УДК 514.853 DOI 10.25730/VSU.0536.22.004

Интегралы уравнений движения в пространстве Лобачевского

Н. Н. Макеев
доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник,
Саратовский научный центр Российской академии наук.
Россия, г. Саратов. ORCID: 0000-0003-2807-977X. E-mail: nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Приведены условия существования дополнительных по Е. Т. Уиттекеру алгебраических первых интегралов системы уравнений движения абсолютно твердого материального объекта в трехмерном пространстве Лобачевского. Принимается, что винты пространства Лобачевского, согласно правилу Котельникова-Штуди, отображаются на комплексные векторы комплексного евклидова пространства. Каждому винту соответствует определенный комплексный вектор с компонентами, линейно зависящими от плюккеровых координат и от величины кривизны пространства Лобачевского. Объект движется под воздействием заданных гироскопических сил, структура которых для выбранного случая задается специальными условиями. Получены в явной форме некоторые частные интегралы, зависящие от одной и от двух фазовых переменных, характеризующие виды движений объекта, а также соответствующие им параметрические ограничения, обусловленные условиями существования частных интегралов.

Ключевые слова: винтовое движение, абсолют, бивектор, винт, неевклидово пространство постоянной кривизны.

Введение. Теория винтов, созданная в 1870-х годах, изложенная в трактате Р. С. Белла [14], явилась аппаратом исследования свойств движения материальных объектов в неевклидовых пространствах. Ее конструктивное построение было логически завершено А. П. Котельниковым в его монографии [3]. Он объединил в единую теорию − проективную теорию векторов − кинематику и динамику материальных объектов, а также разработал теорию векторов в трехмерном проективном пространстве.

П. А. Широков [12] распространил теорию векторного поля на пространства постоянной кривизны, в том числе и на пространство Лобачевского. Движение материального объекта, являющееся классическим аналогом регулярной прецессии в евклидовом пространстве и распространенное на пространство Лобачевского, было исследовано А. П. Широковым [13].

Различные виды движений материальных объектов в пространстве Лобачевского были рассмотрены М. С. Крюковым [4–6]. Свойства многообразия состояний, устойчивость стационарных винтовых движений объекта в пространстве Лобачевского и условия существования линейного первого интеграла его уравнений движения получены в работах [7−10].

1. Предварительные положения. Согласно проективной модели Ф. Клейна [4] пространство Лобачевского (пространство L_3) реализуется внутренними точками абсолюта

$$g_{ij}\, x^{ij} \equiv -\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 + \left(x^4\right)^2 = 0 \tag{1}$$

гиперболического пространства Γ_3. Здесь g_{ij} − метрический тензор псевдовекторного четырехмерного пространства, рассматриваемого как трехмерное проективное пространство P_3, реализующее пространство L_3. Отобразив точки пространства P_3 на точки гиперсферы псевдоевклидова пространства R_4^1, при решении задач в пространстве Γ_3 применяем тензорный аппарат пространства R_4^1.

Под движением пространства Γ_3 понимается проективное линейное преобразование, переводящее в себя абсолют (1). Поскольку между одночленными группами движений в пространстве Γ_3 и специальными линейными комплексами в пространстве P_3 существует взаимно однозначное соответствие, то движение в пространстве Γ_3, как и в пространстве L_3, можно задавать бивектором пространства R_4^1 [6].

Винт в пространстве L_3 определяется непростым бивектором, заданным плюккеровыми координатами внешней и внутренней оси винта.

Рассмотрим свободный от связей абсолютно твердый объект, движущийся в пространстве L_3. Пусть $R^0(e_1^0 \dots e_4^0)$ – опорный координатный тетраэдр, автополярный относительно абсолюта (1), неизменно связанный с инерциальным конфигурационным пространством L_3. Этот тетраэдр задается точками e_j^0 (j = 1, … , 4) данного пространства. С твердым объектом неизменно свяжем координатный тетраэдр инерции $R(e_1,...,e_4)$, заданный точками e_j (j = 1, … , 4) объекта, также автополярный относительно абсолюта (1). При этом тетраэдр R выбирается так, чтобы его вершина – точка e_4 объекта – была собственной, совпадала с центром инерции объекта и чтобы ориентации этих тетраэдров совпадали [4]. Положение тетраэдра R и его точек относительно R^0 задается параметрами положения и ориентации следующим образом [5].

Положение точки e_4 задается двумя линейными и одним угловым параметрами, а ориентация тетраэдра R относительно R^0 определяется заданными углами Эйлера. Таким образом, взаимное положение тетраэдров R^0, R устанавливается упорядоченным набором шести заданных характерных параметров.

