№1 (24) 2022

ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN
of Vyatka State University

Вятский государственный университет

Математический вестник Вятского государственного университета

Н а у ч н ы й   ж у р н а л

№ 1 (24)

Киров
2022

УДК 51(051)
М34

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)
Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Редактор **А. В. Мариева**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 517.53 DOI 10.25730/VSU.0536.22.001

Некоторые ограниченные интегральные операторы в областях с углами

В. В. Борцов[1], А. С. Нестеров[2], Н. М. Махина[3], В. А. Беднаж[4]

[1]магистрант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии,
Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского. Россия, г. Брянск. E-mail: fmf.brgu@mail.ru

[2]магистрант, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского. Россия, г. Брянск. E-mail: pianist666665@yandex.ru

[3]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского.
Россия, г. Брянск. ORCID: 0000-0003-2270-1775. E-mail: mahinanm@yandex.ru

[4]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. ак. И. Г. Петровского.
Россия, г. Брянск. ORCID: 0000-0001-7829-6030. E-mail: vera.bednazh@mail.ru

Аннотация. В статье изучается возможность построения ограниченного оператора, отображающего пространство аналитических функций с углами на соответствующее пространство Лебега измеримых функций. Рассматриваются пространства, состоящие из конечного числа гладких дуг, образующих в точках стыка положительные углы заданного раствора. Исследуемый ограниченный оператор можно считать аналогом оператора Бергмана в указанных пространствах аналитических функций. Построение данного оператора выполнено на основе нового воспроизводящего ядра. Данное ядро содержит мнимую часть некоторой показательной функции с аргументом из рассматриваемой области. Доказательство утверждения основано на интегральном представлении аналитических функций в областях с угловыми точками и свойствами конформно-отображающих функций в таких областях. Работа может быть интересна специалистам в области комплексного и функционального анализа.

Ключевые слова: аналитическая функция, ограниченный оператор, область с углами.

Классическая теорема М. Рисса утверждает, что сингулярный интеграл с ядром Коши функции из $L^p(1 < p < +\infty)$ пространства на действительной оси, является функцией класса Харди H^p в верхней полуплоскости.

Напомним, что пространство Харди (см. [17]) H^p, $0 < p \le \infty$, определяется как множество функций аналитических в единичном круге, $f \in H(S)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} \stackrel{def}{=} \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty,$$

где для $0 < r < 1$

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p} (0 < p < \infty); M_\infty(r,f) = \sup_{\theta \in R} \left| f(re^{i\theta}) \right|.$$

Пусть $L^p(G)(1 \le p < \infty)$ – пространство Лебега в G (G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости *C*), то есть множество функций, измеримых в области G и удовлетворяющих условию:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_G |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Подпространство пространства $L^p(G)$, состоящее из функций, аналитических в области G, обозначим через $A^p(G)$.

Хорошо известно (данные результаты во многом определяются вышеуказанной теоремой М. Рисса), что в случае, когда G – область с гладкой границей, ограниченная и односвязная, то также существует ограниченный проектор, отображающий пространство $L^p(G)$ в $A^p(G)$.

Решением задачи о построении таких линейных ограниченных операторов, которые отображают пространства измеримых функций на порождаемые пространства аналитических функций, и приложениями данных вопросов занимались многие авторы в своих исследованиях. Отметим среди них, например, работы [1]–[3], [5]–[9], [12]–[16], [18]–[20].

Так, например, в работе [13] устанавливается, что для области G, граница которой является аналитической кривой во всех точках, кроме нуля, и образует угол раствора $\frac{\pi}{\alpha}$ в нуле (прямолинейный), оператор Бергмана $P_0(f)(z)=\int\limits_G K(z,\zeta)f(\zeta)dm_2(\zeta)$ отображает пространство $L^p(G)$ на $A^p(G)$; ограничен при $\alpha\in[1,+\infty), p\in(1,+\infty)$, при $\frac{1}{2}\le\alpha<1, p\in\left(1,\frac{2}{\alpha+1}\right]\cup\left[\frac{2}{1-\alpha},+\infty\right)$; неограничен при остальных p и α.

В работах [4], [10], [11] также рассматриваются следующие классы функций и области с углами. Пусть $L^p_\beta(G)$ – класс измеримых по Лебегу в области G функций f таких, что

$$\int\limits_G |f(w)|^p d^\beta(w,\partial G)dm_2(w)<+\infty, 0<p<+\infty, \beta>-1,$$

где dm_2 – плоская мера Лебега; $A^p_\beta(G)$ – подпространство пространства $L^p_\beta(G)$, состоящее из аналитических функций.

Пусть (см. [11]) *(C)* – класс односвязных областей *G* на комплексной плоскости *C*, граница Γ каждой из которых состоит из конечного числа гладких дуг Γ_j, образующих между собой в точках стыка w_j положительные внутренние углы $\frac{\pi}{\alpha_j}, \frac{1}{2}\le\alpha_j<+\infty,\ j=1,2,\ldots,m,\ m=m(G)$. Доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть* $G\in(C)$; $\varphi(z):S\to G$; $\varphi(0)=w_0$, $\varphi'(0)>0$, $w_0\in G$, $\psi=\varphi^{-1}$. *Тогда интегральный оператор вида*

$$P_\eta(f)(w)=F(w)=\frac{\eta+1}{\pi}\int\limits_G\frac{(1-|\psi(\mu)|^2)^\eta}{(1-\overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\eta+2}}f(\mu)|\psi'(\mu)|^2dm_2(\mu)$$

непрерывно отображает $L^p_\beta(G)$ *на* $A^p_\beta(G)$, $1\le p<+\infty$, $\beta>-1$, $\eta>\max\{2(\beta+1);\lambda\}$, $\lambda=\max\limits_{1\le j\le m}(\frac{1}{\alpha_j}-1)(\beta+2)+\beta$, $\frac{1}{2}\le\alpha_j<+\infty$, $j=1,2,\ldots,m$, $m=m(G)$, *причем существует постоянная* $c(\beta,p)$:

$$\|F\|_{A^p_\beta(G)}\le c(\beta,p)\|f\|_{L^p_\beta(G)}.$$

В нашей работе рассмотрены области вида $\Omega=\left\{w\in C:|\arg w|<\frac{\pi\alpha}{2}\right\}$ – плоский угол раствора $\pi\alpha$ при всех $0<\alpha\le 2$.

