УДК 37.016:51.854 DOI 10.25730/VSU.0536.22.006

О разработке методических рекомендаций для учителей математики и информатики по профильному обучению учащихся дискретной математике

Е. А. Перминов

доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры математических и естественно-научных дисциплин,
Российский государственный профессионально-педагогический университет.
Россия, г. Екатеринбург. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

Аннотация. В статье обосновывается актуальность проблемы разработки методических рекомендаций для учителей математики и информатики по профильному обучению дискретной математике в школе. С этой целью анализируется роль дискретной математики в сфере компьютерных наук. Характеризуются основы дискретной математики и их элементы в учебной и популярной литературе по математике и информатике для школы.

Излагаются особенности методики отражения основ дискретной математики в разработке методических рекомендаций, в чем фундаментально значение задачного подхода. При этом перечисляются наиболее важные виды задач. Особое внимание уделяется методике задачного подхода в изучении языка доминирующих в дискретной математике алгебраических и логических структур.

Ключевые слова: школа, обучение математике и информатике, роль дискретной математики, основы дискретной математики, методика профильного обучения.

1. Об актуальности разработки методических рекомендаций. Как известно, в прошлом веке произошло превращение дискретной математики (ДМ), синонимом которой является название конечная, в составную часть магистрального направления современной математики. Не случайно один из основоположников информатики В. М. Глушков указывал, что математика в начале XXI в. «будет в большей мере математика дискретных, а не непрерывных величин», а «расширение области математизации знания ... потребует и будет опираться на развитие новых разделов математики, прежде всего – новых разделов дискретной математики» [11, с. 122]. Причиной продолжающегося интенсивного развития идей и методов дискретной (конечной) математики является то, что «по существу все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного... Мы предпочитаем непрерывную модель лишь потому, что она проще» [18, с. 15]. Именно поэтому в отсутствие компьютеров математические модели были в основном непрерывными, а не дискретными. Анализируя дискретные (логико-алгоритмические) начала деятельности цифрового мира и общества, В. И. Игошин имел все основания заключить: «Знаменами» цифровой эры XXI века являются: дискретность ⇒ алгоритмизм ⇒ конструктивизм» [14, с. 307]. По его мнению, обосновываемому в процитированной статье, именно дискретная математика является основой компетенций цифровой эры. На актуальность в цифровую эпоху изучения основ дискретной математики в школах и вузах указывалось на 13-м Всемирном конгрессе по математическому образованию (ICME-13), проходившем в Гамбурге (Германия) в июле 2016 г.

Как следует из изложенного, обучение ДМ имеет особенно важное значение в обучении математике и информатике в школе и вузе, лежащих в основе отражения в образовании дискретных начал деятельности цифрового мира. Этому обучению препятствует чрезмерное увлечение информационными технологиями (ИТ) в подготовке учащихся, что особенно проявилось в период пандемии Covid-19. Наблюдается не имеющий должной научной базы процесс ускоренного внедрения в образование некоторых ИТ, разработанных подчас далекими от математики и программирования специалистами, гарантирующими быстрый эффект и получающих лавры новаторов без серьезных педагогических исследований. В результате появляется много бесполезной, искаженной и даже ложной информации в содержании обучения (так называемые «информационные шумы»).

Стоит напомнить, что выдающийся ученый в области информатики А. П. Ершов подчеркивал базовую роль дискретной математики в доведении системы «законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах» [13, с. 294]. Как образно выразился Р. Гласс, «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии программного обеспечения…» [10, с. 23]. Поэтому ДМ имеет фундаментальное значение в корректной разработке и внедрении современных информационных технологий, какими являются искусственный интеллект, большие данные (Big Data), виртуальная и дополненная реальность и другое, коренным образом меняющие мир профессий.

Как показывает анализ учебной литературы по математике и информатике для школы, некоторые элементы ДМ уже нашли свое отражение в содержании этих учебников, в частности – элементы комбинаторики и алгебры логики. Но необходимо *не разрозненное, а системное* внедрение элементов ДМ в профильное обучение математике и информатике в школе в условиях большого расширения сферы информатики и, как следствие, формирования компьютерных наук (КН). В связи с этим является актуальной ***проблема*** разработки методических рекомендаций для учителей математики, информатики по профильному обучению дискретной математике в школе. Ее решение особенно важно в обучении элементам ДМ учащихся классов *с углубленным изучением математики и информатики* с целью подготовки к последующему профессиональному образованию в сфере КН.

В разработке этих методических рекомендаций важную роль может играть привлечение авторов посредством соответствующих грантов РГНФ и других открытых конкурсов разного уровня по специальным темам в области фундаментальных проблем образования, в том числе – в сфере разработки методической и учебной литературы.

2. Об элементах ДМ в учебной и популярной литературе для школы. О возможности решения назревшей проблемы разработки методических рекомендаций свидетельствует то, что в настоящее время некоторые важные понятия ДМ внедрены в содержание учебников по информатике в школе. Например, важные понятия алгебры логики и элементов теории алгоритмов изложены в учебниках [15; 16]. Кроме того, многие из них изложены в многочисленной популярной литературе и в литературе для математического просвещения, обзор которой сделан в [25]. Среди них – понятия графа, алгебры логики, булевой функции, математической модели, математического языка и некоторые другие понятия. В противовес этому в учебниках по математике прослеживается традиционный «функциональный» подход, в рамках которого недостаточное внимание уделяется внедрению элементов дискретной математики, особенно важных в овладении основами научных методов познания окружающего мира, что является важной личностной характеристикой выпускника, предусмотренной в ФГОС (полного) общего образования (10–11 кл.), именуемым далее Стандартом. Отметим, что попытки их внедрения в профильное обучение математике уже неоднократно предпринимались и ранее. В частности, элементы математической логики были изложены в учебнике [1], элементы комбинаторики – в учебниках [2; 3].

Все это лишь подтверждает разрозненное, не системно осуществляемое профильное обучение в школе базовым понятиям и методам ДМ, имеющих в современном цифровом мире и обществе общеобразовательное значение. Тем не менее многие изложения многих этих понятий дискретной математики можно обнаружить в содержании литературы для внеклассного чтения по математике, другой популярной литературе по математике для школьников и литературе в области математического просвещения. Достаточно полный обзор элементов ДМ в этой литературе для школьников осуществлен в монографии [25] (см. также литературу из учебника [23]).