Мгновенное состояние объекта в пространстве L_3 задается винтом мгновенной скорости $V^{j4}(v^{j4}, \omega^{j4})$ и винтом мгновенного кинетического момента (винтом импульса) $G^{j4}(B_{j4}v^{j4}, -A_{j4}\omega^{j4})$ (j = 1, 2, 3) твердого объекта. Здесь (v^{j4}, B_{j4}) – компоненты скорости сдвига и моменты инерции сдвига объекта относительно его главных осей инерции, соответственно; (ω^{j4}, A_{j4}) $(j=1,2,3)$ – компоненты скорости вращения и моменты инерции вращения объекта относительно тех же осей, соответственно. Определение моментов инерции объекта в пространстве L_3 здесь принято в форме, приведенной в работе [13].

Для моментов инерции сдвига и вращения объекта имеют место тождественные соотношения связи [13]

$$B_{j4} - A_{j4} = k^2 M \quad (j=1,2,3), \tag{2}$$

где k – радиус кривизны пространства L_3, M – величина массы объекта. При этом равенства (2) имеют место лишь при условиях $B_{j4} \neq A_{j4}$ $(j=1,2,3)$, то есть при очевидном ограничении $k \neq 0$.

2. Уравнения движения твердого объекта. Система уравнений движения объекта, происходящего под воздействием силового винта внешних сил L^{ij} в пространстве L_3, имеет вид [9]

$$\begin{aligned} &B_{14}\dot{v}^{14} + (A_{34}+B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) = k^2 L^{14}, \\ &A_{14}\dot{\omega}^{14} + (B_{34}-B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) = -k^2 L^{23} \end{aligned} \quad (1,2,3). \tag{3}$$

В системе уравнений (3) каждая из двух групп уравнений задана приведенным здесь уравнением-представителем. Остальные уравнения каждой группы следуют из данных при циклической перестановке индексов 1, 2, 3, что здесь и всюду далее обозначается символом (1, 2, 3).

Положим, что движение твердого объекта происходит под действием сил с *гироскопической структурой* (по Томсону и Тэту [15]). Тогда компоненты силового винта L^{ij} для уравнений системы (3) относительно автополярного тетраэдра R можно задать в виде [9]

$$\begin{gathered} k^2 L^{14} = \lambda^{34}v^{24} - \lambda^{24}v^{34} + \lambda^{31}\omega^{34} - \lambda^{12}\omega^{24} + k^2 m^{14}, \\ -k^2 L^{23} = \lambda^{31}v^{34} - \lambda^{12}v^{24} + \lambda^{24}\omega^{34} - \lambda^{34}\omega^{24} - k^2 n^{14} \\ (1,2,3). \end{gathered} \tag{4}$$

В системе равенств (4) числа λ^{rs}, m^{rs}, n^{rs} (r = 1, 2, 3; s = 1, … , 4; $r \neq s$) – заданные постоянные коэффициенты и характерные постоянные параметры винта внешних сил, соответственно.

Поскольку мощность силового винта, заданного выражениями (4), при всех значениях $m^{rs} = n^{rs} = 0$ тождественно равна нулю, то силы, определяемые этим винтом при данных условиях, являются *гироскопическими*, а параметры λ^{rs} – заданными гироскопическими коэффициентами.

В силу соотношений (4) система динамических уравнений (3) в осях координатного тетраэдра R принимает вид [7]

$$\begin{gathered} B_{14}\dot{v}^{14} + (A_{34}+B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) + \lambda^{24}v^{34} - \lambda^{34}v^{24} + \lambda^{12}\omega^{24} - \lambda^{31}\omega^{34} = k^2 m^{14}, \\ A_{14}\dot{\omega}^{14} + (B_{34}-B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) + \lambda^{12}v^{24} - \lambda^{31}v^{34} + \lambda^{34}\omega^{24} - \lambda^{24}\omega^{34} = -k^2 n^{14} \\ (1,2,3). \end{gathered} \tag{5}$$

Система уравнений (5), называемая далее *основной динамической системой*, представленная двумя группами уравнений, является многопараметрической системой эволюционного типа, аналитически замкнутой относительно компонент v^{i4}, ω^{i4} (i = 1, 2, 3) при заданных постоянных параметрах m^{rs}, n^{rs}.

Уравнения системы (5) могут быть представлены в компактной форме, если ввести характерные квадратичные формы переменных v^{rs}, ω^{rs} (*кинематические квазипотенциалы*) [9]:

$$f_1 = \frac{1}{2}(A_{34} + B_{24})\left[(v^{34})^2 + (\omega^{34})^2\right] + \lambda^{12} v^{34} + \lambda^{34}\omega^{34},$$

$$g_1 = \frac{1}{2}(B_{34} - B_{24})\left[(v^{24})^2 + (\omega^{24})^2\right] - \lambda^{31} v^{24} - \lambda^{24}\omega^{24} \quad (1, 2, 3).$$

Некоторые частные виды уравнений системы (5) приведены в работе [9]. Эти виды определяют простейшие движения твердого объекта в пространстве L_3. К ним относятся: *собственно сдвиг* (все компоненты $\omega^{rs} = 0$), *собственно вращение* (все компоненты $v^{rs} = 0$), а также *винтовое движение* объекта, существующее при определенных структурно-динамических ограничениях [7]. Винтовое движение в пространстве L_3 в форме регулярной прецессии, совершаемой твердым объектом, имеющим ось кинетической симметрии, вдоль этой оси, подробно исследовано А. П. Широковым [13].