Оказывается, указанный в теореме 1 оператор можно построить не только с аналогом ядра Бергмана, но и с ядрами других видов, одно из которых мы приведем в теореме 2:

Теорема 2. *Пусть* $\Omega=\left\{w\in C:\left|\arg w\right|<\frac{\pi\alpha}{2}\right\}$, $0<\alpha\le 2$, $\beta>\max\left\{2\alpha-2-\frac{\alpha}{2q},-\frac{\alpha}{2q}\right\}$, $1<p<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Тогда интегральный оператор $P(f)(w)=\int\limits_{\Omega}K(w,\mu)f(\mu)dm_2(\mu)$, *где*

$$K(w,\mu)=-\frac{\beta+1}{\pi}(2i)^{\beta}\frac{\left[\operatorname{Im}h(\mu)\right]^{\beta}}{\left[h(w)-\overline{h(\mu)}\right]^{\beta}}\left|h'(\mu)\right|^{2},h(w)=ie^{\frac{1}{\alpha}\ln w},$$

отображает $L^{p}(\Omega)$ *в* $A^{p}(\Omega)$ *и является ограниченным.*

Если при этом $f(w)\in A^{p}(\Omega)$, $\beta>2\left(\frac{a}{p}-1\right)$, $\beta\ge 0$, *то* $P(f)(w)\equiv f(w)$.

Доказательство данной теоремы следует из нескольких утверждений.

Лемма 1.

$$\int\limits_{\Pi_{+}}\frac{\chi^{q}(\zeta)\eta^{\beta}}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^{\beta+2}}dm_2(\zeta)\le c_0(\alpha,\beta)\chi^{q}(z),$$

где $\chi(z)=1/y^{\alpha/2pq}, z=x+iy, z\in\Pi_{+}$, $\zeta=\zeta+i\eta$, $1<p<+\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\alpha>0,\beta>\frac{\alpha}{2p}-1$, $c_0(\alpha,\beta)$ – некоторая положительная постоянная, зависящая только от α,β.

Доказательство.

$$\int\limits_{\Pi_{+}}\frac{\chi^{q}(\zeta)\eta^{\beta}}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^{\beta+2}}dm_2(\zeta)=\int\limits_{0}^{+\infty}\eta^{\beta-\frac{\alpha}{2p}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{\left|(x+iy)-(\xi-i\eta)\right|^{\beta+2}}\right)d\eta\le$$

$$\le\frac{2(\beta+2)}{\beta+1}\left(\int\limits_{0}^{y}\frac{\eta^{\beta-\frac{\alpha}{2p}}}{(y+\eta)^{\beta+1}}d\eta+\int\limits_{y}^{+\infty}\frac{\eta^{\beta-\frac{\alpha}{2p}}}{(y+\eta)^{\beta+1}}d\eta\right)\le$$

$$\le\frac{2(\beta+2)}{\beta+1}\left(\frac{1}{y^{\beta+1}}\int\limits_{0}^{y}\eta^{\beta-\frac{\alpha}{2p}}d\eta+\int\limits_{y}^{+\infty}\eta^{-1-\frac{\alpha}{2p}}d\eta\right)\le$$

$$\le\frac{2(\beta+2)}{\beta+1}\left(\frac{1}{\beta-\frac{\alpha}{2p}+1}+\frac{2p}{\alpha}\right)y^{-\frac{\alpha}{2p}}=c_0(\alpha,\beta)\chi^{q}(z).$$

Использовали оценку $\beta>\frac{\alpha}{2p}-1$ и следствие из теоремы Фубини.

Лемма 2.

$$\int\limits_{\Pi_{+}}\frac{\left|\gamma'(z)\right|^{2}\chi^{p}(z)}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^{\beta+2}}dm_2(z)\le c_1(\alpha,\beta)\frac{\left|\gamma'(\zeta)\right|^{2}\chi^{p}(\zeta)}{\eta^{\beta}},$$

где $\zeta=\xi+i\eta,\zeta\in\Pi_+,\ \chi(z)=1/y^{\frac{\alpha}{2pq}},\ \gamma(z)=\exp\left(-\frac{\pi\alpha i}{2}\right)\exp\left(\alpha\ln z\right),$

$$\beta>\max\{2\alpha-2-\frac{\alpha}{2q},-\frac{\alpha}{2q}\},0<\alpha\le 2.$$

Доказательство. Нетрудно показать, что в условиях леммы

$$\int_0^{+\infty} r^{2\alpha-1-\frac{\alpha}{2q}}dr\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(\sin\varphi)^{\frac{\alpha}{2q}}\left(\left(r-\rho\right)^2+4r\rho\sin^2\frac{\varphi+\theta}{2}\right)^{\frac{\beta+2}{2}}}\le\tilde{c}_1(\alpha,\beta)\frac{\rho^{2\alpha-\beta-2-\frac{\alpha}{2q}}}{(\sin\theta)^{\beta+2q}}.$$

Тогда $\int\limits_{\Pi_+}\frac{\left|\gamma'(z)\right|^2\chi^p(z)}{\left|z-\bar{\zeta}\right|^{\beta+2}}dm_2(z)=$

$$=\alpha^2\int_0^{+\infty} r^{2\alpha-1-\frac{\alpha}{2q}}dr\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(\sin\varphi)^{\frac{\alpha}{2q}}\left(\left(r-\rho\right)^2+4r\rho\sin^2\frac{\varphi+\theta}{2}\right)^{\frac{\beta+2}{2}}}\le$$

$$\tilde{c}_1(\alpha,\beta)\frac{\rho^{2\alpha-\beta-2-\frac{\alpha}{2q}}}{(\sin\theta)^{\beta+2q}}=c_1(\alpha,\beta)\frac{\left|\gamma'(\zeta)\right|^2\chi^p(\zeta)}{\eta^\beta}.$$

Доказательство теоремы 2:

Пусть $f(w)\in L^p(\Omega),1<p<+\infty.$

Покажем, что в условиях теоремы $K(f)\in A^p(\Omega).$

Достаточно показать, что при соблюдении условий теоремы

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left|K(f)(w)\right|^p dm_2(w)\right)^{\frac{1}{p}}\le c_2(\alpha,\beta)\left\|f(w)\right\|_{L^p(G_\alpha)}<+\infty.$$

Рассмотрим функцию $G(z)=f(\gamma(z)),$ где $\gamma(z)=\exp\left(-\frac{\pi\alpha i}{2}\right)\exp\left(\alpha\ln z\right).$

Данная функция выполняет однолистное отображение верхней полуплоскости Π_+ на область Ω.