Проведенный в [25] обзор литературы по дискретной математике показывает, что уже достаточно полно разработаны основы методики изучения в школе базовых понятий из таких разделов ДМ, какими являются элементы *абстрактной алгебры, математической логики, комбинаторики и некоторых понятий из теории алгоритмов.* Однако анализ указанной литературы показывает, что не разработана методика изучения элементов *алгоритмики и* теории *формальных языков.*

Отметим, что алгоритмика (algorithmics) – научная дисциплина, занимающаяся изучением правильности, сложности и эффективности алгоритмов. Алгоритмика также известна и под другим названием «Анализ алгоритмов».

3. О роли дискретной математики в компьютерных науках. В решении указанной проблемы разработки методических указаний фундаментальное значение имеет анализ роли ДМ в исследованиях компьютерных наук, важный в отражении основ дискретной математики в профильном обучении математике и информатике в школе.

Действительно, в условиях существования уже более 15 тысяч наук [6] стала весьма обширной сфера не только математики, но и информатики. За пределами сферы информатики «остаются области, охваченные компьютеризацией. Например, область инженерного дела» [31]. В связи с этим отметим, что не случайно в работе [33] прослеживается формирование трех значений термина «информатика». По этой причине в цифровую эру наряду с термином «Информатика» постепенно входит в обиход термин «Компьютерные науки (computer science)», давно использующийся в англоязычных странах. Более того, в [22] обосновывается, что переход от названия «Информатика» к названию «Компьютерные науки» – веление времени. При этом существует мнение, что в эпоху компьютерной революции «все науки можно разделить на компьютерные и некомпьютерные (noncomputer science)» [29, с. 120]. В науковедении при разработке классификаций наук был даже введен термин «Информационно-компьютерные науки». При этом «под информационно-компьютерными науками понимались как технические (компьютерные), так и социогуманитарные дисциплины, связанные с информационной деятельностью» [4, с. 4].

Таким образом, такие изменения в терминологии закономерны, поскольку в условиях лавинообразного роста научной информации возникают существенно различающиеся трактовки предметного поля информатики, чем и вызвано возникновение сферы компьютерных наук, связанных с использованием уникальных возможностей современного компьютера. Поэтому вопросы преподавания математики и КН в высшей школе обсуждались на конференциях, посвященных проблемам развития высшего образования в сфере математики и информатики на современном этапе [19; 21].

Формирование компьютерных наук, лежащих в основе использования уникальных возможностей современного компьютера, вызвано тем, что ключевую роль в начавшей научной революции играет математика и феномен компьютера и поэтому эту революцию называют цифровой. Любопытное сравнение роли математики и компьютера привел В. А. Садовничий: «Если за 20 лет (с 1992 по 2012) скорость компьютеров увеличилась примерно в 8 тысяч раз, то за счет развития математических методов скорость расчетов увеличилась более чем в 400 тысяч раз… Но самое лучшее, конечно, это *соединение* прогресса математики и компьютеров» [30, с. 9]. Главную роль в этом на рубеже тысячелетий играют идеи и методы современной ДМ *как основы* использования уникальных возможностей компьютера.

В цифровую эру не зависящие от конъюнктуры и времени универсальные идеи и методы ДМ и формируемые в результате их изучения умения и навыки позволяют использовать уникальные возможности компьютера практически в любой профессиональной деятельности. Об этом свидетельствует и проведенный в [25] анализ функций ДМ в *компьютерных технологиях и системах компьютерной математики*, являющихся компьютерной основой исследований КН. Поэтому за рубежом у специалистов в сфере компьютерных наук вошло в обиход крылатое выражение «Дискретная математика рулит!».

4. О методике отражения основ ДМ в разработке методических рекомендаций. Как следует из проведенного в [25] анализа роли дискретной математики в компьютерных технологиях, системах компьютерной математики, а также учебной литературы по ДМ, в профильном обучении дискретной математике в школе велико значение основ дискретной математики, которые образуют дисциплины *абстрактная алгебра, математическая логика, комбинаторика, теория графов, алгоритмов, автоматов и формальных языков.* Поэтому не случайно базовые понятия и методы ДМ (за исключением комбинаторики) включены в учебное пособие «Фундаментальные основы дискретной математики» [12]. Несмотря на различные подходы в обучении дискретной математике в вузах и порожденное ими разнообразие содержания учебной литературы по ДМ [25], перечисленные дисциплины действительно в совокупности образуют основы дискретной математики.

Важно отметить, что абстрактная алгебра и математическая логика играют *лидирующую роль* в основах ДМ. Действительно, благодаря синтезу идей математической логики и абстрактной алгебры в первой половине прошлого века были заложены основы теории математических моделей и алгоритмов, что ознаменовало начало эпохи всеобщей компьютеризации. Поэтому закономерно, что абстрактная алгебра и математическая логика позднее легли в основу замечательной идеи В. М. Глушкова «представления облика вычислительной системы в виде системы алгебрологических выражений, над которыми можно выполнять ряд преобразований, а также в виде сети алгоритмических модулей» [17, с. 1]. В результате ДМ стала инструментарием «для представления и обработки информации в компьютерах, а также алгебрологических методов решения задач» [там же, с. 2].

Понятия и методы абстрактной алгебры, математической логики и других перечисленных дисциплин из основ дискретной математики буквально пронизывают исследования компьютерных наук. Поэтому эти понятия и методы из основ ДМ имеют важное значение в достижении метапредметных результатов подготовки в школе по математике и информатике в соответствии с требованием Стандарта.

Основы ДМ имеют фундаментальное значение в предусмотренном Стандарте овладения системой базовых знаний, отражающих вклад математики, информатики в формирование современной научной картины мира, важной в профессиональной ориентации обучающихся. Они имеют фундаментальное значение в реализации междисциплинарных связей математики и информатики и других естественно-научных предметов, изучаемых в школе (физики, химии).

