

Решение задач как основное средство развития математического мышления

В. А. Тестов

доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики,
Вологодский государственный университет.
Россия, г. Вологда. ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация. В современную эпоху возросла роль математики в науке и образовании. В образовании роль математики состоит, прежде всего, в развитии мышления учащихся. В статье показывается, что основным средством развития математического мышления во все времена является решение задач. Цифровые технологии никогда не смогут заменить деятельность по решению задач. При изучении математики приоритет следует отдавать не запоминанию каких-то формул и фактов, а формированию схем (средств, общих приемов, методов) математического мышления, математической деятельности. В статье выделены виды таких схем (когнитивных структур). Для каждого вида таких схем математического мышления наиболее эффективным способом развития в младшем и в подростковом возрасте является решение системы некоторых специальных подобранных задач, в первую очередь, нестандартных (поисковых). Эти же задачи являются эффективным средством диагностики уровня сформированности схем математического мышления и математических способностей.

В статье показывается, что в обучении важным является использование исследовательских задач, порождающих проблемные ситуации. Рассматривается также роль обратных и некорректных задач, имеющих ярко выраженную практическую направленность.

Ключевые слова: цифровая трансформация, схемы математического мышления, нестандартные задачи, некорректные задачи.

В современных условиях в обучении на первый план выдвигается развитие личности. Огромную роль в достижении этой цели и, прежде всего, развитии интеллектуальных способностей личности во все времена играет математика. Изучение математики существенно обогащает мышление, формирует такие когнитивные качества, которые присущи не только для математической деятельности, но и являются необходимыми человеку для работы и жизни в современном обществе.

В цифровую эпоху роль математики в образовании и науке еще более возросла и стала многоплановой. При изучении математики и формировании умений ее применять для решения практических проблем учащийся овладевает различными творческими методами, в частности методом математического моделирования, который является приоритетным для компетенций цифровой эпохи. Математическое моделирование лежит в основе формирования трансдисциплинарных систем знаний, таких как синергетика, искусственный интеллект, большие данные и др., которые отличает принципиальное игнорирование междисциплинарных границ. Математика стала лидером трансдисциплинарного тренда в образовании, выводящим его на новый, более высокий уровень познания, синтезатором идей и методов огромного научного потенциала самых разных дисциплин [9].

В последние десятилетия происходит интенсивный процесс цифровой трансформации всей системы образования. Благодаря цифровым технологиям удалось в значительной степени предотвратить в условиях пандемии коллапс системы образования. Однако результаты исследований института возрастной физиологии РАО показывают, что в результате перехода на цифровой формат обучения у многих из обучающихся обострился целый ряд проблем, в частности проблема с пониманием изучаемого материала. Хотя цифровые технологии способствуют решению целого ряда методических задач, они не являются панацеей. Это всего лишь средство обучения, а как и любое средство обучения, оно носит вспомогательный характер, это помощник учителя, и его применение должно определяться содержанием изучаемого материала. Особенно эффективно применение компьютеров при изучении такого материала, который допускает наглядную интерпретацию на экране.

Однако при изучении теоретического материала и особенно при изучении доказательств теорем применение цифровых технологий мало помогает. Как показывает опыт, в этом случае большую помощь учителю в достижении понимания изучаемого материала оказывает умение предварять доказательство решением специально подобранных задач. Таким образом, цифровые технологии никогда не смогут заменить в образовании деятельность по решению задач.

Ведущая роль задач всегда являлась особенностью математики как учебного предмета. На всех этапах учебной деятельности по математике система задач является основным средством усвоения теории, формирования творческого опыта, критического мышления, овладения структурой и содержанием поисковой деятельности.

Роль использования задач в обучении математики варьировалась в зависимости от конкретно-исторических условий. Можно выделить три основных подхода к использованию задач в обучении математике. При первом подходе изучение математики происходит, прежде всего, с целью обучения решению задач. Особенности этого подхода хорошо прослеживаются в таком учебнике, как «Арифметика» Л. Ф. Магницкого. При втором подходе обучение математике сопровождается решением задач. Этот подход наиболее распространен в методике обучения, большинство авторов современных учебников следует особенностям именно этого подхода. Наконец возможен третий подход, при котором обучение математике происходит через решение задач. Характерные особенности этого подхода хорошо проявляются при чтении известной книги Г. Пойя и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа». Задачи при таком подходе одновременно должны служить как мотивом для дальнейшего развития теории, так и возможностью для ее применения. Выбор каждого из этих трех подходов определяется, прежде всего, целями обучения и готовностью преподавателя и учащихся к использованию того или иного подхода [3].