Далее, $\int\limits_{\Omega}\left|K(f)(w)\right|^p dm_2(w)=\frac{\beta+1}{\pi}(2i)^\beta\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{\Omega}\frac{\left[\operatorname{Im}h(\mu)\right]^\beta}{\left[h(w)-\overline{h(\mu)}\right]^{\beta+2}}\left|h'(\mu)\right|^2 f(\mu)dm_2(\mu)\right|^p dm_2(w)\le$

$$\le\frac{\beta+1}{\pi}(2i)^\beta\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Pi_+}\frac{\eta^\beta}{\left[h(w)-\bar{\zeta}\right]^{\beta+2}}\left|G(\zeta)\right|dm_2(\zeta)\right)^p dm_2(w)=$$

$$=\frac{\beta+1}{\pi}(2i)^\beta\int\limits_{\Pi_+}\left|\gamma'(z)\right|^2\left(\int\limits_{\Pi_+}\frac{\eta^\beta}{\left[z-\bar{\zeta}\right]^{\beta+2}}\left|G(\zeta)\right|dm_2(\zeta)\right)^p dm_2(z).$$

Используя неравенство Гельдера, получаем:

$$\int_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2}} \left|G(\zeta)\right| dm_2(\zeta) \right)^p dm_2(z) \le$$

$$= \int_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right| \eta^{\frac{\beta}{p}}}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\frac{\beta+2}{p}} \chi(\zeta)} \frac{\eta^{\frac{\beta}{q}} \chi(\zeta)}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\frac{\beta+2}{q}}} dm_2(\zeta) \right)^p dm_2(z) \le$$

$$\le \int_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right|^p \eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2} \chi^p(\zeta)} dm_2(\zeta) \left(\int_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta \chi^q(\zeta)}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2}} dm_2(\zeta) \right)^{p/q} \right) dm_2(z).$$

Так как $f(w) \in L^p(\Omega), 1 < p < +\infty$, то

$$\int_{\Pi_+} \left|K(f)(w)\right|^p dm_2(w) = \left(\left\|f\right\|^p_{L^p(G_\alpha)} \right)^{1/p} < +\infty.$$

Из леммы 2 $\displaystyle\int_{\Pi_+} \frac{\left|\gamma'(z)\right|^2 \chi^p(z)}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^{\beta+2}} dm_2(z) \le c_1(\alpha,\beta) \frac{\left|\gamma'(\zeta)\right|^2 \chi^p(\zeta)}{\eta^\beta}.$

Тогда

$$\int_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \chi^p(z) \left(\int_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right|^p \eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2} \chi^p(\zeta)} dm_2(\zeta) \right) dm_2(z) \le c(\alpha,\beta) \left(\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \right)^p < +\infty.$$

Далее, так как $\beta > \max\left\{ 2\alpha - 2 - \dfrac{\alpha}{2q}, -\dfrac{\alpha}{2q} \right\}, 0 < \alpha \le 2,$

то согласно лемме 1 $\displaystyle\int_{\Pi_+} \frac{\chi^q(\zeta)\eta^\beta}{\left|z-\overline{\zeta}\right|^{\beta+2}} dm_2(\zeta) \le c_0(\alpha,\beta)\chi^q(z),$ а значит,

$$\int_{\Pi_+} \left|\gamma'(z)\right|^2 \left(\int_{\Pi_+} \frac{\left|G(\zeta)\right|^p \eta^\beta}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2} \chi^p(\zeta)} dm_2(\zeta) \left(\int_{\Pi_+} \frac{\eta^\beta \chi^q(\zeta)}{\left[z-\overline{\zeta}\right]^{\beta+2}} dm_2(\zeta) \right)^{p/q} \right) dm_2(z) \le$$

$$\le c_1(\alpha,\beta) \left(\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \right)^p < +\infty.$$ Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Антоненкова О. Е.*, *Часова Н. А.* Об интегральных операторах в пространствах аналитических в верхнем полупространстве функций со смешанной нормой // Ученые записки Брянского государственного университета. 2017. № 3 (7). С. 7–14.

2. *Беднаж В. А.* О кратной интерполяции в классах Р. Неванлинны в единичном круге // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2008. № 1 (143). С. 3–4.

3. *Беднаж В. А.* Описание следов, характеризация главных частей в разложении Лорана классов мероморфных функций с ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны: специальность 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» : дисс. … канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2007. 116 с.

4. *Махина Н. М.* Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестник Омского университета. 2018. Т. 23:3. С. 47–51.

5. *Махина Н. М.* О сопряженных пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420–423.

6. *Махина Н. М.* Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 16–22.

7. *Махина Н. М., Шамоян Ф. А.* Базисы в весовых пространствах функций, аналитических в областях со спрямляемой границей // Вестник Брянского государственного университета. 2013. № 4. С. 27–30.

8. *Родикова Е. Г., Беднаж В. А.* Об интерполяции в классах И. И. Привалова в круге // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 1762–1775.

9. *Соловьев А. А.* Оценки в Lp интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций // Сибирский математический журнал. 1985. Т. 26:3. С. 168–191.

10. *Ткаченко Н. М.* Весовые Lp-оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости: специальность 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» : дисс. … канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2009. 116 с.

11. *Ткаченко Н. М.* Об оценках модуля производной аналитической в угловой области функции // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2008. № 1 (37). С. 96–98.

12. *Шамоян Ф. А., Беднаж В. А.* Об инвариантности класса N_{α}^{∞} относительно оператора дифференцирования // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. С. 106–111.

13. *Шихватов А. М.* О пространствах аналитических функций в области с угловой точкой // Математические заметки. 1975. Т. 18:3. С. 411–420.

14. *Antonenkova O. E., Shamoyan F. A.* The Cauchy transform of continuous linear functionals and projections on the weighted spaces of analytic functions // Siberian Mathematical Journal. 2005. V. 46:6. Pp. 969–994.

15. *Bednazh V. A., Rodikova E. G., Shamoyan F. A.* Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series for meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic // Complex analysis and operator theory. 2017. V. 11:1. Pp. 197–215.

16. *Burbea J.* The Bergman projection over plane regions // Ark. for mat. 1980. V.18:1. Pp. 207–221.

17. *Duren P. L.* Theory of Hp Spaces. New York/London : Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York : Dover. 292 p.

18. *Hedenmalm H.* The dual of Bergman Space on Simply connected domains // J. d' Analyse Mathematique. 2002. V. 88. Pp. 311–335.