В реализации этих связей особенно важен принцип единства в обучении элементам дискретной и непрерывной математики. Это предполагает пропедевтику формирования у школьников первоначальных умений гармоничного сочетания в решении задач дискретных и непрерывных моделей. В основе пропедевтики формирования у школьников таких умений лежат базовые понятия изучаемого в школе курса алгебры и математического анализа и базовые понятия из основ ДМ, ставшие общеобразовательными понятиями в современном цифровом мире и обществе.

Как обосновано в [25], особенно важными базовыми понятиями из основ ДМ являются понятия языка *доминирующих* в дискретной математике алгебраических, порядковых структур и комбинаторных, логических и алгоритмических схем как универсальных междисциплинарных методов, средств научного познания. Этот язык имеет фундаментальное значение умений систематизации того, что известно по интересующей проблеме, ее структуризации, представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа с использованием компьютера.

Как выявлено в [26], базовые понятия этого языка имеют фундаментальное значение в формировании структуры интеллектуальных операций в мышлении, лежащих в основе развития логического, алгоритмического и математического мышления учащихся. Поэтому они лежат в основе корректного обучения моделированию объектов и явлений с использованием компьютера, исключающем возникновение ошибок пропущенной логики рассуждений и ошибок в использовании программного, компьютерного и аппаратного обеспечения моделирования.

Как следует из [25], в отборе содержания профильного обучения ДМ в школе главным ориентиром являются следующие базовые понятия языка доминирующих в дискретной математике структур и схем:

– множество и подмножество, операции с множествами;
– отображения множеств и их основные виды;
– бинарное отношение, основные свойства бинарных отношений;
– алгебраическая операция и алгебра;
– группа, кольцо, поле, решетка;
– математическая модель как множество с заданными на нем операциями и отношениями, изоморфизм (равенство) моделей;
– простое и сложное высказывание, операции над высказываниями;
– логическое тождество, основные тождества алгебры логики;
– предикат и квантор;
– перестановка, сочетание, размещение, бином Ньютона;
– простой, неориентированный, ориентированный, эйлеров, гамильтонов, связный граф и дерево;
– алгоритм с конечным и бесконечным числом действий исполнителя;
– полиномиальный, экспоненциальный и эффективный алгоритмы;
– математический язык;
– понятие алгоритмической разрешимости на выбранном математическом языке.

В цифровом мире и обществе многие из понятий из этого списка приобрели уже статус общеобразовательных понятий математики и информатики, важных в овладении математической терминологией компьютерных наук, особенно искусственного интеллекта, радикальным образом меняющего мир профессий. Поэтому они имеют фундаментальное значение в отборе *инвариантного* содержания обучения ДМ в зависимости от профиля обучения, что важно учесть в решении поставленной ***проблемы*** разработки методических рекомендаций.

Отметим, что методика изучения этих понятий (за исключением предиката и квантора) изложена в учебных пособиях [23; 24]. Основным в методике их изучения является задачный подход с использованием занимательных задач, задач с сюжетным текстом и нестандартных задач, что также играет важную роль в решении поставленной проблемы.

5. О реализации задачного подхода в разработке методических рекомендаций. Задачный подход имеет фундаментальное значение в формировании навыков математической познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности школьников, что является еще одной основной целью Стандарта.

Для развития навыков этих видов деятельности в методических рекомендациях по внедрению элементов ДМ должна быть предусмотрена соответствующая структура задач. В учебном пособии для профильного обучения ДМ в школе [23] включены, в частности, задачи следующих видов.

1*) Задачи с неверно составленным условием.*

2) Задачи с ненайденным решением.

3) Задачи, для которых не существует алгоритм решения.

4) Задачи с бесконечным числом действий алгоритма.

5) Задачи с конечным числом действий алгоритма.

6) Задачи на составление эффективного алгоритма.

В обучении постановке и решению этих задач видов 1–6 в старших классах наряду со знаниями из ДМ используются знания, полученные ими в математике, информатике, физике и в других естественнонаучных предметах.

7) Задачи на изучение доступных для восприятия понятий языка алгебраических и логических структур.

Как уже было отмечено ранее, язык абстрактной алгебры и математической логики играет лидирующую роль в основах ДМ. Вследствие этого доступные для восприятия школьников и наглядные понятия языка этих научных дисциплин занимают особенно важное место в реализации задачного подхода в профильном обучении ДМ. Поэтому в структуре задач и предусмотрены задачи из п. 8. Благодаря обучению решениям этих задач можно уйти от изучения довлеющих рекомендаций «работать с установившимся инструктивным материалом» [20, с. 13]. Например, довлеют рекомендации с установившимся инструктивным материалом по выполнению привычных операций на множестве действительных чисел и «инструкции» по тождественному преобразованию алгебраических выражений из школьного курса алгебры.

8) Исследовательские задачи, решаемые на основе наглядных понятий из элементов теории графов, решеток и групп симметрий графов и решеток.

Обучение решению задач из п. 8 имеет важное значение во внеурочной познавательной деятельности учащихся, особенно учащихся классов с углубленным изучением математики и информатики. Эти задачи играют важную роль в подготовке будущих математиков и специалистов в области КН.

Охарактеризуем основные особенности методики задачного подхода в обучении решению задач видов 7–8 на конкретных характерных примерах задач, приводимых далее в пп. 6–8.

6. Решение задач в пятиэлементном поле. Начинать обучение решению задач из п. 7 на доступные для восприятия школьников понятия языка алгебраических структур целесообразно с решения задач в пятиэлементном поле, что и сделано в учебном пособии [23]. Причиной этому является то, что пятиэлементное поле можно назвать «новой арифметикой». Как будет показано, это название оправданно потому, что законы этого поля почти не отличаются от законов арифметики и более того – от законов обычной алгебры, изучаемой в школе.

Подготовка к решению задач этой «*новой арифметики*» начинается с рассмотрения вращений правильного пятиугольника вокруг центра против часовой стрелки, являющихся совмещениями его вершин. Будем считать совпадающими всякие два вращения, отличающиеся друг от друга на число, кратное 360^0. Поэтому будем иметь всего пять вращений, отличающихся друг от друга положением вершин пятиугольника. Это повороты 0^0, 72^0, 144^0, 216^0 и 288^0.