Решение задач имеет первостепенное значение для развития различных видов математического мышления. Как замечено многими педагогами, наиболее эффективным способом такого развития является решение школьниками системы некоторых, специальным образом подобранных задач, в первую очередь, нестандартных (поисковых). Решение таких задач позволяет оказывать эффективное влияние на обе компоненты человеческого мышления (и на образную, интуитивную компоненту, и на логическую), что приводит к совершенствованию самых разных мыслительных операций.

Согласно деятельностному подходу достижение необходимого развивающего эффекта обучения предполагает усвоение учащимися содержания обучения в процессе собственной активной деятельности, направленной на приобретение теоретических знаний о предмете обучения и общих приемов решения, связанных с этими знаниями задач. Таким образом, из деятельностного подхода вытекает, что для развития математического мышления приоритет следует отдавать не передаче готовых знаний, а формированию общих приемов, средств, методов математического мышления, математической деятельности.

Для обеспечения математического развития у школьников должны быть сформированы не только алгебраические, порядковые и топологические когнитивные структуры, которые представляют собой системы хранения знаний, но и когнитивные структуры, представляющие собой определенные качества математического мышления, являющиеся, прежде всего, средствами, методами познания, а значит, и средствами, методами получения математических знаний учеником. Такого сорта когнитивные структуры швейцарский психолог Жан Пиаже называл операциями второго порядка, к которым он относил комбинаторные и логические операции.

Такие структуры играют особую роль для исследовательской активности в области математики, а значит, и для развивающего обучения. Для таких когнитивных структур лучше подходит термин «схемы математического мышления». Такими видами схем (когнитивных структур) являются логические, алгоритмические (процедурные), комбинаторные, образно-геометрические структуры [6].

Все эти схемы мышления не зависят от конкретного используемого математического материала и имеют большое значение для математического творчества. В частности, комбинаторные и геометрические методы получили широкое распространение в современной математике. Многие математики мыслят не формулами, а образами.

Как показали исследования, кратковременное обучение логическим или комбинаторным понятиям не дает заметного эффекта. Такой эффект можно достичь, если формировать схемы математического мышления и соответствующие понятия поэтапно в течение продолжительного времени в соответствии с возрастными особенностями учащихся, органически вплетая эти понятия в курс математики.

Как уже отмечалось, наилучшим способом развития математического мышления является решение школьниками системы некоторых нестандартных задач. Такие задачи требуют не столько знания каких-то отдельных математических фактов и частных методов, сколько универсальных приемов математического мышления. Поэтому при решении именно таких задач происходит не только развитие математического мышления, но проявляется и его сформированность, что позволяет использовать такие задачи также и для диагностики уровня математического мышления.

Такие задачи можно использовать и при диагностике уровня развития математических способностей на устных экзаменах или беседах преподавателя с учащимися. Как указывал Л. С. Выготский, следует считать «показателем уровня детского мышления не то, что ребенок знает, не то, что он способен усвоить, а то, как он мыслит в той области, где он никакого знания не имеет» [С. с., т. 2, 1956, с. 227].

В оценке способностей с помощью таких задач следует опираться на идею Л. С. Выготского о зоне ближайшего развития ребенка как ключевом диагностическом принципе его развития. Для этого преподаватель должен наблюдать за ходом решения задач, которые должны быть достаточно трудными и неизвестными для учащегося. Самостоятельно большинство учащихся справиться с такими задачами не могут. Однако с помощью преподавателя, его наводящих вопросов, его подсказок, т. е. «дозированной помощи», справиться с задачами вполне возможно. В возникающем при этой деятельности переходе из зоны ближайшего развития в зону актуального развития ярко высвечиваются математические способности учащегося. Задача преподавателя в этом случае состоит в том, чтобы фиксировать, сколько подсказок потребовалось учащемуся, начиная с какого этапа у него созрел план решения задачи, насколько безошибочным и настойчивым он был в достижении цели.

К нестандартным развивающим задачам обычно относят задачи на переливание и взвешивание, логические [1], комбинаторные, геометрические, арифметические и т. д. Так, Мартин Гарднер все задачи разделяет на шесть типов: комбинаторные, логические, процедурные (алгоритмические), геометрические, арифметические и словесные (лингвистические) [2]. При этом эти типы задач неизбежно перекрываются. Задачи последних двух типов могут быть отнесены к комбинаторным и логическим задачам. Тем самым, основные типы нестандартных задач полностью соответствуют выделенным выше видам схем математического мышления.