19. *Shamoyan F. A., Bednazh V. A., Karbanovich O. V.* On classes of analytic functions in a disk with a characteristic R. Nevanlinny and α-characteristic of weighted Lp spaces // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 150–167.

20. *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On continuous linear functionals in SOME weighted functional classes on product domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 651–678.

Some bounded integral operators in domains with angles

V. V. Bortsov[1], A. S. Nesterov[2], N. M. Mahina[3], V. A. Bednazh[4]

[1]master student of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky. Russia, Bryansk. E-mail: fmf.brgu@mail.ru

[2]master student, associate professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky. Russia, Bryansk. E-mail: pianist666665@yandex.ru

[3]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematical Analysis,
Algebra and Geometry, Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky.
Russia, Bryansk. ORCID: 0000-0003-2270-1775. E-mail: mahinanm@yandex.ru

[4]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematical Analysis,
Algebra and Geometry, Bryansk State University n. a. I. G. Petrovsky.
Russia, Bryansk. ORCID: 0000-0001-7829-6030. E-mail: vera.bednazh@mail.ru

Abstract. The article studies the possibility of constructing a bounded operator mapping the space of analytic functions with angles to the corresponding Lebesgue space of measurable functions. Spaces consisting of a finite number of smooth arcs forming positive angles of a given solution at the junction points are considered. The studied bounded operator can be considered an analogue of the Bergman operator in the specified spaces of analytic functions. The construction of this operator is based on a new reproducing core. This kernel contains an imaginary part of some exponential function with an argument from the domain under consideration. The proof of the statement is based on an integral representation of analytic functions in domains with corner points and properties of conformal mapping functions in such domains. The work may be of interest to specialists in the field of complex and functional analysis.

Keywords: analytical function, bounded operator, area with angles.

References

1. *Antonenkova O. E., Chasova N. A. Ob integral'nyh operatorah v prostranstvah analiticheskih v verhnem poluprostranstve funkcij so smeshannoj normoj* [On integral operators in spaces of analytic functions with mixed norm in the upper half-space] // *Uchenye zapiski Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Scientific Notes of Bryansk State University. 2017. No. 3 (7). Pp. 7–14.

2. *Bednazh V. A. O kratnoj interpolyacii v klassah R. Nevanlinny v edinichnom kruge* [On multiple interpolation in R. Nevanlinna's classes in a single circle] // *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Seriya: Estestvennye nauki* – News of higher educational institutions. The North Caucasus region. Series: Natural Sciences. 2008. No. 1 (143). Pp. 3–4.

3. *Bednazh V. A. Opisanie sledov, harakterizaciya glavnyh chastej v razlozhenii Lorana klassov meromorfnyh funkcij s ogranicheniyami na rost harakteristiki R. Nevanlinny: special'nost' 01.01.01 "Veshchestvennyj, kompleksnyj i funkcional'nyj analiz" : diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Description of traces, characterization of the main parts in the Laurent decomposition of classes of meromorphic functions with restrictions on the growth of R. Nevanlinna's characteristics: specialty 01.01.01 "Real, complex and functional analysis" : diss. ... PhD in Physical and Mathematical Sciences]. Bryansk. 2007. 116 p.

4. *Mahina N. M. Nekotorye ocenki konformno otobrazhayushchej funkcii v oblastyah s kusochno-gladkoj i asimptoticheski konformnoj granicej* [Some estimates of a conformally mapping function in regions with piecewise smooth and asymptotically conformal boundary] // *Vestnik Omskogo universiteta* – Herald of Omsk University. 2018. Vol. 23:3. Pp. 47–51.

5. *Mahina N. M. O sopryazhennyh prostranstvah k nekotorym vesovym prostranstvam analiticheskih funkcij* [On conjugate spaces to some weight spaces of analytic functions] // *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of Bryansk State University. 2015. No. 2. Pp. 420–423.

6. *Mahina N. M. Ocenki proizvodnyh analiticheskih i garmonicheskih funkcij v nekotoryh oblastyah kompleksnoj ploskost* [Estimates of derivatives of analytical and harmonic functions in some areas of the complex plane] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* – Herald of Moscow State Regional University. Series: Physics-Mathematics. 2017. No. 2. Pp. 16–22.

7. *Mahina N. M., Shamoyan F. A. Bazisy v vesovyh prostranstvah funkcij, analiticheskih v oblastyah so spryamlyaemoj granicej* [Bases in weight spaces of analytic functions in domains with a rectified boundary] // *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of the Bryansk State University. 2013. No. 4. Pp. 27–30.

8. *Rodikova E. G., Bednazh V. A. Ob interpolyacii v klassah I. I. Privalova v kruge* [On interpolation in I. I. Privalov's classes in a circle] // *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* – Siberian Electronic Mathematical News. 2019. Vol. 16. Pp. 1762–1775.

9. *Solov'ev A. A. Ocenki v Lp integral'nyh operatorov, svyazannyh s prostranstvami analiticheskih i garmonicheskih funkcij* [Estimates in Lp of integral operators associated with spaces of analytic and harmonic functions] // *Sibirskij matematicheskij zhurnal* – Siberian Mathematical Journal. 1985. Vol. 26:3. Pp. 168–191.

10. *Tkachenko N. M. Vesovye Lp-ocenki analiticheskih i garmonicheskih funkcij v odnosvyaznyh oblastyah kompleksnoj ploskosti: special'nost' 01.01.01 "Veshchestvennyj, kompleksnyj i funkcional'nyj analiz" : diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Weighted Lp-estimates of analytical and harmonic functions in simply connected domains of the complex plane: specialty 01.01.01 "Real, complex and functional analysis" : diss. ... PhD in Physical and Mathematical Sciences]. Bryansk. 2009. 116 p.

11. *Tkachenko N. M. Ob ocenkah modulya proizvodnoj analiticheskoj v uglovoj oblasti funkcii* [On estimates of the module of an analytical derivative in the angular domain of a function] // *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* – Herald of Izhevsk State Technical University. 2008. No. 1 (37). Pp. 96–98.

12. *Shamoyan F. A., Bednazh V. A. Ob invariantnosti klassa otnositel'no operatora differencirovaniya* [On the invariance of a class with respect to the differentiation operator] // *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of Bryansk State University. 2009. No. 4. Pp. 106–111.