Последовательное выполнение двух поворотов кратко названо сложением поворотов. Для дальнейшего изучения операций в пятиэлементном поле вводятся более удобные обозначения $0^0=\hat{0}$, $72^0=\hat{1}$, $144^0=\hat{2}$, $216^0=\hat{3}$, $288^0=\hat{4}$. Знак угла над цифрой позволяет отличать повороты от чисел 0, 1, 2, 3 и 4. Тогда например, равенство $72^0+144^0=216^0$ перепишется кратко в привычном виде $\hat{1}+\hat{2}=\hat{3}$.

Операция последовательного выполнения двух поворотов или кратко – сложения поворотов из множества $A=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ записывается очевидным образом в виде таблицы 1.

Умножение элементов множества A выполняется в соответствии с таблицей 2.

Используя эти таблицы, учащимся легко объяснить составление таблиц для операций вычитания и деления как операций, обратных для введенных операций сложения и умножения (как это делается в школе для аналогичных операций с числами).

Таблица 1

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Таблица 2

$\times$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Заметим, что аналогичным образом можно было бы определить и n-элементное поле для любого простого натурального числа n. Например, в соответствии с принципом наглядности определение семиэлементного поля начать с рассмотрения аналогичных вращений правильного восьмиугольника, являющихся совмещениями его вершин. При этом для обучения учащихся составлению и запоминанию таблиц Кэли сложения и умножения элементов этого поля целесообразно далее определять его как кольцо классов вычетов по модулю 7.

Как доказывается в процессе решения в «*новой арифметике*» аналогов простых задач из школьной алгебры, такое название этого пятиэлементного поля полностью оправдано тем, что для новых операций сложения, вычитания, умножения и деления в этом поле справедливы все законы школьной арифметики. Более того, оказывается, что справедливы и формулы сокращенного умножения и свойства степеней. Особенно удивляет школьников то, что в этой арифметике нет отрицательных чисел и дробей, вызывающих у них большие затруднения в действиях с ними. Поэтому «новую арифметику» выучить гораздо легче, чем школьную арифметику.

Приведем наиболее характерные примеры задач этой «арифметики» разного уровня сложности.

1) Вычислить:

а) $\hat{3}+\hat{4}$; б) $\hat{3}-\hat{4}$; в) $\frac{\hat{3}}{\hat{4}}$; г) $\frac{\hat{3}}{\hat{4}}(\hat{2}+\hat{4})$.

2) Решить уравнения:

а) $\hat{3}x-\hat{4}=\hat{2}$; б) $\frac{x-\hat{3}}{\hat{4}}=\hat{2}$; в) $\frac{x}{\hat{2}}+\frac{x}{\hat{3}}=\hat{1}$;

г) $x^2-2x+\hat{4}^2=\hat{0}$, где $2x=x+x$; д) $x^2-\hat{2}x=\hat{0}$; е) $(x-\hat{4})(x^2+\hat{4}x+\hat{1})=\hat{0}$;

ж) $x^6=\hat{4}x$.

Задачи на доказательство тождеств для элементов «новой арифметики» из множества $A=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$:

3) Доказать, что для любого элемента $a\neq\hat{0}$ существует такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1}=a^{-1}a=\hat{1}$. При этом элемент a^{-1} обозначается также $\frac{1}{a}$, элемент ab^{-1} – далее через $\frac{a}{b}$.

4) Доказать, что из $a=b$ при любом $c\neq\hat{0}$ следует $ac=bc$ и $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

5) Доказать формулы сокращенного умножения:

а) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (где $2a=a+a$); б) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

в) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; г) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

д) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

6) Доказать свойства степеней:

а) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; б) $(a^m)^n=a^{mn}$; в) $a^nb^n=(ab)^n$; г*) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$;

д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $(n,m\in N)$; е) $a^4=\hat{1}$ при $a\neq\hat{0}$.

7) Упростить выражения:

а) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}-b$; б) $\frac{\hat{2}(a^3+\hat{2})}{a^2-\hat{3}a+\hat{4}}-\hat{2}a$; в) $\left(\frac{a^4}{b^2}\right)^2\cdot b$.

8) Составить алгоритм решения уравнений «новой арифметики», являющихся аналогами уравнений из курса школьной алгебры:

а) $a\cdot x=b$ с параметрами a и b;

б) $x^2+px+q=\hat{0}$ с параметрами p и q.

Указание. Доказать формулу $x=\hat{2}p\pm\sqrt{\hat{4}p^2-q}$ нахождения корней этого уравнения.

Здесь целесообразно напомнить о задачах вида 3, *для которых не существует алгоритм решения.* При этом сообщить, что не существует алгоритма нахождения корней произвольного многочлена степени выше 4 на множестве действительных чисел. В то же время, как следует из тождества $a^4=\hat{1}$ при $a\neq\hat{0}$, для многочленов в пятиэлементном поле такой алгоритм существует.

7. Задачи на понятия алгебры логики. Начинать обучение решению задач из п. 7 на доступные для восприятия школьников понятия языка логических структур целесообразно с решения задач алгебры логики. Как показывает проведенный в [25] анализ учебной и популярной литературы, методика обучения решению задач алгебры логики и их основные виды уже достаточно полно изложена в этой литературе. В то же время в этой литературе отсутствуют задачи на ряд способов доказательства логических тождеств, являющихся аналогами способов доказательств тождеств школьной алгебры, а также задачи на решение логических уравнений.

В [23] изложены следующие способы доказательства тождеств алгебры логики:

1) составление таблицы истинности высказываний для левой и правой части тождества;

2) тождественное преобразование левой или правой части, или обеих частей логического равенства одновременно на основе тождеств из предыдущего параграфа;

3) способ подстановки;

4) прибавление к обеим частям логического равенства одного и того же выражения;

5) умножение обеих частей логического равенства на одно и то же выражение, не являющееся тождественно ложным;

6) взятие логического следования $(C \Rightarrow A) \equiv (C \Rightarrow B)$ или $(A \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow C)$ от обеих частей логического равенства $A \equiv B$;

7) взятие отрицания ($\overline{A} \equiv \overline{B}$);

8) способ почленного сложения или умножения логических равенств.