Экспериментально было установлено, что развитие выделенных выше различных видов математического мышления школьников лучше всего достигается не через изучение тех или иных разделов математики, а через решение соответствующих задач с привлечением минимального дополнительного материала (круги Эйлера, графы, выборки, принцип Дирихле и т. п.). Хорошим примером задачи на развитие алгоритмического мышления является старинная русская задача про переправу через реку волка, козы и капусты. Для развития наглядно-образного мышления большое внимание следует уделять наблюдению, проведению опытов (в том числе с применением компьютеров), решению задач на разрезание и конструирование фигур, на различные наглядные построения и т. д. [7; 8].

Неслучайно в последние десятилетия больше внимания стало уделяться текстовым арифметическим задачам, при решении которых используются выделенные схемы математического мышления. Потребовалось более двух десятков лет почти безраздельного господства в школе алгебры, чтобы учителя и преподаватели вузов осознали: без арифметического фундамента обучение математике оказывается неэффективным.

Система занятий по решению развивающих задач может стать эффективным средством совершенствования всей постановки математического образования современных школьников. Такая система занятий служит достижению основной цели – развитию мышления учащихся. Поэтому решение развивающих задач в какой-то форме должно присутствовать в учебных программах по крайней мере до достижения учащимися возраста 15 лет.

Особое внимание на развивающие (поисковые, проблемные, нестандартные и т. п.) задачи обращали многие ученые. В современных учебных пособиях такие задачи тоже встречаются. В частности, В. А. Смирнов и И. М. Смирнова в свою книгу [5] включили проблемные задачи, направленные на развитие критического мышления учащихся. В этих задачах требуется распознать конфигурацию геометрических фигур по их изображениям и описаниям; сравнить и оценить геометрические величины; установить верность или неверность утверждений; найти ошибки в формулировках и доказательствах; привести контрпримеры; решить задачи с неоднозначным ответом.

Важным является использование в обучении исследовательских задач, порождающих проблемные ситуации, для разрешения которых обучающимся требуется экспериментирование с динамическими моделями математических объектов. В ходе исследовательской деятельности учащиеся не только находят способы решения тех или иных задач, но и побуждаются к самостоятельной их постановке, к уточнению цели своей работы.

В последнее время усилилось внимание к решению практико-ориентированных задач. В математике возникло целое новое направление – теория обратных и некорректных задач. Некорректной, согласно Адамару, называется задача, для которой нарушается хотя бы одно из трех условий: существование решения, единственность решения, устойчивость решения.

В школьных программах и учебниках стало больше внимания уделяться обратным задачам и задачам с недостающими (недоопределенными) или избыточными (переопределенными) данными. Такие задачи относятся к некорректным, их раньше всячески избегали в школьной, да и в вузовской математике. Эти задачи имеют ярко выраженную практическую направленность, поскольку

ку в практической деятельности часто возникает необходимость принятия решений в условиях избытка, недостатка данных или их противоречивости. Каждая инженерная задача представляет собой пример некорректной задачи ввиду того, что условий дано в избытке, а среди данных могут присутствовать и противоречивые [4].

Примеры обратных задач можно найти в медицине, прежде всего в компьютерной томографии. В последнее время интенсивно развиваются методы исследования обратных задач в экономике. Не единственность решения таких задач не противоречит действительности, а характеризует с различных сторон многообразную картину описываемых явлений.

Таким образом, решение математических задач является основой формирования наиболее плодотворного способа теоретического мышления, креативного потенциала личности, нелинейного мышления, которые являются важнейшими составляющими компетенций специалиста в цифровую эпоху.

Пронизывая все основные компоненты методической системы обучения математике (цели, содержание, методы и средства обучения), задачи придают этой системе интегративные качества, которые обеспечивают целостность и преемственность учебного процесса. Эффективность обучения математике, в конечном счете, определяется тем, какие именно задачи и в какой последовательности предлагались учащимся, какими способами они решались. А также тем, как велика была доля активности, самостоятельности ученика в процессе их решения. Прослеживаются факторы взаимозависимости сложности математических задач и самоорганизации обучающегося, использования синергетических эффектов в математическом образовании.

Таким образом, при разработке стандартов, школьных и вузовских образовательных программ совершенно необходимо учитывать роль математики и решения задач в образовании. Особенно велика эта роль в подготовке учителей математики и информатики. К сожалению, за последнее время в вузовских образовательных программах большая доля учебного времени отводится изучению новых мелких дисциплин, а фундаментальные дисциплины (математика, физика и др.) оказались урезанными. Необходимо вернуть этим дисциплинам и особенно решению математических задач подобающее им место в вузовских образовательных программах в соответствии с их ролью в обучении.