3. Интегралы основной динамической системы. Поставим задачу: *на многообразии инерционных состояний в фазовом пространстве найти структурно-динамические ограничения (постулируемые как возможные), наложенные на параметры системы уравнений* (5), *при которых для данной динамической системы существуют алгебраические первые интегралы объекта, определенные в открытой односвязной области ее пространства состояний.*

Введем квадратичные формы

$$F_1 = \sum_{(1\,2\,3)}[(B_{34} v^{34} + \lambda^{12})^2 - (A_{14}\omega^{14} + \lambda^{14})^2],$$
$$F_2 = \sum_{(1\,2\,3)}(B_{34} v^{34} + \lambda^{12})(A_{34}\omega^{34} + \lambda^{34}), \tag{6}$$
$$F_3 = \sum_{(1\,2\,3)}[B_{34}(v^{34})^2 + A_{14}(\omega^{14})^2],$$

представим в развернутом виде соотношение связи (2)

$$B_{14} - A_{14} = B_{24} - A_{24} = B_{34} - A_{34} = k^2 M. \tag{7}$$

В равенствах (6) символ (123) под знаком суммы обозначает суммирование по величинам, каждая из которых может быть получена из остальных слагаемых циклической перестановкой заданных в них числовых индексов.

Рассмотрим условия, при которых каждая из форм (6) является первым алгебраическим интегралом основной динамической системы (5).

Введем ограничения инерционности состояний объекта, наложенные на параметры винта внешних сил

$$m^{j4} = n^{j4} = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Условия (8) заданы относительно осей связанного тетраэдра и не зависят от текущего положения и ориентации данного твердого объекта. Эти условия соответствуют случаю инерционного состояния этого объекта.

Зададим формально равенства

$$F_1 = h_1, \quad F_2 = h_2, \quad F_3 = h^2, \tag{9}$$

где h_1, h_2, h – произвольные постоянные, а функции F_1, F_2, F_3 определяются равенствами (6). Тогда для соотношений (9) имеют место следующие положения.

Теорема 1. *Если выполняются соотношения связи* (7) *и условия* (8), *то равенства* (9) *являются первыми алгебраическими интегралами динамической системы* (5).

Доказательство. Дифференцируя по t соотношения (6) в силу уравнений данной системы, получаем равенство, тождественно удовлетворяющееся согласно заданным условиям (7), (8).

В равенствах (9) соотношения F_1, F_2 являются алгебраическими первыми интегралами кинетического винта [7] (F_1 – интеграл модуля кинетического винта, F_2 – аналог интеграла Э. Нетер), а F_3 – интеграл типа первого интеграла энергии [1]. Интеграл F_1 является функцией бивектора кинетического винта; интеграл F_2 – функцией бивектора. Величина F_3 сохраняется в силу свойства гироскопичности силового винта, действующего на материальный объект.

Введем квадратичную форму компонент бивектора скорости сдвига

$$F = a_{14}(v^{14})^2 + a_{24}(v^{24})^2 + a_{34}(v^{34})^2, \tag{10}$$

с заданными существенно положительными коэффициентами

$$a_{14} = \frac{B_{14}}{B_{24} + A_{34}}, \quad a_{24} = \frac{B_{24}}{B_{34} + A_{14}}, \quad a_{34} = \frac{B_{34}}{B_{14} + A_{24}}, \tag{11}$$

а также соотношения связи (при $k \neq 0$)

$$B_{14} - A_{34} = B_{24} - A_{14} = B_{34} - A_{24} = k^2 M, \tag{12}$$

родственные приведенным ранее соотношениям (7).

Имеет место следующее интегральное свойство основной динамической системы (5).

Теорема 2. *Если выполняются ограничения* (8), *соотношения связи* (7), (12) *и либо условия*

$$\lambda^{12} = \lambda^{23} = \lambda^{31} = 0, \quad (\lambda^{14}, \lambda^{24}, \lambda^{34}) \neq 0, \tag{13}$$

либо условие, при котором все величины

$$\lambda^{rs} = 0, \tag{14}$$

то равенство

$$F = G \quad (G = \text{const}) \tag{15}$$

является первым алгебраическим интегралом динамической системы (5).

Доказательство этого утверждения проводится аналогично предыдущему в силу уравнений системы (5) с применением соотношений (8), (12)–(14).