В учебном пособии [23] приведено немало примеров доказательства тождеств первым способом, и в нем приведены упражнения на обучение другим перечисленным способам доказательств. При этом для обеспечения доступности обучения перед объяснением каждого способа из пп. 2–5 приводятся упражнения на аналогичный способ доказательства тождества из школьной алгебры.

Приведем два примера задач из [23] на решение логических уравнений, являющихся аналогами уравнений из курса школьной алгебры:

а) Решить уравнение $A \bullet X \equiv B$, где $A, B \in \{И, Л\}$;

б) $AX^2 + BX + C \equiv Л$, где $A, B, C \in \{И, Л\}$.

Примечание. Знаки + и • являются более привычными для школьников обозначениями операций дизъюнкции и конъюнкции.

8. *Исследовательские задачи (вида 8) на графы, решетки и группы симметрий.* Важную роль в формировании навыков математической познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности на основе ДМ в соответствии с требованиями Стандарта играет обучение решению исследовательских задач на наглядные понятия ДМ, например, классического графа и решетки, группы симметрий (автоморфизмов) графа и решетки. При этом отметим, что в отличие от графа, наглядное понятие решетки очень редко изучалось на факультативных курсах в школе. Для изучения этого понятия школьниками можно рекомендовать популярные книги [7; 32].

Как известно, понятие симметрии объектов в науке и природе является фундаментальным научным понятием, возникшим еще в древности в архитектуре и искусстве. В школе понятие симметрии изучалось на основе задач нахождения групп различных преобразований геометрических фигур и тел из школьного курса геометрии. Приводимые далее некоторые исследовательские задачи из статьи [27] дополняют эти задачи школьного курса геометрии.

В решении этих задач важную роль играют понятия *равных* (изоморфных) *конечных* графов и решеток. При этом определение равных графов или решеток посредством биекции, сохраняющей инцидентность вершин графа или точные нижние и верхние грани двух элементов решетки, является непривычным и поэтому трудным для восприятия школьников (как и сам термин «изоморфизм»). Поэтому изоморфизм графов и решеток определяется следующим образом.

Рассмотрим произвольный граф с n вершинами. Занумеруем его вершины числами от 1 до n. Ребро графа, соединяющие вершины i и j, обозначим (i, j) в случае $i < j$. Если же $j < i$, то обозначим ребро (j, i). Тогда каждому ребру (i, j) графа будет соответствовать точка (i, j) на координатной плоскости Oxy. Далее приводятся примеры такой нумерации вершин графов и изображения ребер графа в виде точек на плоскости. Делается вывод, что с помощью этих точек можно записать всю информацию о ребрах: число ребер и то, какие вершины соединяет каждое ребро. Затем дается следующее определение из [23].

Графы Γ и G с одинаковым числом вершин называются *равными*, если вершины каждого графа можно занумеровать так, чтобы ребрам Γ и ребрам G соответствовало одно и то же множество точек на координатной плоскости.

В определении *равных* решеток используется отношения покрытия. Говорят, что «элемент a покрывает элемент b, если $a > b$ и не существует такого x, что $a > x > b$».

Решетки A и B с одинаковым числом элементов называются *равными*, если элементы каждой решетки можно обозначить одним и тем же множеством символов так, чтобы решетки A и B оказались заданными одним и тем же бинарным отношением покрытия. При этом определение иллюстрируется примерами диаграмм 4, 5, 6-элементных решеток, элементы которых обозначаются латинскими буквами.

Конечно, надо еще выяснить, заменяет ли это определение точное определение изоморфизма *конечных* решеток через точную нижнюю и верхнюю грани двух элементов решетки. Но для решеток с малым числом элементов им можно воспользоваться для упрощения их описания посредством диаграмм (и учета в них числа атомов, коатомов и максимальных цепей).

Примеры исследовательских задач из [27].

1) Для любой симметрической группы S_n найти $n+1$-вершинное дерево D, для которого $S_n \cong AutD$, где через $AutD$ обозначена группа автоморфизмов D.

2) Найти все -вершинные эйлеровы графы для $n \leq 6$ с группой автоморфизмов четвертого порядка.

3) Может ли циклическая группа быть группой автоморфизмов гамильтонового графа с 6 вершинами?

4) Указать последовательно диаграммы всех 73 семиэлементных решеток.

5) Найти все семиэлементные решетки с симметрической группой автоморфизмов.

6) Найти решетку, группа симметрий которой изоморфна группе симметрий тетраэдра.

В монографии [8, с. 35] поставлена нерешенная проблема:

«Найти все конечные решетки, для которых каждый автоморфизм соответствующего им графа являлся бы решеточным автоморфизмом (Уотермен)».

Задача 7. Найти все – элементные решетки для $n \leq 7$ с указанным свойством их автоморфизмов.

Важно отметить, что в [27] даются *подробные указания* для решения предложенных задач.

Отметим, что ряд исследовательских задач для школьников на элементы теории решеток можно выбрать среди задач практикума [9].

9. *Об исследовательских задачах на обучение дискретизации непрерывных математических моделей.* Эти задачи важны в реализации отмеченного ранее принципа единства в обучении элементам дискретной и непрерывной математики. Как подчеркивал В. И. Арнольд в третьем издании своей книги «Теория катастроф», «математическое описание мира основано на тонкой игре непрерывного и дискретного» [5, с. 4]. По-видимому, впервые такую игру начал Архимед в своей знаменитой дискретизации графика непрерывной функции – параболы для нахождения площади сегмента параболы. С появлением уникальных возможностей современных компьютеров возможности этой тонкой игры несравнимо увеличились, что можно обнаружить, например, при исследовании фундаментальных научных понятий хаоса, порядка и фрактала в вузах.