13. *Shihvatov A. M. O prostranstvah analiticheskih funkcij v oblasti s uglovoj tochkoj* [On spaces of analytic functions in a domain with an angular point] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1975. Vol. 18:3. Pp. 411–420.

14. *Antonenkova O. E., Shamoyan F. A.* The Cauchy transform of continuous linear functionals and projections on the weighted spaces of analytic functions // Siberian Mathematical Journal. 2005. V. 46:6. Pp. 969–994.

15. *Bednazh V. A., Rodikova E. G., Shamoyan F. A.* Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series for meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic // Complex analysis and operator theory. 2017. V. 11:1. Pp. 197–215.

16. *Burbea J.* The Bergman projection over plane regions // Ark. for mat. 1980. V.18:1. Pp. 207–221.

17. *Duren P. L.* Theory of Hp Spaces. New York/London : Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York : Dover. 292 p.

18. *Hedenmalm H.* The dual of Bergman Space on Simply connected domains // J. d' Analyse Mathematique. 2002. V. 88. Pp. 311–335.

19. *Shamoyan F. A., Bednazh V. A., Karbanovich O. V.* On classes of analytic functions in a disk with a characteristic R. Nevanlinny and α-characteristic of weighted Lp spaces // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 150–167.

20. *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On continuous linear functionals in SOME weighted functional classes on product domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. V. 12. Pp. 651–678.

УДК 510.22 DOI 10.25730/VSU.0536.22.002

Размерность упорядоченных множеств и ее свойства

Е. М. Вечтомов[1], И. А. Сазанов[2]

[1]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

[2]магистрант кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: ivan.sazmem@gmail.com

Аннотация. Анализируется понятие размерности упорядоченного множества. Доказаны существование и инвариантность размерности произвольных упорядоченных множеств. Доказаны основные свойства размерности конечных упорядоченных множеств. Приведены иллюстрирующие примеры. Рассматривается также полукольцо классов изоморфности упорядоченных множеств.

Ключевые слова: упорядоченное множество, конечное упорядоченное множество, цепь, размерность, свойства размерности.

Введение. Теория упорядоченных множеств – часть современной математики, возникшая в рамках теории множеств в 1920–1930 гг. Создателем теории множеств был немецкий математик Георг Кантор (1845–1916) [см. 1]. Порядковая структура является одной из трех фундаментальных математических структур – наряду с алгебраической и топологической структурами, выделенными группой Никола Бурбаки [3], объединившей в один коллектив видных французских математиков середины XX в. В 1940 г. вышло первое издание известной монографии [2], написанной основоположником теории решеток американским математиком Гарреттом Биркгофом (1911–1996). В настоящее время теория упорядоченных множеств и решеток служит одним из классических направлений современной математики [см. 2; 7; 11; 12; 13; 14; 15], играет важную роль в абстрактной алгебре, общей топологии, функциональном анализе, дискретной математике и компьютерных науках. Основы теории упорядоченных множеств можно найти в следующих источниках: [1, глава 1], [7, глава 3], [12, глава 3], [12, глава 3], [14, параграф 1], [15, глава 3]. Отметим также, что изучению упорядоченных множеств посвящены наши работы [4; 5; 6; 8; 9; 10].

Понятие размерности конечного упорядоченного множества появилось в начале 50-х гг. XX в. До сих пор это понятие вызывает интерес у математиков. Скажем, отдельно исследовались упорядоченные множества размерности 2. Теорема о совпадении порядковой и мультипликативной размерностей впервые опубликована норвежским математиком Ойстином Оре (1899–1968) в 1962 г. [13, теорема 10.4.2]. Дополнительная информация содержится в книге американского математика Ричарда Стенли (1944 г. р.) [15, с. 263].

В статье определяются исходные понятия порядковой структуры. Вводится общее понятие размерности упорядоченного множества. Приведены иллюстрирующие теорию примеры. Доказываются свойства функции размерности на множестве всех конечных упорядоченных множеств.

1. Основные понятия. Приведем определения базовых порядковых понятий.

Зафиксируем множества A и B. *Упорядоченной парой* (a, b), $a\in A$ и $b\in B$, называется объект, имеющий две компоненты (или координаты): первую – a, вторую – b. Предполагается, что равенство пар $(a, b)=(c, d)$ означает, что $a=c$ и $b=d$. *Прямым произведением* множеств A и B называется множество

$$A\times B = \{(a, b)\colon a\in A \ \&\ b\in B\}$$

всевозможных упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B.

Бинарным отношением (или *соответствием*) между множествами A и B называется произвольная направленная связь (закон) ρ между отдельными элементами $a\in A$ и $b\in B$. Если элементы a и b связаны ρ, то пишут $a\rho b$ и говорят также, что a и b находятся в отношении ρ. При $A=B$ отношение ρ называют *бинарным отношением на множестве* A. Говоря формально, *бинарным отношением* между множествами A и B называется любое подмножество ρ прямого произведения $A\times B$, то есть произвольное множество упорядоченных пар $(a; b)$, $a\in A$, $b\in B$. Связь между содержательным и формальным определениями бинарного отношения задается отождествлением $\rho\equiv\{(a; b)\colon a\rho b\}$.

Определение 1. (*Частично*) *упорядоченное множество* $\langle A, \leq\rangle$ – это непустое множество A с заданным на нем рефлексивным ($\forall a\in A\colon a\leq a$), транзитивным ($\forall a, b, c\in A\colon a\leq b\leq c \Rightarrow a\leq c$) и антисимметричным ($\forall a, b\in A\colon a\leq b\leq a \Rightarrow a=b$) бинарным отношением $\leq$, называемым *порядком* на A.

Отношение порядка, как правило, обозначается $\leq$ и зачастую опускается при упоминании упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$. Для упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ упорядоченное множество $\langle A, \geq\rangle$ называется *двойственным*, где $a\geq b$ означает $b\leq a$. Упорядоченное множество, изоморфное своему двойственному упорядоченному множеству, называется *самодвойственным*. Легко видеть, что имеет место *принцип двойственности*: если в теореме, сформулированной в терминах отношения порядка $\leq$, заменить порядок $\leq$ на двойственный порядок $\geq$, то снова получим теорему об упорядоченных множествах.

Пусть $\langle A, \leq\rangle$ – произвольное упорядоченное множество. Элементы a, $b\in A$ называются *сравнимыми*, если $a\leq b$ или $b\leq a$; в противном случае – *несравнимыми*. *Линейный порядок* есть такой порядок на множестве A, что любые два элемента из A сравнимы.

