15, с. 227]. Кроме того, множество $\mathbf{S}\backslash\mathbf{F}$ является простым идеалом полукольца **S** и $(\mathbf{S}\backslash\mathbf{F})+\mathbf{S}\subseteq\mathbf{S}\backslash\mathbf{F}$.

Замечание 8. Класс **AC** классов изоморфности всевозможных антицепей является подполукольцом с единицей в **S**, поскольку сумма и произведение антицепей будут антицепями, а одноэлементные упорядоченные множества суть в точности упорядоченные множества, являющиеся цепями и антицепями одновременно. Легко видеть, что полукольцо **AC** изоморфно полукольцу всех ненулевых кардинальных чисел (мощностей) с арифметическими операциями сложения и умножения. В полукольце **AC**, стало быть, и в полукольце **S** свойства аддитивной и мультипликативной сократимости не выполняются. Полукольцо **N** натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения изоморфно подполукольцу полукольца **AC**.

Полагаем $\mathrm{ord}(\boldsymbol{A})=\mathrm{ord}(X)$ для любого упорядоченного множества $X\in\boldsymbol{A}$.

Предложение 8. *Отношение равенства размерности* $\approx$ *на полукольце* $\langle \mathbf{S}, +, \cdot\rangle$, *будучи отношением эквивалентности, не является конгруэнцией.*

Доказательство. Очевидно, что отношение равенства размерности на классе всевозможных упорядоченных множеств является отношением эквивалентности. В силу инвариантности размерности это же верно и для полукольца $\boldsymbol{S}$. Пусть $\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{B}$, то есть $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(B)$, и C – произвольное упорядоченное множество. По свойствам 3 и 4 имеем $\mathrm{ord}(A+C)=\mathrm{ord}(B+C)$, то есть $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$. Это значит, что отношение равенства размерности $\approx$ на $\boldsymbol{S}$ стабильно относительно операции сложения. Покажем, что отношение равенства размерности $\approx$ на $\boldsymbol{S}$ не является стабильным относительно операции умножения. Положим $A=\{0, 1\}\times\{0, 1\}$ при $0<1$, $B=\{a, b\}$и $D=\{a, b, c, d\}$ – антицепи, $C=\{0, 1\}$. Имеем $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(B)=\mathrm{ord}(D)=2$, то есть $\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{B}\approx\boldsymbol{D}$. Поскольку $(A\times C)\cong\{0, 1\}^3$, то по свойству 7 $\mathrm{ord}(A\times C)=3$. Но, как легко видеть, $\mathrm{ord}(B\times C)=2$ и $\mathrm{ord}(D\times C)=2$, то есть $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\approx(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C})$. Следовательно, произведения $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}$ не находятся в отношении $\approx$.

Список литературы

1. *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. М. : Изд-во МГУ, 1988. 112 с.

2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М. : Наука, 1984. 568 с.

3. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // В Приложении к книге: Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М. : ИЛ, 1963. С. 245–259.

4. *Вечтомов Е. М.* Теория решеток. Киров : Киров. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина, 1995. 40 с.

5. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 2 (1). С. 111–120.

6. *Вечтомов Е. М.* Курс «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 169–186.

7. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2018. 296 с.

8. *Вечтомов Е. М.* Практикум по теории упорядоченных множеств и решеток // Advanced science. Киров : ВятГУ, 2018. № 3. С. 4–17.

9. *Вечтомов Е. М., Абрамова И. В., Шилова З. В.* Методика преподавания порядковых структур в обучении студентов вуза // Перспективы науки и образования. 2019. № 5 (41). С. 170–188.

10. *Вечтомов Е. М., Сазанов И. А.* Задачи и упражнения на тему размерности упорядоченных множеств : мат-лы III Международной научно-практической конференции «Задачи в обучении математике, физике, информатике: теория, опыт, инновации». Вологда : ВоГУ, 2022. С. 17–20.

11. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М. : Мир, 1982. 456 с.

12. *Гуров С. И.* Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: определения, свойства, примеры. М., 2013. 221 с.