Начало обучения этой тонкой игре в школьном курсе математики закладывается при изучении элементов математического анализа. Например – при построении графика непрерывной функции, в основе которого фактически лежит дискретизация ее графика, то есть определение тех важных его точек, которые раскрывают главные свойства функции (иметь минимум, максимум, точки перегиба, наибольшее и наименьшее значение на отрезке и так далее). Но в обучении такой тонкой игре в школе важны и понятия дискретной математики. Например – изображение в координатной плоскости «графика» булевой функции одной переменной $Y = f(X)$, где $X, Y \in \{0,1\}$. При этом логические символы $0,1$ отождествляются с нулем и единицей. Точно так же можно изобразить точками в системе координат $Oxyz$ точки пространственного «графика» булевой функции двух переменных $Z = f(X,Y)$.

В обучении такой тонкой игре важную роль играет теория решеток, на основе которой наиболее полно с общенаучной точки зрения раскрывается суть важного понятия порядка на сложных системах, как антипода понятию хаоса. Поэтому в решении исследовательских задач на изучение элементов теории решеток можно предложить школьникам задачи на построение решеточных фракталов. Одна из таких исследовательских задач предложена в [28]. Это задача на построение аналога геометрического фрактала. А именно – решетки, являющейся «решеточным» фракталом, наглядно демонстрирующим суть понятия фрактала на основе подобия части целому. Эта решетка появляется постепенно в серии итераций в построении диаграмм решеток-предфракталов и наглядно предстает окончательно в виде черного квадрата Малевича, повернутого на 45^o.

В заключение подчеркнем, что в формировании умений и навыков познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности на основе задачного подхода целесообразно предусмотреть лабораторные работы по ДМ. Использование заранее подготовленных электронных учебных материалов, созданных в среде систем компьютерной математики для выполнения лабораторных работ способствует актуализации внутрипредметных связей и межпредметных связей математики и информатики. Например, для изучения различных видов конечных графов и их свойств можно рекомендовать систему Maxima с ее специализированным пакетом graphs, в том числе – для проверки результатов, полученных «вручную». Для изучения различных видов конечных решеток и свойств их элементов можно рекомендовать языки программирования Delphi и Python.

Список литературы

1. Алгебра и начала анализа. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений : в 2 ч. Ч. 1. / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузенцова, Е. А. Седова. М. : Дрофа, 2003. 320 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко. Изд. 2-е. М. : Просвещение, 2010. 336 с.

3. Алгебра и математический анализ. 11 кл. : учеб. пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. Изд. 7-е. М. : Мнемозина, 2000. 288 с.

4. *Антопольский А. Б.* О представлении информационно-компьютерных наук в различных классификационных системах : доклад на семинаре ИПИ РАН и ИНИОН РАН «Методологические проблемы наук об информации», 26 мая 2016 г., Москва. URL: inion.ru›site/assets…antopolsky_a…presentation.ppt (дата обращения: 17.11.2021).

5. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. Изд. 3-е, доп. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1990. 128 с.

6. *Бармин А. В.* К проблеме классификации науки. История науки и техники в системе современных знаний : мат-лы научной конференции, посвященной 10-летию кафедры истории науки и техники УГТУ–УПИ, Екатеринбург, 14 декабря 2009 г. С. 41–46.

7. *Беран Л.* Упорядоченные множества и решетки: пер. с чешского. Москва : Наука, 1981. 64 с.

8. *Биркгоф Г.* Теория решеток: пер. с англ. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1984. 568 с.

9. *Вечтомов Е. М.* Практикум по теории упорядоченных множеств и решеток / Advanced science. 2018. № 3. С. 4–17.

10. *Гласс Р.* Факты и заблуждения профессионального программирования: пер. с английского. Санкт-Петербург : Символ-Плюс, 2007. 240 с.

11. *Глушков В. М.* Кибернетика. Вопросы теории и практики. М. : Наука, 1986. 888 с.

12. *Горбатов В. А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М. : Наука. Физматлит, 2000. 544 с.

13. *Ершов А. П.* Избранные труды. Новосибирск : Наука: Сиб. изд. фирма, 1994. 413 с.

14. *Игошин В. И.* «Дискретная математика – основа компетенций цифровой эры» : мат-лы XXXIX Междун. научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Москва : МГПУ, 2020. 396 с.

15. Информатика. 10 кл. : учебник / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2016. 288 с.

16. Информатика. 11 кл. Базовый уровень : учебник / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2016. 256 с.

17. *Капитонова Ю. В.* Лекции по дискретной математике / Ю. В. Капитонова, С. Л. Кривой, А. А. Летичевский, Г. М. Луцкий. СПб. : БХВ-Петербург, 2004. 624 с.

18. *Колмогоров А. Н.* Научные основы школьного курса математики. Первая лекция // Математика в школе. 1969. № 3. С. 12–18.

19. «Математика и компьютерные науки в образовании» : VI конференция-семинар для учителей математики и информатики, посвященная памяти Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 2021. URL: mathschool. imm.uran.ru (дата обращения: 19.10.2021).

20. *Красовский Н. Н.* Математическое моделирование в школе. Екатеринбург : Известия УрГУ, 1995. № 4. С. 12–24.

21. «Преподавание математики и компьютерных наук в высшей школе» : мат-лы Междун. научно-методич. конф. Пермь : Изд-во Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2017. 104 с.

22. *Одинец В. П.* Появление названия «Компьютерные науки» – веление времени / Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 58–68.

23. *Перминов Е. А.* Дискретная математика : учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург : ИРРО, 2004. 206 с.

24. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений : учебное пособие. Екатеринбург : Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2015. 256 с.

25. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования : монография. Екатеринбург : Изд-во РГППУ, 2013. 286 с.

26. *Перминов Е. А.* О психологических аспектах реализации дискретной линии в модернизации математического образования // Инновации в образовании. 2014. № 10. С. 140–150.
27. *Перминов Е. А.* О профильном обучении школьников решению исследовательских задач на группы симметрий графов и решеток : мат-лы III Международной научно-практической конференции «Задачи в обучении математике, физике и информатике в условиях цифровой трансформации», посвященной 130-летию П. А. Ларичева. Вологда : ВоГУ, 2022. С. 135–139.
28. *Перминов Е. А.* О роли дискретной математики в изучении понятий хаоса, порядка и фрактала в вузах : мат-лы XVI Колмогоровских чтений: III международной научно-методической конференции «Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А. Н. Колмогорова». Кострома : КГУ, 2021. С. 37–42.
29. *Пройдаков Э. М.* Древо компьютерных наук // Науковедческие исследования : сб. научных трудов РАН. ИНИОН. Центр научн.-информ. исслед. по науке, образованию и технологиям. М., 2012. 254 с.
30. *Садовничий В. А.* Большие данные в современном мире. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017. 28 с.
31. *Серебрякова Н. Г.* Анализ цикла дисциплин «Компьютерные науки» в инженерном образовании // Вышэйшая школа. 2020. № 4. С. 42–43.
32. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. М. : Мир, 1979. 260 с.
33. *Черный Ю. Ю.* Полисемия в науке: когда она вредна? (на примере информатики) // Открытое образование. 2010. № 6. С. 97–107.