Отметим, что алгебраические интегралы (6), (9) для динамической системы (5) приведены в работах [9, 10], но без необходимого обоснования их построения при заданных структурно-динамических условиях. В частном случае, при котором все характерные параметры $\lambda^{rs} = 0$ и выполняются кинетические условия (8), из первых интегралов (9), как частные случаи, следуют соотношения, приведенные в работах [5, 6].

4. Существование дополнительных интегралов динамической системы. Рассмотрим ограниченную задачу о существовании первых интегралов динамической системы (5), дополнительных по Уиттекеру [11] (термин работы [2]) к совокупности интегралов (9), в классе однозначных алгебраических функций C^2 для стационарных (перманентных) состояний твердого объекта.

Решение такого рода задачи гипотетически предполагает существование независимых первых интегралов, каждый из которых определен в соответствующей области фазового пространства. Поскольку каждый из дополнительных интегралов системы уравнений (5), как частный интеграл, может существовать лишь при определенных структурно-динамических условиях, эту задачу следует рассматривать как задачу нахождения элементов интегрального многообразия данной динамической системы в предположении, что это многообразие не является пустым.

Представим возможные искомые интегралы в наиболее общем виде

$$F(v^{14}, v^{24}, v^{34}; \omega^{14}, \omega^{24}, \omega^{34}) = h, \tag{16}$$

где F – алгебраическая функция заданных переменных, h – постоянная интегрирования.

Как известно [11], критериальным условием существования первого интеграла (16) данной системы уравнений является равенство нулю скобки Пуассона (коммутатора) от функции F и гамильтониана данной системы, заданных на симплектическом многообразии [1; 2, с. 84]. Отсюда имеем

$$(\nabla_{\mathbf{V}} F \bullet \dot{\mathbf{V}}) + (\nabla_{\mathbf{\Omega}} F \bullet \dot{\mathbf{\Omega}}) = 0,$$

где обозначены векторы скоростей $\mathbf{V} = \mathbf{V}(v^{14}, v^{24}, v^{34})$, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(\omega^{14}, \omega^{24}, \omega^{34})$.

В развернутом скалярном виде данное равенство представляется так

$$\sum_{i\ j=1}^{3} (p_{i4}\dot{v}^{i4} + q_{j4}\dot{\omega}^{j4}) = 0. \tag{17}$$

Равенство (17) в силу уравнений системы (5) является тождеством, выполняющемся для любых значений переменных, при определенных структурно-динамических ограничениях, соответствующих случаям существования дополнительных первых интегралов исходной системы уравнений движения.

Рассмотрим вопрос о существовании алгебраических первых интегралов исходной динамической системы (5) при сложном стационарном движении объекта типа “сдвиг-вращение” (когда имеют место тождественные соотношения $(v^{i4}, \omega^{j4}) \neq 0;\ i, j = 1, 2, 3)$, при условиях (8).

5. Дополнительные интегралы с одной переменной. Пусть дополнительный интеграл (16) зависит только от одной независимой переменной и имеет вид[1]

$$F\,(v^{14}) = \text{const}. \tag{18}$$

Тогда, согласно соотношению (17), имеем равенство, являющееся тождеством по переменным $v^{24}, v^{34}, \omega^{24}, \omega^{34}$ и удовлетворяющееся при условиях

$$m^{14} = 0, \tag{19}$$

$$\lambda^{12} = \lambda^{31} = \lambda^{24} = \lambda^{34} = 0, \tag{20}$$

к которым следует присоединить ограничение

$$\frac{v^{24}}{\omega^{24}} = \frac{v^{34}}{\omega^{34}} = p. \tag{21}$$

Равенство (21) определяет винтовое движение объекта относительно координатной оси 1-4 с параметром винта *p*. В силу этого справедлива следующая

Теорема 3. *Если выполняются условия* (19)–(21), *то для динамической системы* (5) *при зависимости* (18) *имеет место первый интеграл*

$$v^{14} = \text{const}. \tag{22}$$

Аналогичным образом, в случае, при котором интеграл (16) имеет вид[2]

$$F\,(\omega^{14}) = \text{const}, \tag{23}$$

согласно соотношению (17) получаем равенство, являющееся тождеством по данным переменным, удовлетворяющееся при условии

$$n^{14} = 0 \tag{24}$$

и ограничениях (20), к которым следует присоединить условие структурно-кинетической симметрии

$$B_{24} = B_{34}. \tag{25}$$

Условие (24), как и ограничение (19), является условием инерционности движения объекта – вращения и сдвига, соответственно.

Таким образом, установлена следующая

Теорема 4. *Если выполняются условия* (20), (24), (25), *то для динамической системы* (5) *при зависимости* (23) *имеет место первый интеграл*

$$\omega^{14} = \text{const}. \tag{26}$$

Приведенные соотношения интерпретируются следующим образом: ограничения (19), (24) соответствуют движению твердого объекта по инерции в направлении координатной оси 1-4, а условия (20) отражают отсутствие гироскопического эффекта относительно той же оси.