Элемент $a\in A$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x\leq a$ ($a\leq x$) для всех $x\in A$. Заметим, что наибольший (наименьший) элемент упорядоченного множества единственен, если он существует.

Элемент из A называется *максимальным* (*минимальным*), если в A нет больших (меньших) его элементов. Если в A существует наибольший (наименьший) элемент, то он является единственным максимальным (минимальным) элементом.

Пусть теперь B – непустое подмножество упорядоченного множества A. Элемент $a\in A$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* B, если $b\leq a$ ($a\leq b$) для всех $b\in B$. *Точной верхней* (*нижней*) *гранью* B называется наименьший (наибольший) элемент множества всех верхних (нижних) граней B в A, обозначаемый $\sup B$ ($\inf B$). Отметим, что $\sup B$ ($\inf B$) может как существовать, так и не существовать, принадлежать B или не принадлежать B. Существование $\sup A$ ($\inf A$) означает, что A имеет наибольший (наименьший) элемент. Множество B называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если B имеет в A хотя бы одну верхнюю (нижнюю) грань.

Упорядоченное множество называется:

цепью или *линейно упорядоченным*, если порядок на нем – линейный;

антицепью, если любые два его различных элемента несравнимы;

вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество обладает наименьшим элементом;

решеткой, если любые два его элемента имеют точные верхнюю и нижнюю грани.

Легко видеть, что вполне упорядоченные множества являются цепями, а цепи являются решетками.

Пусть $f\colon \langle A, \leq\rangle \to \langle B, \leq\rangle$ – отображение упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ в упорядоченное множество $\langle B, \leq\rangle$. Отображение f называется *изотонным*, если $x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$ для всех $x, y\in A$.

Определение 2. Взаимно однозначное отображение f между упорядоченными множествами A и B, для которого отображения f и f^{-1} – изотонные, то есть

$$(\forall x, y\in A)\ x\leq y \Leftrightarrow f(x)\leq f(y),$$

называется (*порядковым*) *изоморфизмом*, а сами упорядоченные множества A и B – *изоморфными*. Изоморфные упорядоченные множества обладают одними и теми же порядковыми свойствами.

Для наглядного изображения конечных упорядоченных множеств с небольшим числом элементов используются диаграммы Хассе [7, с. 122, 123].

Конечные упорядоченные множества A обладают важными числовыми инвариантами, такими как длина, ширина, размерность. *Длиной* A называется наибольшее из чисел элементов его цепей, уменьшенное на 1. *Ширина* X есть наибольшее из чисел элементов всевозможных антицепей в A. А под *размерностью* $\langle A, \leq\rangle$ понимается наименьшее число линейных порядков на A, пересечением которых является данный порядок $\leq$ на A.

2. Операции над упорядоченными множествами. Определим четыре операции над упорядоченными множествами A и B. *Суммой* (*порядковой суммой*) A и B называется упорядоченное множество $A+B$ ($A\oplus B$), носителем которого служит дизъюнктное объединение множеств A и B, а порядок $\leq$ продолжает порядки на A и на B и для любых $a\in A$ и $b\in B$ элементы a и b несравнимы ($a<b$, соответственно). *Прямым произведением* (*лексикографическим произведением*) A и B называется их теоретико-множественное прямое произведение $A\times B$ с покоординатным порядком: $(a_1, b_1)\leq(a_2, b_2)$ $\Leftrightarrow$ $a_1\leq a_2$ и $b_1\leq b_2$ (соответственно, с лексикографическим порядком: $(a_1, b_1)\leq(a_2, b_2)$ $\Leftrightarrow$ $a_1<a_2$ или ($a_1=a_2$ и $b_1\leq b_2$)) для всех a_1, $a_2\in A$ и b_1, $b_2\in B$.

Операции суммы (называемой еще кардинальной), порядковой (или ординальной) суммы, прямого и лексикографического произведений можно обобщить на произвольное семейство $(A_i)_{i\in I}$ упорядоченных множеств A_i, индексированное элементами упорядоченного множества I [14, с. 15].

Определим покоординатный порядок $\leq$ и лексикографический порядок $\angle$ (рефлексивность предполагается) на прямом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ произвольных упорядоченных множеств A_1, $A_2,\ldots, A_n$. Для любых двух n-ок из $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ положим:

$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\le(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1\le b_1, a_2\le b_2,\ldots, a_n\le b_n;$$
$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\angle(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1<b_1 \text{ или } \exists k>0\ (a_1=b_1,\ldots, a_k=b_k, a_{k+1}<b_{k+1}).$$

Из определения лексикографического порядка непосредственно вытекает

Предложение 1. *Если упорядоченные множества $A_1, A_2,\ldots, A_n$ являются цепями (вполне упорядоченными множествами), то лексикографический порядок на их прямом произведении также будет линейным (соответственно, полным линейным) порядком.*

Предложение 2. *Покоординатный порядок на прямом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ упорядоченных множеств A_i равен пересечению n лексикографических порядков, ассоциированных с перестановками* $12\ldots n$, $21\ldots n,\ldots, n1\ldots n-1$.

Доказательство. Легко видеть, что покоординатный порядок $\le$ на прямом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ равен пересечению n лексикографических порядков $\angle_1$, $\angle_2$, …, $\angle_n$, где $\angle_1=\angle$ из определения,

$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\angle_2(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_2<b_2 \text{ или } \exists k\ge 0\ (a_2=b_2,\ldots, a_k=b_k, a_{k+1}<b_{k+1}),$$
$$\ldots,$$
$$(a_1, a_2,\ldots, a_n)\angle_n(b_1, b_2,\ldots, b_n) \Leftrightarrow a_n<b_n \text{ или } \exists k\ge 0\ (a_n=b_n,\ldots, a_k=b_k, a_{k+1}<b_{k+1}).$$

3. Размерность. Инвариантность и существование. Определим понятие размерности произвольного упорядоченного множества.

Определение 3. (*Порядковой*) *размерностью* $\mathrm{ord}(A)$ упорядоченного множества $\langle A, \le\rangle$ называется наименьшая из мощностей $|I|$ множеств $\{\le_i: i\in I\}$ линейных порядков $\le_i$ на A, пересечение которых совпадает с данным порядком:

$$a\le b \Leftrightarrow \forall i\in I\ a\le_i b \text{ (для любых } a, b\in A).$$

Определение 4. *Мультипликативной размерностью* $\mathrm{mud}(A)$ упорядоченного множества A называется наименьшая из мощностей $|I|$ семейств $(A_i)_{i\in I}$ (неодноэлементных) цепей A_i, в прямое произведение которых изоморфно вкладывается A.