On the development of methodological recommendations for teachers of mathematics and computer science on specialized teaching of discrete mathematics to students

E. A. Perminov
Doctor of Pedagogical Sciences, associate professor, professor of the Department of Mathematical and Natural Sciences, Russian State Vocational Pedagogical University.
Russia, Yekaterinburg. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

Abstract. The article substantiates the relevance of the problem of developing methodological recommendations for teachers of mathematics and computer science for specialized teaching of discrete mathematics at school. To this end, the role of discrete mathematics in the field of computer science is analyzed. The fundamentals of discrete mathematics and their elements in the educational and popular literature on mathematics and computer science for schools are characterized.

The features of the methodology for reflecting the foundations of discrete mathematics in the development of methodological recommendations are described, which is the fundamental importance of the problem approach. At the same time, the most important types of tasks are listed. Special attention is paid to the methodology of the problem approach in the study of the language of algebraic and logical structures dominating in discrete mathematics.

Keywords: school, teaching mathematics and computer science, the role of discrete mathematics, the basics of discrete mathematics, the methodology of specialized education.

References

1. *Algebra i nachala analiza. 10 kl. : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdenij : v 2 ch. Ch. 1.* – Algebra and the beginning of analysis. 10 grade : textbook for general education institutions : in 2 pts. Pt. 1. / G. V. Dorofeev, L. V. Kuzentsova, E. A. Sedova. M. Drofa (Bustard). 2003. 320 p.
2. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 kl. : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdenij: bazovyj i profil. urovni* – Algebra and the beginning of mathematical analysis. 11 grade : textbook for general education institutions: basic and profile levels / Y. M. Kolyagin, M. V. Tkacheva, N. E. Fedorova, M. I. Shabunin; ed. by A. B. Zhizhchenko. Publ. 2nd. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 2010. 336 p.
3. *Algebra i matematicheskij analiz. 11 kl. : ucheb. posobie dlya cl. s uglubl. izuch. matematiki* – Algebra and mathematical analysis. 11 grade : trxtbook for schools and classes with an advanced course of mathematics / N. Ya. Vilenkin, O. S. Ivashev-Musatov, S. I. Schwarzburd. Publ. 7th. M. Mnemosyne. 2000. 288 p.
4. *Antopol'skij A. B. O predstavlenii informacionno-komp'yuternyh nauk v razlichnyh klassifikacionnyh sistemah : doklad na seminare IPI RAN i INION RAN "Metodologicheskie problemy nauk ob informacii", 26 maya 2016 g., Moskva* [On the representation of information and computer sciences in various classification systems : a report at the seminar of IPI RAS and INION RAS "Methodological problems of information sciences", May 26, 2016, Moscow]. Available at: inion.ru "site/assets...antopolsky_a...presentation.ppt (date accessed: 17.11.2021).
5. *Arnol'd V. I. Teoriya katastrof. Izd. 3-e, dop.* [Theory of catastrophes. 3rd edition, supplement] / V. I. Arnold. M. Nauka (Science). Gl. ed. phys.-mat. lit, 1990. 128 p.
6. *Barmin A. V. K probleme klassifikacii nauki. Istoriya nauki i tekhniki v sisteme sovremennyh znanij : mat-ly nauchnoj konferencii, posvyashchennoj 10-letiyu kafedry istorii nauki i tekhniki UGTU–UPI, Ekaterinburg, 14 dekabrya 2009 g.* [On the problem of classification of science. History of Science and Technology in the system of modern

knowledge : proceedings of the scientific conference dedicated to the 10th anniversary of the Department of History of Science and Technology of USTU-UPI, Yekaterinburg, December 14, 2009]. Pp. 41–46.

7. *Beran L. Uporyadochennye mnozhestva i reshetki: per. s cheshskogo* [Ordered sets and Lattices: transl. from Czech]. M. Nauka (Science). 1981. 64 p.

8. *Birkhoff G. Teoriya reshetok: per. s angl.* [Theory of lattices: transl. from English]. M. Nauka (Science). Chief editor of phys.-mat. literature. 1984. 568 p.

9. *Vechtomov E. M. Praktikum po teorii uporyadochennyh mnozhestv i reshetok* [Practicum on the theory of ordered sets and lattices] / Advanced science. 2018. No. 3. Pp. 4–17.

10. *Glass R. Fakty i zabluzhdeniya professional'nogo programmirovaniya: per. s anglijskogo*[Facts and Misconceptions of professional programming: transl. from English]. SPb. Symbol-Plus. 2007. 240 p.

11. *Glushkov V. M. Kibernetika. Voprosy teorii i praktiki* [Cybernetics. Questions of theory and practice]. M. Nauka (Science). 1986. 888 p.

12. *Gorbatov V. A. Fundamental'nye osnovy diskretnoj matematiki. Informacionnaya matematika* [Fundamental foundations of discrete mathematics. Information mathematics]. M. Nauka (Science). Fizmatlit. 2000. 544 p.

13. *Ershov A. P. Izbrannye trudy* [Selected works]. Novosibirsk. Nauka: Siberian Publishing house firm. 1994. 413 p.

14. *Igoshin V. I. "Diskretnaya matematika – osnova kompetencij cifrovoj ery" : mat-ly XXXIX Mezhdun. nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* ["Discrete mathematics – the basis of competencies of the digital era" : materials of the XXXIX International Scientific Seminar of teachers of mathematics and computer science of universities and pedagogical universities]. M. MSPU. 2020. 396 p.