Интеграл (22) устанавливает стационарное движение – равномерный сдвиг твердого объекта по координатной оси 1-4, а интеграл (26) – его равномерное (перманентное) вращение вокруг этой оси, тогда как система интегралов (22), (26) совместно с кинематическим соотношением (21) определяет винтовое движение данного объекта относительно этой оси. Таким образом, первые интегралы (18), (23) определяют соответствующие равномерные движения твердого объекта, аналитические свойства которых приведены в работе [9].

6. Дополнительные интегралы с двумя переменными. В дальнейшем полагаем, что в общем случае выполняются следующие структурно-кинематические ограничения

$$B_{14} - B_{24} \neq 0, \qquad \frac{v^{14}}{\omega^{14}} - \frac{v^{24}}{\omega^{24}} \neq 0 \qquad (1, 2, 3).$$

Предварительно отметим, что условия для параметров B_{j4}, согласно тождествам (7), (12), эквивалентны ограничениям

$$A_{14} - A_{24} \neq 0 \qquad (1, 2, 3).$$

Первая группа данных условий исключает тривиальный случай, при котором $A_{j4} = A,\ B_{j4} = B \quad (j = 1, 2, 3),$ а вторая группа позволяет исключить из многообразия состояний твердого объекта в фазовом пространстве его возможные винтовые движения, которые могут существовать в общем случае.

---

[1] Равенство (18) здесь дано как представитель совокупности интегралов вида $F\,(v^{j4}) = \text{const}$.

[2] Равенство (23) здесь представляется как интеграл-представитель совокупности интегралов вида $F\,(\omega^{j4}) = \text{const}\ (j = 1, 2, 3)$.

Рассмотрим условия существования и виды дополнительных первых интегралов указанного типа для динамической системы (5). Если дополнительный интеграл (16) с двумя независимыми переменными задан в виде

$$F(v^{14}, \omega^{14}) = \text{const}, \tag{27}$$

то, согласно соотношению (17), в результате получаем

$$k_1 v^{24} + k_2 v^{34} + k_3 \omega^{24} + k_4 \omega^{34} = 0, \tag{28}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}
k_1 = A_{14} p_{14} c_1 \omega^{34} + B_{14} q_{14} c_2 v^{34} + A_{14} p_{14} \lambda^{34} - B_{14} q_{14} \lambda^{12}, \\
k_2 = B_{14} q_{14} \lambda^{31} - A_{14} p_{14} \lambda^{24}, \\
k_3 = B_{14} q_{14} c_2 \omega^{34} - A_{14} p_{14} c_1 v^{34} - A_{14} p_{14} \lambda^{12} - B_{14} q_{14} \lambda^{34}, \\
k_4 = A_{14} p_{14} \lambda^{31} + B_{14} q_{14} \lambda^{24}.
\end{gathered} \tag{29}$$

В равенствах (29) и всюду далее обозначено

$$p_{j4} = \frac{\partial F}{\partial v^{j4}}, \quad q_{j4} = \frac{\partial F}{\partial \omega^{j4}} \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$c_1 = A_{34} + B_{24}, \quad c_2 = B_{24} - B_{34},$$

причем $c_2 \neq 0$ согласно принятым ограничениям.

Поскольку величины p_{14}, q_{14} зависят только от переменных v^{14}, ω^{14}, то из соотношений (28), (29) получаем условия, при которых данное равенство выполняется тождественно при произвольных значениях величин v^{i4}, ω^{i4} $(i = 2, 3)$:

$$\begin{gathered}
A_{14} p_{14} [\lambda^{34} \;\; \lambda^{12}]^T + B_{14} q_{14} [-\lambda^{12} \;\; \lambda^{34}]^T = 0, \\
A_{14} p_{14} [\lambda^{24} \;\; \lambda^{31}]^T + B_{14} q_{14} [-\lambda^{31} \;\; \lambda^{24}]^T = 0, \\
A_{14} c_1 p_{14} [\omega^{34} \;\; v^{34}]^T + B_{14} c_2 q_{14} [v^{34} \;\; -\omega^{34}]^T = 0.
\end{gathered} \tag{30}$$

Рассматривая парные равенства (30) как системы линейных однородных уравнений по отношению к заведомо ненулевым величинам p_{14}, q_{14}, согласно критерию существования ненулевых решений данных уравнений полагаем их определители равными нулю. В силу этого для систем уравнений (30) получаем определяющие условия, соответственно,

$$\lambda^{12} = \lambda^{34} = 0, \quad \lambda^{24} = \lambda^{31} = 0, \tag{31}$$

$$v^{34} = \omega^{34} \equiv 0. \tag{32}$$

Условия (31) исключают наличие гироскопического эффекта для твердого объекта относительно оси 1-4, а условия (32) позволяют исключить состояние, при котором существуют сдвиг и вращение объекта относительно оси 3-4. В этом случае интеграл вида (27) представляется совокупностью ранее полученных первых интегралов (22), (26), непосредственно следующих из системы уравнений (5) при заданных условиях.