13. Оре О. Теория графов. Изд. 2-е. М. : Наука, 1980. 336 с.

14. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. Изд. 2-е. М. : Наука, 1982. 160 с.

15. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М. : Мир, 1990. 440 с.

The dimension of ordered sets and its properties

E. M. Vechtomov[1], I. A. Sazanov[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

[2]master student of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: ivan.sazmem@gmail.com

Abstract. The concept of the dimension of an ordered set is analyzed. The existence and invariance of the dimension of arbitrary ordered sets are proved. The basic properties of the dimension of finite ordered sets are proved. Illustrative examples are given. A semiring of isomorphism classes of ordered sets is also considered.

Keywords: ordered set, finite ordered set, chain, dimension, dimension properties.

References

1. *Arhangel'skij A. V. Kantorovskaya teoriya mnozhestv* [Kantorovskaya theory of sets]. M. Moscow State University. 1988. 112 p.

2. *Birkhoff G. Teoriya reshetok* [Theory of lattices]. M. Nauka (Science). 1984. 568 p.

3. *Burbaki N. Arhitektura matematiki* [Architecture of mathematics] // *V Prilozhenii k knige: N. Burbaki. Ocherki po istorii matematiki* – In the Appendix to the book: N. Bourbaki. Essays on the history of mathematics. M. IL. 1963. Pp. 245–259.

4. *Vechtomov E. M. Teoriya reshetok* [Theory of lattices]. Kirov. Kirov State Pedagogical Institute n. a. V. I. Lenin. 1995. 40 p.

5. *Vechtomov E. M. Izuchenie poryadkovoj struktury* [The study of the ordinal structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University of Humanities. 2010. No. 2 (1). Pp. 111–120.

6. *Vechtomov E. M. Kurs "Uporyadochennye mnozhestva i reshetki" dlya magistrantov-matematikov* [Course "Ordered sets and lattices" for master students-mathematicians] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical colleges and universities of the Volga-Vyatka region. 2011. Is. 13. Pp. 169–186.

7. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury* [Mathematics: basic mathematical structures]. Publ. 2nd. M. Yurayt. 2018. 296 p.

8. *Vechtomov E. M. Praktikum po teorii uporyadochennyh mnozhestv i reshetok* [Practicum on the theory of ordered sets and lattices] // *Advanced science* – Advanced science. Kirov. VyatSU. 2018. No. 3. Pp. 4–17.

9. *Vechtomov E. M., Abramova I. V., Shilova Z. V. Metodika prepodavaniya poryadkovyh struktur v obuchenii studentov vuza* [Methods of teaching ordinal structures in teaching university students] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya* – Prospects of science and education. 2019. No. 5 (41). Pp. 170–188.

10. *Vechtomov E. M., Sazanov I. A. Zadachi i uprazhneniya na temu razmernosti uporyadochennyh mnozhestv : mat-ly III Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Zadachi v obuchenii matematike, fizike, informatike: teoriya, opyt, innovacii"* [Problems and exercises on the dimension of ordered sets : materials of the III International Scientific and Practical Conference "Problems in teaching mathematics, physics, computer science: theory, experience, innovation"]. Vologda. VSU. 2022. Pp. 17–20.

11. *Gretcer G. Obshchaya teoriya reshetok* [General theory of lattices]. M. Mir (World). 1982. 456 p.

12. *Gurov S. I. Bulevy algebry, uporyadochennye mnozhestva, reshetki: opredeleniya, svojstva, primery* [Boolean algebras, ordered sets, lattices: definitions, properties, examples]. M. 2013. 221 p.

13. *Ore O. Teoriya grafov* [Graph theory]. Publ. 2nd. M. Nauka (Sceince). 1980. 336 p.

14. *Skornyakov L. A. Elementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. Publ. 2nd. M. Nauka (Science). 1982. 160 p.

15. *Stanley R. Perechislitel'naya kombinatorika* [Enumerative combinatorics]. M. Mir (World). 1990. 440 p.