УДК 517.518.244 DOI 10.25730/VSU.0536.22.003

О сумме геометрически выпуклых функций

С. И. Калинин[1], Л. В. Панкратова[2]
[1]доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru
[2]кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-1242-3807. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются необходимые и достаточные условия геометрической выпуклости функции на промежутке в терминах GA-выпуклости. На основе формулируемого критерия показывается, что сумма двух геометрически выпуклых функций геометрически выпукла.

Ключевые слова: геометрически выпуклая функция, GA-выпуклая функция, сумма геометрически выпуклых функций.

1. Определения понятий и иллюстрации. Опираясь на работы [2]–[5], введем сначала необходимые определения понятий GA-выпуклой и геометрически, или GG-выпуклой функций.

Пусть $l \subseteq (0;+\infty)$ – произвольный промежуток числовой прямой *Ox* и $f : l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1. Функцию *f* назовем GA-*выпуклой* на *l*, если для любых точек $a,b \in l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях определения 1 при $a \neq b$ и всех $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то функцию *f* будем называть *строго* GA-*выпуклой* на промежутке *l*.

Определение 2. Функцию *f* назовем *геометрически выпуклой*, или GG-*выпуклой* на промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$, если она в точках данного промежутка принимает положительные значения, и для любых точек $a,b \in l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \leq f^{\lambda}(a) f^{1-\lambda}(b). \tag{3}$$

Если в условиях приведенного определения при $a \neq b$ и всех $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) < f^{\lambda}(a) f^{1-\lambda}(b), \tag{4}$$

то функцию *f* условимся называть *строго геометрически выпуклой* (*строго* GG-*выпуклой*) на *l*.

Очевидно, строго GA-выпуклая функция является GA-выпуклой, а строго геометрически выпуклая функция – геометрически выпуклой.

Аналогично определяются GA-вогнутая и геометрически вогнутая (GG-вогнутая) функции, а также строго GA-вогнутая и строго геометрически вогнутая функции – для этого в соответствующих неравенствах (1)–(4) знак $\leq$ (<) следует поменять на знак $\geq$ (>).

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие сформулированные определения.

На интервале $(0;+\infty)$ как GA-выпуклой, так и GA-вогнутой является функция $f(x) = \alpha + \beta \ln x,$ где α и β – вещественные константы, ибо для нее:

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) = \alpha + \beta \ln(a^{\lambda} b^{1-\lambda}) = \alpha + \lambda\beta \ln a + (1-\lambda)\beta \ln b =$$
$$= \lambda(\alpha + \beta \ln a) + (1-\lambda)(\alpha + \beta \ln b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Из последнего следует, в частности, что и функция $f(x)=\ln x$, и функция $f(x)=c$ на всяком промежутке $l\subseteq(0;+\infty)$ являются GA-выпуклыми и GA-вогнутыми.

Функция $f(x)=x,\ x>0$ является строго GA-выпуклой. Это следует из весового неравенства Коши для положительных чисел a и b

$$a^{\lambda}b^{1-\lambda}<\lambda a+(1-\lambda)b,\ a\neq b,\ \lambda\in(0;1),$$

реализующего неравенство (2).

Легко видеть, на интервале $(0;+\infty)$ будет строго GA-выпуклой и функция $f(x)=x+c$, где $c=const$.

Весовое неравенство Коши для двух положительных чисел позволяет просто обосновать также строгую GA-выпуклость функции $f(x)=x^{q},\ x>0$, где q – произвольное отличное от нуля действительное число:

$$\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^{q}=\left(a^{q}\right)^{\lambda}\left(b^{q}\right)^{1-\lambda}<\lambda a^{q}+(1-\lambda)b^{q},\ a>0,b>0,a\neq b;\ \lambda\in(0;1).$$

Нетрудно видеть, что функция $f(x)=-x^{2},\ x>0$ будет строго GA-вогнутой.

Так как для функции $h(x)=\beta x^{\alpha}$ ($\beta>0,-\infty<\alpha<+\infty,x>0$) выполняется соотношение $\beta\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^{\alpha}=\left(\beta a^{\alpha}\right)^{\lambda}\left(\beta b^{\alpha}\right)^{1-\lambda}$, где a и b – положительные числа, то данная функция является и геометрически выпуклой, и геометрически вогнутой на интервале $(0;+\infty)$.