Таким образом, имеет место следующее предложение.

Теорема 5. *Если для системы уравнений* (5), *представленной при условиях* (8), (31), *существует дополнительный независимый первый интеграл вида* (27), *то для состояния* (32) *имеют место частные интегралы* (22), (26).

В случае, при котором дополнительный интеграл (16) задан в виде

$$F(v^{24}, \omega^{24}) = \text{const}, \tag{33}$$

аналогично предыдущему согласно соотношению (17) получаем определяющее равенство

$$l_1 v^{34} + l_2 \omega^{34} + l_3 v^{14} + l_4 \omega^{14} = 0, \tag{34}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}
[l_1 \;\; l_2]^T = P_{24} [c_4 \omega^{14} + \lambda^{14} \quad c_4 v^{14} + \lambda^{23}]^T + \\
+ Q_{24} [c_3 v^{14} - \lambda^{23} \quad -(c_3 \omega^{14} - \lambda^{14})]^T, \\
[l_3 \;\; l_4]^T = P_{24} [\lambda^{34} \;\; \lambda^{12}]^T + Q_{24} [-\lambda^{12} \;\; \lambda^{34}]^T,
\end{gathered} \tag{35}$$

и положено

$$P_{24} = A_{24} p_{24}, \quad Q_{24} = B_{24} q_{24}.$$

В равенствах (35) обозначено

$$c_3 = B_{34} - B_{14}, \quad c_4 = A_{14} + B_{34},$$

причем $c_3 \neq 0$ согласно принятым ограничениям.

Поскольку величины p_{24}, q_{24} зависят только от переменных v^{24}, ω^{24}, то из соотношений (34), (35) получаем условия, при которых равенство (34) выполняется для произвольных значений величин v^{i4}, ω^{i4} $(i = 1, 3)$:

$$l_s(v^{i4}, \omega^{i4}) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, 4). \tag{36}$$

Аналогично предыдущему в силу системы уравнений (36) получаем условия, соответственно,

$$\lambda^{12} = \lambda^{34} = 0, \quad \lambda^{14} = \lambda^{23} = 0, \tag{37}$$

$$v^{14} = \omega^{14} \equiv 0. \tag{38}$$

Согласно уравнениям движения (5) условия (37) устанавливают отсутствие гироскопического эффекта для твердого объекта относительно координатной оси 2-4, а система условий (37), (38) определяет существование первых частных интегралов

$$v^{24}(t) = \mathrm{const}, \quad \omega^{24}(t) = \mathrm{const}. \tag{39}$$

При этом согласно условиям (38) для данных ограничений не имеют места эффекты вращения и сдвига объекта относительно оси 1-4 базового координатного тетраэдра. В этом случае интеграл вида (33) представляется совокупностью интегралов (39).

Таким образом, имеет место следующее положение.

Теорема 6. *Если для системы уравнений* (5), *представленной при условиях* (8), (37), *существует дополнительный первый интеграл вида* (33), *то для состояния* (38) *имеются частные интегралы* (39).

Аналогично предыдущему исследуется вопрос о существовании первого дополнительного интеграла (16), заданного в виде

$$F(v^{34}, \omega^{34}) = \mathrm{const}, \tag{40}$$

однотипного интегралам видов (27), (33).

В силу соотношения (17) получаем определяющее равенство

$$n_1 v^{24} + n_2 \omega^{24} + n_3 v^{14} + n_4 \omega^{14} = 0, \tag{41}$$

где обозначено, аналогично предыдущему,

$$[n_1\ n_2]^T = A_{34} p_{34} [-(c_5 \omega^{14} + \lambda^{14})\ \ c_5 v^{14} + \lambda^{23}]^T + B_{34} q_{34} [c_6 v^{14} + \lambda^{23}\ \ c_6 \omega^{14} + \lambda^{14}]^T,$$

$$[n_3\ n_4]^T = A_{34} p_{34} [\lambda^{24} - \lambda^{31}]^T - B_{34} q_{34} [\lambda^{31}\ \lambda^{24}]^T \tag{42}$$

и положено

$$c_5 = A_{24} + B_{14}, \quad c_6 = B_{14} - B_{24}.$$

При этом $c_6 \neq 0$ в силу ранее принятых условий.

Согласно равенствам (42) в результате получаем условия

$$\lambda^{14} = \lambda^{23} = 0, \quad \lambda^{24} = \lambda^{31} = 0, \tag{43}$$

$$v^{24} = \omega^{24} \equiv 0, \tag{44}$$

при выполнении которых имеют место первые частные интегралы системы уравнений (5)

$$v^{34}(t) = \mathrm{const}, \quad \omega^{34}(t) = \mathrm{const}, \tag{45}$$

являющиеся интегралами сдвига и вращения, соответственно. Равенства (45) определяют указанные стационарные движения твердого объекта относительно оси 3-4 координатного тетраэдра.