Список литературы

1. Вечтомов Е. М., Сулопарова (Петухова) Я. В. Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. 2012. № 8 (август). С. 11–15. ART 12109. 1,2 п. л. URL: <http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm>.
2. Гарднер М. Есть идея! М. : Мир, 1982.
3. Клековкин Г. А., Максютин А. А. Задачный подход в обучении математике. М.; Самара : МГПУ, 2009.
4. Селютин В. Д., Яремко Н. Н. Обучение бакалавров математике на основе понятия «корректность». Орел : Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, 2019.
5. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрические задачи на развитие критического мышления. Москва : МЦНМО, 2021.
6. Тестов В. А. Стратегия обучения математике : монография. М. : Технологическая школа бизнеса, 1999.
7. Тестов В. А. Математическая одаренность и ее развитие // Перспективы науки и образования : международный электронный научно-практический журнал. 2014. № 6. С. 60–67. URL: <http://pnojournal.wordpress.com>.
8. Тестов В. А. Использование потенциала математических задач для развития мышления учащихся // Развивающий потенциал математического образования: школа – вуз : коллективная монография / Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «ПГНИУ». Соликамск : СГПИ, 2015. С. 28–39.
9. Тестов В. А., Перминов Е. А. Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. 2021. Т. 23. № 3. С. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.

Problem solving as the main means of developing mathematical thinking

V. A. Testov

Doctor of Pedagogical Sciences, professor, professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Vologda State University. Russia, Vologda. ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Abstract. In the modern era, the role of mathematics in science and education has increased. In education, the role of mathematics is, first of all, in the development of students' thinking. The article shows that the main means of developing mathematical thinking at all times is the solution of problems. Digital technologies will never be able to replace problem-solving activities. When studying mathematics, priority should be given not to memorizing some formulas and facts, but to the formation of schemes (means, general techniques, methods) of mathematical thinking, mathematical activity. The article highlights the types of such schemes (cognitive structures). For each type of such

mathematical thinking schemes, the most effective way to develop in the younger and in adolescence is to solve a system of some specially selected tasks, primarily non-standard (search) ones. The same tasks are an effective means of diagnosing the level of formation of mathematical thinking schemes and mathematical abilities.

The article shows that the use of research tasks that generate problematic situations is important in teaching. The role of inverse and incorrect problems with a pronounced practical orientation is also considered.

Keywords: digital transformation, mathematical thinking schemes, non-standard tasks, incorrect tasks.

References

1. *Vechtomov E. M., Susloparova (Petuhova) Ya. V. Reshenie logicheskikh zadach kak osnova razvitiya myshleniya* [Solving logical problems as a basis for the development of thinking] // *Koncept – Concept*. 2012. No. 8 (August). Pp. 11–15. ART 12109. 1,2 Pp. Available at: <http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm>.
2. *Gardner M. Est' ideya!* [I have an idea!] M. Mir (World). 1982.
3. *Klekovkin G. A., Maksyutin A. A. Zadachnyj podhod v obuchenii matematike* [Problem approach in teaching mathematics]. M.; Samara. Moscow State Pedagogical University. 2009.
4. *Selyutin V. D., Yaremko N. N. Obuchenie bakalavrov matematike na osnove ponyatiya "korrektnost"* [Teaching bachelors mathematics based on the concept of "correctness"]. Orel. Orel State University n. a. I. S. Turgenev. 2019.
5. *Smirnov V. A., Smirnova I. M. Geometricheskie zadachi na razvitie kriticheskogo myshleniya* [Geometric problems for the development of critical thinking]. M. ICNMO. 2021.
6. *Testov V. A. Strategiya obucheniya matematike : monografiya* [Strategy of teaching mathematics : monograph]. M. Technological Business School. 1999.
7. *Testov V. A. Matematicheskaya odarennost' i ee razvitie* [Mathematical giftedness and its development] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya : mezhdunarodnyj elektronnyj nauchno-prakticheskij zhurnal* – Prospects of science and education : international electronic scientific and practical journal. 2014. No. 6. Pp. 60–67. Available at: <http://pno-journal.wordpress.com>.
8. *Testov V. A. Ispol'zovanie potenciala matematicheskikh zadach dlya razvitiya myshleniya uchashchihsya* [Using the potential of mathematical problems for the development of students' thinking] // *Razvivayushchij potencial matematicheskogo obrazovaniya: shkola – vuz : kollektivnaya monografiya* – Developing the potential of mathematical education: school – university : collective monograph / Solikamsk State Pedagogical Institute (branch) FSBEI VPO "PGNIU". Solikamsk. SSPI. 2015. Pp. 28–39.
9. *Testov V. A., Perminov E. A. Rol' matematiki v transdisciplinarnosti sodержaniya sovremennogo obrazovaniya* [The role of mathematics in the transdisciplinarity of the content of modern education] // *Obrazovanie i nauka* – Education and Science. 2021. Vol. 23. No. 3. Pp. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.