Предложение 3 (о продолжении порядка). *Если a, b – несравнимые элементы упорядоченного множества $\langle A, \le\rangle$, то на A существует продолжающий $\le$ порядок ρ (то есть $\le\subseteq\rho$), для которого $a\rho b$.*

Доказательство. Пусть даны упорядоченное множество $\langle A, \le\rangle$ и несравнимые элементы a, $b\in A$. Определим на множестве A бинарное отношение ρ следующим образом: для любых $x, y\in A$ положим

$$x\rho y \Leftrightarrow x\le y \text{ или } x\le a, b\le y.$$

Ясно, что $\le\subseteq\rho$ и $a\rho b$. Покажем, что $\langle A, \rho\rangle$ – упорядоченное множество, то есть ρ есть отношение порядка на множестве A. Рефлексивность отношения ρ очевидна. Пусть $x\rho y$ и $y\rho z$ для элементов $x, y, z\in A$. Если $x\le y$, то $x\le z$ в случае $y\le z$ и $x\rho z$ в случае $y\le a$, $b\le z$. Аналогично, $x\rho z$, если $y\le z$. Поскольку элементы a и b не сравнимы относительно порядка $\le$, то одновременное выполнение пар неравенств $x\le a$, $b\le y$ и $y\le a$, $b\le z$ невозможно. Что доказывает транзитивность отношения ρ. Наконец, предположим, что $x\rho y$ и $y\rho x$. Если $x\le y$ и $y\le x$, то $x=y$. Если $x\le y$ и $y\le a$, $b\le x$, то $b\le x\le y\le a$, откуда $b\le a$, что невозможно. В остальных двух случаях также получаем противоречие с несравнимостью элементов a и b. Поэтому отношение ρ антисимметрично. Предложение доказано.

Предложение 4. *Максимальные порядки на любом непустом множестве совпадают с линейными порядками на этом множестве.*

Доказательство. Рассмотрим множество M всевозможных порядков ρ на произвольно взятом непустом множестве A. Множество M является подмножеством булеана $\mathrm{B}(A\times A)$. Поэтому само M служит упорядоченным множеством относительно отношения включения $\subseteq$ множеств пар: $\rho\subseteq\sigma$ для любых порядков ρ, σ на A. Очевидно, что линейные порядки на A будут максимальными элементами упорядоченного множества $\langle M, \subseteq\rangle$. Обратно, пусть $\le$ – максимальный порядок на множестве A. Если порядок $\le$ не линейный, то в упорядоченном множестве $\langle A, \le\rangle$ существуют несравнимые элементы a, b. Но тогда порядок $\le$ строго содержится в порядке ρ из предложения 3.

Лемма Цорна. *Если любая цепь в упорядоченном множестве ограничена сверху, то это упорядоченное множество обладает хотя бы одним максимальным элементом.*

Это утверждение доказал американский математик немецкого происхождения Макс Цорн (1906–1993) в 1935 г. Заметим, что в теории множеств лемма Цорна эквивалентна знаменитой *аксиоме выбора*, поэтому она может быть принята без доказательства. Кроме того, лемма Цорна равносильна теореме Цермело (1904 г.), утверждающей, что каждое непустое множество A можно вполне упорядочить. Немецкий математик Эрнст Цермело (1871–1953) – один из основоположников аксиоматической теории множеств.

На основании принципа двойственности получаем

Предложение 5. *Верно утверждение, двойственное лемме Цорна.*

Теорема 1 (продолжаемость до линейного порядка). *Всякий порядок на любом непустом множестве вкладывается в некоторый линейный порядок на этом множестве.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \leq \rangle$ – произвольное упорядоченное множество. Обозначим через N подмножество множества M всех тех порядков на A, которые содержат данный порядок $\leq$. Получаем упорядоченное множество $\langle N, \subseteq \rangle$. Покажем, что оно удовлетворяет условию леммы Цорна. Для этого возьмем в $\langle N, \subseteq \rangle$ произвольную цепь $\{\leq_i : i \in I\}$ порядков $\leq_i$. Это означает, что любых индексов $i, j \in I$ имеем $\leq_i \subseteq \leq_j$ или $\leq_j \subseteq \leq_i$. Рассмотрим их объединение $\rho = \cup\{\leq_i : i \in I\}$, которое также будет отношением порядка на A. Действительно, пусть $a, b, c \in A$. Ясно, что $a\rho a$ (рефлексивность). Если $a\rho b$ и $b\rho c$, то $a \leq_i b$ и $b \leq_j c$ для некоторых $i, j \in I$. Но тогда $a \leq_k b$ и $b \leq_k c$ при $k=i$ или j. Поэтому $a \leq_k c$ и, значит, $a\rho c$ (транзитивность). Если же $a\rho b$ и $b\rho a$, то снова $a \leq_k b$ и $b \leq_k a$ для подходящего $k \in I$. Поэтому $a=b$ (антисимметричность). Получили порядок $\rho \in N$ – точную верхнюю грань цепи $\{\leq_i : i \in I\}$. По лемме Цорна упорядоченное множество $\langle N, \subseteq \rangle$ имеет максимальный элемент – порядок σ, являющийся максимальным порядком на множестве A. В силу предложения 4 σ будет искомым линейным порядком на A.

Замечание 1. Теорема 1 впервые сформулирована и доказана польским математиком Эдвардом Шпильрайном (1907–1976) в 1930 г. с применением аксиомы выбора. Известно, что теорема Шпильрайна слабее аксиомы выбора.

Замечание 2. Для конечных упорядоченных множеств теорема 1 доказывается без применения леммы Цорна. Для этого требуется конечное число раз использовать предложение 3.

Теорема 2 (существование и инвариантность размерности). *Любое упорядоченное множество имеет размерность. При этом изоморфные упорядоченные множества имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Пусть дано упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$. Возьмем произвольную пару $a, b \in A$ несравнимых элементов. По предложению 3 на A существует порядок ρ, содержащий порядок $\leq$ и удовлетворяющий соотношению $a\rho b$. По теореме 1 порядок ρ продолжается до некоторого линейного порядка на A; обозначим его $\rho(a, b)$. Вместе с порядком $\rho(a, b)$ имеем линейный порядок $\rho(b, a)$, для которого $b\rho(b, a)a$. Очевидно, что пересечение линейных порядков $\rho(a, b)$ по всем упорядоченным парам несравнимых элементов $a, b \in A$ равно исходному порядку $\leq$.