Условия (43) и соотношения (44) для интеграла вида (40) однотипны соотношениям, полученным ранее для интегралов видов (27), (33). При этом смысл определяющих соотношений (43), (44) аналогичен истолкованию соответствующих выражений (31), (32), (37), (38), а равенства (45) определяют равномерное винтовое движение твердого объекта, происходящее относительно оси 3-4 координатного тетраэдра в пространстве L_3. Это движение слагается из совокупности его независимых равномерных движений: сдвига и вращения объекта относительно координатной оси 3-4 опорного тетраэдра.

Таким образом, имеет место следующее результирующее положение.

Теорема 7. *Если для системы уравнений* (5), *представленной при условиях* (8), (43), *существует дополнительный первый интеграл вида* (40), *то для состояния* (44) *имеются частные интегралы* (45).

Следует отметить, что в силу структурной симметрии уравнений системы (5) определяющие соотношения, полученные для интегралов вида (27), (33), (40), представленные группами (31), (32), а также (37), (38) и (43), (44), подчиняются правилу циклической перестановки индексов 1, 2, 3 при соответствующих величинах. Это же свойство относится и к виду соотношений, содержащихся в группах равенств (22), (26) и (39), (45).

Заключение. Дополнительный (термин, приведенный в работе [2, с. 84]) алгебраический первый интеграл динамической системы является одним из основных элементов ее интегрального многообразия, позволяющим решать задачи интегрирования системы (в частности, задачи интегрирования по Лиувиллю [1, с. 234]). В качестве примера этому можно указать на факт установления связи между процедурой нахождения дополнительных интегралов и интегрированием гамильтоновой системы уравнений методом Пуанкаре [2, с. 104].

В данной работе показано, что для исходной динамической системы, описывающей динамику твердого объекта в пространстве Лобачевского, при определенных структурно-динамических условиях существуют алгебраические первые дополнительные (частные) интегралы, соответствующие либо винтовому, либо стационарному (перманентному) движению объекта относительно осей координатного тетраэдра (типа “сдвиг” – “вращение”). Эти виды движения имеют место в инерционном режиме его состояния, при котором параметры винта внешних сил тождественно равны нулю. При этом в данном исследовании рассмотрены только некоторые случаи существования дополнительных первых интегралов, зависящих от одной или от двух соответственных (по ν^{j4}, ω^{j4}) переменных. Остальные виды зависимостей для типа первых интегралов, которые могут существовать, подлежат отдельному рассмотрению.

Отметим, что полученные дополнительные первые интегралы являются в определенном смысле условными, существующими лишь при выполнении определенных заданных условий. В частности, стационарные интегралы (22), (26); (39) и (45) имеют место только при выполнении дополнительных условий (32), (38), (44), наложенных на переменные, содержащиеся в зависимостях (27), (33), (40), соответственно.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М. : Наука, 1974. 432 с.

2. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М. : Наука, 1979. 320 с.

3. *Котельников А. П.* Проективная теория векторов. Казань : Типолитография Императорского Университета, 1899. 357 с.

4. *Крюков М. С.* О движении стержня по инерции в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1964. № 4 (41). С. 86–98.

5. *Крюков М. С.* О движении твердого тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 5 (60). С. 34–39.

6. *Крюков М. С.* Движение симметричного тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 6 (61). С. 68–75.

7. *Макеев Н. Н.* Устойчивость перманентных движений гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Геометрия обобщенных пространств и ее приложения : сб. научных трудов. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1981. Вып. 6. С. 58–71.

8. *Макеев Н. Н.* Линейный интеграл движения гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Дифференциально-геометрические структуры и их приложения : сб. научных трудов. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1991. Вып. 10. С. 29–36.

9. *Макеев Н. Н.* Квазитвердое движение прототела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы : сб. научных трудов. Пермь : Пермский ун-т, 2007. Вып. 39. С. 110–130.

10. *Макеев Н. Н.* Движение симметричного твердого тела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы : сб. научных трудов. Пермь : Пермский ун-т, 2010. Вып. 42. С. 46–63.

11. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М., Л. : Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 500 с.

12. *Широков П. А.* Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны // In memoriam N. I. Lobatschevskii. Казань : Главнаука, 1927. Т. 2. С. 119–134.

13. *Широков А. П.* Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Ученые записки Казанского ун-та. 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 196–207.

14. *Bell R. S.* A Treatise on the Theory of the Screws. Harvard, University Press, 1900. 544 p.

15. *Thomson W. and Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. Part I. London : Cambridge University Press, 1879.