15. *Informatika. 10 kl. : uchebnik* – Computer science. 10 grade : textbook / L. L. Bosova, A. Y. Bosova. M. BINOM, Laboratory of Knowledge. 2016. 288 p.

16. *Informatika. 11 kl. Bazovyj uroven' : uchebnik* – Computer science. 11 grade. Basic level : textbook / L. L. Bosova, A. Y. Bosova. M. BINOM, Laboratory of Knowledge. 2016. 256 p.

17. *Kapitonova Yu. V. Lekcii po diskretnoj matematike* [Lectures on discrete mathematics] / Yu. V. Kapitonova, S. L. Krivoy, A. A. Letichevsky, G. M. Lutsky. SPb. BHV-Petersburg. 2004. 624 p.

18. *Kolmogorov A. N. Nauchnye osnovy shkol'nogo kursa matematiki. Pervaya lekciya* [Scientific foundations of the school course of mathematics. The first lecture] // Math at school. 1969. No. 3. Pp. 12–18.

19. *"Matematika i komp'yuternye nauki v obrazovanii" : VI konferenciya-seminar dlya uchitelej matematiki i informatiki, posvyashchennaya pamyati N. N. Krasovskogo* – "Mathematics and computer science in education" : VI conference-seminar for teachers of mathematics and computer science, dedicated to the memory of N. N. Krasovsky. Yekaterinburg. 2021. Available at: mathschool.imm.uran.ru (date accessed: 19.10.2021).

20. *Krasovskij N. N. Matematicheskoe modelirovanie v shkole* [Mathematical modeling at school]. Yekaterinburg. USU News. 1995. No. 4. Pp. 12–24.

21. *"Prepodavanie matematiki i komp'yuternyh nauk v vysshej shkole" : mat-ly Mezhdun. nauchno-metodich. konf.* – "Teaching mathematics and computer science in higher school" : materials of the International Scientific and Methodological Conference. Perm. Perm State National Research University Publishing House. 2017. 104 p.

22. *Odinec V. P. Poyavlenie nazvaniya "Komp'yuternye nauki" – velenie vremeni* [The appearance of the name "Computer Science" – the dictates of time] / Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2016. Is. 1 (21). Pp. 58–68.

23. *Perminov E. A. Diskretnaya matematika : uchebnoe posobie dlya 8–9-h klassov srednej obshcheobrazovatel'noj shkoly* [Discrete mathematics : textbook for grades 8–9 of secondary school]. Yekaterinburg. IRRO. 2004. 206 p.

24. *Perminov E. A. Metodicheskaya sistema obucheniya diskretnoj matematike studentov pedagogicheskih napravlenij : uchebnoe posobie* [Methodical system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical directions : textbook]. Yekaterinburg. Publishing House of the Russian State Prof.-Ped. University. 2015. 256 p.

25. *Perminov E. A. Metodicheskaya sistema obucheniya diskretnoj matematike studentov pedagogicheskih napravlenij v aspekte integracii obrazovaniya : monografiya* [Methodical system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical directions in the aspect of integration of education : monograph]. Yekaterinburg. Russian State Pedagogical University. 2013. 286 p.

26. *Perminov E. A. O psihologicheskih aspektah realizacii diskretnoj linii v modernizacii matematicheskogo obrazovaniya* [On the psychological aspects of the implementation of the discrete line in the modernization of mathematical education] // *Innovacii v obrazovanii* – Innovations in education. 2014. No. 10. Pp. 140–150.

27. *Perminov E. A. O profil'nom obuchenii shkol'nikov resheniyu issledovatel'skih zadach na gruppy simmetrij grafov i reshetok : mat-ly III Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Zadachi v obuchenii matematike, fizike i informatike v usloviyah cifrovoj transformacii", posvyashchennoj 130-letiyu P. A. Laricheva* [On specialized teaching of schoolchildren to solve research problems on groups of graph and lattice symmetries : materials of the III International Scientific and Practical Conference "Problems in teaching mathematics, physics and computer science in the conditions of digital transformation", dedicated to the 130th anniversary of P. A. Larichev]. Vologda. VSU. 2022. Pp. 135–139.

28. *Perminov E. A. O roli diskretnoj matematiki v izuchenii ponyatij haosa, poryadka i fraktala v vuzah : mat-ly XVI Kolmogorovskih chtenij: III mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoj konferencii "Obuchenie fraktal'noj geometrii i informatike v vuze i shkole v svete idej akademika A. N. Kolmogorova"* [On the role of discrete mathematics in the study of the concepts of chaos, order and fractal in universities : materials of the XVI Kolmogorov readings: III International scientific and methodological Conference "Teaching fractal geometry and computer science in higher education and school in the light of the ideas of Academician A. N. Kolmogorov"]. Kostroma. KSU. 2021. Pp. 37–42.

29. *Projdakov E. M. Drevo komp'yuternyh nauk* [Tree of Computer Science] // *Naukovedcheskie issledovaniya : sb. nauchnyh trudov RAN. INION. Centr nauchn.-inform. issled. po nauke, obrazovaniyu i tekhnologiyam* – Scientific research :

collection of scientific works of the Russian Academy of Sciences. INION. The Center of scientific-inform. research on science, education and technology. M. 2012. 254 p.

30. *Sadovnichij V. A. Bol'shie dannye v sovremennom mire* [Big data in the modern world]. M. Moscow State University n. a. M. V. Lomonosov. 2017. 28 p.

31. *Serebryakova N. G. Analiz cikla disciplin "Komp'yuternye nauki" v inzhenernom obrazovanii* [Analysis of the cycle of disciplines "Computer science" in engineering education] // *Vyshejshaya shkola* – Higher school. 2020. No. 4. Pp. 42–43.

32. *Fried E. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru* [Elementary introduction to abstract algebra]. M. Mir. 1979. 260 p.

33. *Chernyj Yu. Yu. Polisemiya v nauke: kogda ona vredna? (na primere informatiki)* [Polysemy in science: when is it harmful? (on the example of computer science)] // *Otkrytoe obrazovanie* – Open education. 2010. No. 6. Pp. 97–107.