Экспонента $y=e^{x}$ является строго геометрически выпуклой на интервале $(0;+\infty)$ функцией, поскольку для любых различных положительных чисел a и b и любого $\lambda\in(0;1)$ в силу весового неравенства Коши имеем:

$$\left(e^{a}\right)^{\lambda}\left(e^{b}\right)^{1-\lambda}=e^{\lambda a+(1-\lambda)b}>e^{a^{\lambda}b^{1-\lambda}}.$$

Аналогично на интервале $(0;+\infty)$ устанавливается строгая GG-выпуклость любой показательной функции вида $f(x)=\alpha c^{\beta x}$, где $\alpha>0,\beta>0,c>1$.

Функция $g(x)=\log_{c}x$ ($c>1$) является строго геометрически вогнутой на интервале $(1;+\infty)$, поскольку для любых различных положительных a и b и любого $\lambda\in(0;1)$ имеем:

$$g\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)=\log_{c}\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)=\lambda\log_{c}a+(1-\lambda)\log_{c}b>\left(\log_{c}a\right)^{\lambda}\left(\log_{c}b\right)^{1-\lambda}=g^{\lambda}(a)\cdot g^{1-\lambda}(b).$$

Аналогично показывается, что функция $\widetilde{g}(x)=\log_{c}x$ ($0<c<1$) строго геометрически вогнута на интервале $(0;1)$.

2. Критерий геометрической выпуклости функции. Установим следующую теорему о необходимых и достаточных условиях геометрической выпуклости функции на промежутке.

Теорема А. Функция f, принимающая в точках промежутка $l\subseteq(0;+\infty)$ положительные значения, геометрически выпукла на нем тогда и только тогда, когда для любого действительного числа α функция $x^{\alpha}f(x)$ является GA-выпуклой на рассматриваемом промежутке.

Для установления данной теоремы воспользуемся схемой доказательства теоремы 2 работы [1] о необходимых и достаточных условиях логарифмической выпуклости функции на промежутке.

Доказательство необходимости. Пусть функция f геометрически выпукла на l. Рассмотрим функцию $g(x)=x^{\alpha}f(x)$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Поскольку x^{α} – геометрически выпуклая на интервале $(0;+\infty)$ функция, то функция $g(x)$ также геометрически выпукла на l. Последнее означает, что для любых точек a и b из l и любого числа $\lambda\in[0;1]$ выполняется неравенство

$$g\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)\leq g^{\lambda}(a)g^{1-\lambda}(b).$$

Но в силу неравенства Коши $g^{\lambda}(a)g^{1-\lambda}(b)\leq\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)$, следовательно,

$$g\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)\le \lambda g(a)+(1-\lambda)g(b).$$

Последнее означает, что функция g является GA-выпуклой на l. Нужное установлено.

Доказательство достаточности. Предположим, что для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ функция $x^{\alpha}f(x)$ является GA-выпуклой на промежутке l. Покажем, что тогда для любых a и b из l и любого числа $\lambda \in [0;1]$ для функции f будет выполняться неравенство (3).

Выберем α таким, чтобы $a^{\alpha}f(a)=b^{\alpha}f(b)$ (это будет значение $\alpha=\log_{\frac{a}{b}}\frac{f(b)}{f(a)}$). Для выбранного α в силу GA-выпуклости функции $x^{\alpha}f(x)$ имеем:

$$\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^{\alpha} f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)\le \lambda a^{\alpha}f(a)+(1-\lambda)b^{\alpha}f(b)=a^{\alpha}f(a)=$$
$$=\left(a^{\alpha}f(a)\right)^{\lambda}\left(a^{\alpha}f(a)\right)^{1-\lambda}=\left(a^{\alpha}f(a)\right)^{\lambda}\left(b^{\alpha}f(b)\right)^{1-\lambda}=\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^{\alpha} f^{\lambda}(a)f^{1-\lambda}(b).$$

Отсюда, очевидно, следует (3). Теорема А полностью доказана.