Integrals of equations of motion in Lobachevsky space

N. N. Makeev
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, researcher,
Saratov Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.
Russia, Saratov. ORCID: 0000-0003-2807-977X. E-mail: nmakeyev@mail.ru

Abstract. The conditions for the existence of additional algebraic first integrals of the system of equations of motion of an absolutely solid material object in the Lobachevsky three-dimensional space according to E. T. Whittaker are given. It is assumed that the screws of the Lobachevsky space, according to the Kotelnikov-Studi rule, are mapped to complex vectors of a complex Euclidean space. Each screw corresponds to a certain complex vector with components that linearly depend on the Plucker coordinates and on the magnitude of the curvature of the Lobachevsky space. The object moves under the influence of specified gyroscopic forces, the structure of which is set by special conditions for the selected case. Some partial integrals, depending on one and two phase variables, characterizing the types of movements of the object, as well as the corresponding parametric constraints due to the conditions of the existence of partial integrals, are obtained explicitly.

Keywords: helical motion, absolute, bivector, screw, non-Euclidean space of constant curvature.

References

1. *Arnold V. I. Matematicheskie metody klassicheskoj mekhaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. M. Nauka (Science). 1974. 432 p.

2. *Dzhakal'ya G. E. O. Metody teorii vozmushchenij dlya nelinejnyh sistem* [Methods of perturbation theory for nonlinear systems]. M. Nauka (Science). 1979. 320 p.

3. *Kotel'nikov A. P. Proektivnaya teoriya vektorov* [Projective theory of vectors]. Kazan. Typolithography of Imperial University. 1899. 357 p.

4. *Kryukov M. S. O dvizhenii sterzhnya po inercii v prostranstve Lobachevskogo* [On the movement of the rod by inertia in the Lobachevsky space] // *Izvestiya vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1964. No. 4 (41). Pp. 86–98.

5. *Kryukov M. S. O dvizhenii sterzhnya po inercii v prostranstve Lobachevskogo* [On the motion of a solid body in Lobachevsky space] // *Izvestiya vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1967. No. 5 (60). Pp. 34–39.

6. *Kryukov M. S. Dvizhenie simmetrichnogo tela v prostranstve Lobachevskogo* [Motion of a symmetric body in Lobachevsky space] // *Izvestiya vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1967. No. 6 (61). Pp. 68–75.

7. *Makeev N. N. Ustojchivost' permanentnyh dvizhenij girostata v prostranstve Lobachevskogo* [Stability of permanent gyrostat movements in Lobachevsky space] // *Differencial'naya geometriya. Geometriya obobshchennyh prostranstv i ee prilozheniya : sb. nauchnyh trudov* – Differential geometry. Geometry of generalized spaces and its applications : collection of scientific papers. Saratov. Saratov University. 1981. Is. 6. Pp. 58–71.

8. *Makeev N. N. Linejnyj integral dvizheniya girostata v prostranstve Lobachevskogo* [Linear integral of gyrostat motion in Lobachevsky space] // *Differencial'naya geometriya. Differencial'no-geometricheskie struktury i ih prilozheniya : sb. nauchnyh trudov* – Differential geometry. Differential geometric structures and their applications : collection of scientific papers. Saratov. Saratov University. 1991. Is. 10. Pp. 29–36.

9. *Makeev N. N. Kvazitverdoe dvizhenie prototela v prostranstve Lobachevskogo* [Quasi-solid motion of a protothel in Lobachevsky space] // *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy : sb. nauchnyh trudov* – Problems of mechanics and control. Nonlinear dynamical systems : collection of scientific papers. Perm. Perm University. 2007. Is. 39. Pp. 110–130.

10. *Makeev N. N. Dvizhenie simmetrichnogo tverdogo tela v prostranstve Lobachevskogo* [Motion of a symmetric rigid body in Lobachevsky space] // *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy : sb. nauchnyh trudov* – Problems of mechanics and control. Nonlinear dynamical systems : collection of scientific papers. Perm. Perm University. 2010. Is. 42. Pp. 46–63.

11. *Whittaker E. T. Analiticheskaya dinamika* [Analytical dynamics]. M., L. United Scientific and Technical Publishing House of the NKTP of the USSR. 1937. 500 p.

12. *Shirokov P. A. Preobrazovanie vintovyh integralov v prostranstvah postoyannoj krivizny* [Transformation of screw integrals in spaces of constant curvature] // In memoriam N. I. Lobatschevskii. Kazan. Glavnauka. 1927. Vol. 2. Pp. 119–134.

13. *Shirokov A. P. Vintovaya regulyarnaya precessiya v prostranstve Lobachevskogo* [Screw regular precession in Lobachevsky space] // *Uchenye zapiski Kazanskogo un-ta* – Scientific Notes of Kazan University. 1963. Vol. 123. Book 1. Pp. 196–207.

14. *Bell R. S.* A Treatise on the Theory of the Screws. Harvard, University Press, 1900. 544 p.

15. *Thomson W. and Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. Part I. London : Cambridge University Press, 1879.