Замечание 1. Техника доказательства теоремы А позволяет сформулировать аналогичный критерий строгой геометрической выпуклости функции. Справедлива

Теорема А$_1$. Функция f, принимающая в точках промежутка $l\subseteq(0;+\infty)$ положительные значения, строго геометрически выпукла на нем тогда и только тогда, когда для любого действительного числа α функция $x^{\alpha}f(x)$ является строго GA-выпуклой на рассматриваемом промежутке.

Приведем иллюстрацию сформулированной теоремы. Выше было показано, что функция $y=e^{x}$ является строго геометрически выпуклой на интервале $(0;+\infty)$. Следовательно, в силу теоремы А$_1$ всякая функция вида $x^{\alpha}e^{x}$, где α – действительное число, является строго GA-выпуклой на интервале $(0;+\infty)$.

3. Теорема о сумме геометрически выпуклых функций. Очевидно, сумма GA-выпуклых функций GA-выпукла. Возникает вопрос: справедливо ли такое свойство для GG-выпуклых функций? Ответ не очевиден. Однако установленный критерий геометрической выпуклости функции позволяет легко доказать следующую теорему.

Теорема Б. Если функции f и g геометрически выпуклы на промежутке l числовой прямой, то их сумма также является геометрически выпуклой на этом промежутке.

Доказательство. В силу теоремы А для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ функции $x^{\alpha}f(x)$ и $x^{\alpha}g(x)$ являются GA-выпуклыми на промежутке l, следовательно, GA-выпуклой на нем будет и их сумма $x^{\alpha}\cdot(f+g)(x)$. Но тогда по теореме А функция $(f+g)(x)$ – геометрически выпукла на рассматриваемом промежутке. Требуемое установлено.

Замечание 2. Метод доказательства теоремы Б и наличие теоремы А$_1$ позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема Б$_1$. Если функции f и g геометрически выпуклы на промежутке l числовой прямой, причем хотя бы одна из них – в строгом смысле, то их сумма также является строго геометрически выпуклой на этом промежутке.

В силу теоремы Б$_1$ функция $y=e^{x}+5\cdot 2^{2x}$ является строго геометрически выпуклой на интервале $(0;+\infty)$.

Список литературы

1. *Аносов Д. В.* О сумме логарифмически выпуклых функций // Математическое просвещение. Серия 3. 2001. Вып. 5. С. 158–163.

2. *Kaizhong Guan* GA-convexity and its applications // Analysis Mathematica. 2013. Vol. 39. № 3. Pp. 189–208.

3. *Niculescu C. P.* Convexity according to the geometric mean // Math. Anal. Applics. 2000. Vol. 3. № 2. Pp. 155–167.

4. *Noor M. A. et al.* Geometrically Relative Convex Functions // Math. Inf. Sci. Appl. 2014. 8. № 2. Pp. 607–616.

5. *Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, Xiao-Hui Zhang* The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // Journal of Inequalities and Applications. 2010(4). 11 p. Article ID: 507560. DOI:10.1155/2010/507560.

On the sum of geometrically convex functions

S. I. Kalinin[1], L. V. Pankratova[2]

[1]Doctor of Pedagogical Sciences, professor, professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

[2]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-1242-3807. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Abstract. The paper considers necessary and sufficient conditions for geometric convexity of a function on an interval in terms of GA-convexity. Based on the formulated criterion, it is shown that the sum of two geometrically convex functions is geometrically convex.

Keywords: geometrically convex function, GA-convex function, sum of geometrically convex functions.

References

1. *Anosov D. V. O summe logarifmicheski vypuklyh funkcij* [On the sum of logarithmically convex functions] // *Matematicheskoe prosveshchenie* – Mathematical enlightenment. Series 3. 2001. Is. 5. Pp. 158–163.

2. *Kaizhong Guan* GA-convexity and its applications // Analysis Mathematica. 2013. Vol. 39. No. 3. Pp. 189–208.

3. *Niculescu C. P.* Convexity according to the geometric mean // Math. Anal. Applics. 2000. Vol. 3. No. 2. Pp. 155–167.

4. *Noor M. A. et al.* Geometrically Relative Convex Functions // Math. Inf. Sci. Appl. 2014. 8. No. 2. Pp. 607–616.

5. *Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, Xiao-Hui Zhang* The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // Journal of Inequalities and Applications. 2010(4). 11 p. Article ID: 507560. DOI:10.1155/2010/507560.