Рассмотрим множество всех множеств $\{\leq_i : i \in I\}$ линейных порядков $\leq_I$ на множестве A, дающих в пересечении порядок $\leq$. Поскольку класс мощностей (кардинальных чисел) вполне упорядочен по величине, то среди мощностей $|I|$ указанных индексных множеств I имеется наименьшая мощность, обозначаемая $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(\langle A, \leq \rangle)$ и являющаяся размерностью упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$. Тем самым, мы доказали существование размерности любого упорядоченного множества.

Докажем инвариантность размерности: изоморфные упорядоченные множества имеют одинаковую размерность. Пусть $f: \langle A, \leq \rangle \to \langle B, \angle \rangle$ – изоморфизм упорядоченных множеств. Изоморфные упорядоченные множества служат копиями друг друга. Введем наглядные обозначения $\boldsymbol{A}{:=}B$, $\boldsymbol{\leq}{:=}\angle$ и $\boldsymbol{x}{:=}f(x)$ для каждого $x \in A$. Тогда $x \leq y \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \boldsymbol{\leq} \boldsymbol{y}$ при любых $x, y \in A$. Аналогичная эквиваленция имеет место и для любого бинарного отношения ρ на A и его «двойника» $\boldsymbol{\rho}$ на $\boldsymbol{A}$. Очевидно, что ρ является отношением порядка (линейным порядком) на A тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\rho}$ будет отношением порядка (линейным порядком) на $\boldsymbol{A}$. Поэтому равенство $\leq = \cap\{\leq_i : i \in I\}$ эквивалентно равенству $\boldsymbol{\leq} = \cap\{\boldsymbol{\leq_i} : i \in I\}$ (порядки выделены жирным шрифтом) для любого множества линейных порядков $\leq_i$ $(i \in I)$ на множестве A. Следовательно, $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(\boldsymbol{A})=\mathrm{ord}(B)$.

Предложение 6. *Размерности двойственных друг другу упорядоченных множеств совпадают.*

Замечание 3. В случае конечных упорядоченных множеств мощности суть натуральные числа. Поэтому при доказательстве теоремы 2 для конечных упорядоченных множеств достаточно воспользоваться принципом наименьшего числа: всякое непустое множество натуральных чисел обладает наименьшим элементом. Фактически это означает, что множество **N** всех натуральных чисел с естественным порядком является вполне упорядоченным множеством, что эквивалентно принципу математической индукции.

Замечание 4. По сути, теорема 2 – это теорема Дашника – Миллера 1941 г., утверждающая, что каждый порядок на произвольном непустом множестве является пересечением содержащих его линейных порядков.

Пример 1. Очевидно, что цепи суть в точности упорядоченные множества размерности 1.

Пример 2. Размерность любой неодноэлементной антицепи равна 2. В самом деле, пусть A – антицепь, то есть множество A берется с отношением равенства 1_A на нем. По теореме 1 порядок 1_A содержится в некотором линейном порядке $\leq_1$ на A. Через $\leq_2$ обозначим обратный к $\leq_1$ линейный порядок на A: $x \leq_2 y \Leftrightarrow y \leq_1 x$ для любых элементов $x, y \in A$. Тогда $\leq_1 \cap \leq_2 = 1_A$. Так как неодноэлементные антицепи не являются цепями, то $\mathrm{ord}(A)=2$.

Далее, пусть порядок $\leq$ на конечном упорядоченном множестве A есть пересечение n линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$. Рассмотрим цепи $A_1=\langle A, \leq_1\rangle$, $A_2=\langle A, \leq_2\rangle$, …, $A_n=\langle A, \leq_n\rangle$ и их прямое произведение $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ с покоординатным порядком $\leq$. Положим

$$f\colon A\to A_1\times A_2\times\ldots\times A_n, f(a)=(a, a, \ldots, a) \text{ для всех } a\in A.$$

Отображение f инъективно. Для любых $a, b\in A$ имеем:

$$a\leq b \Leftrightarrow (\forall \mathrm{i}=1, 2, \ldots, n)\ a\leq_i b \Leftrightarrow f(a)\leq f(b).$$

Стало быть, упорядоченное множество A изоморфно упорядоченному подмножеству $f(A)$ прямого произведения n цепей. При $n=\mathrm{ord}(A)$ заключаем, что $\mathrm{mud}(A)\leq\mathrm{ord}(A)$.

Теорема 3 (мультипликативность, теорема Оре). *Размерность любого конечного упорядоченного множества A совпадает с его мультипликативной размерностью:* $ord(A)=mud(A)$.

Доказательство. Остается проверить выполнение обратного неравенства $\mathrm{ord}(A)\leq\mathrm{mud}(A)$. Предположим, что конечное упорядоченное множество A изоморфно упорядоченному подмножеству $\langle B, \leq\rangle$ прямого произведения n цепей $A_1, A_2, , A_n$. В силу предложений 1 и 2 порядок $\leq$ является пересечением n линейных порядков $(B\times B)\cap\angle_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Поэтому при $n=\mathrm{mud}(A)$ получаем $\mathrm{ord}(A)\leq\mathrm{mud}(A)$. Следовательно, $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{mud}(A)$.

Замечание 5. Теорема 3 верна и для произвольных бесконечных упорядоченных множеств, только слова *натуральное число n* следует заменить на слова *мощность n*.

4. Размерность малых упорядоченных множеств.

Пример 3. Все существующие (с точностью до изоморфизма) 82 упорядоченных множества, имеющие не более пяти элементов и не являющиеся цепями, имеют размерность 2. Кроме того, среди 318 шестиэлементных упорядоченных множеств одно имеет размерность 1 (цепь), три – размерность 3, остальные 314 – размерность 2 [см. 12, с. 113].

Пример 4. Если B – упорядоченное множество, полученное из упорядоченного множества A добавлением (новых) наибольшего и наименьшего элементов, то $\mathrm{ord}(B)=\mathrm{ord}(A)$.

Пример 5. Рассмотрим шестиэлементное упорядоченное множество $A=\{a, b, c, d, e, f\}$ со следующим порядком $\leq$: $a<d$, $a<e$, $b<d$, $b<f$, $c<e$, $c<f$. Заметим, что каждый из шести элементов упорядоченного множества A либо (строго) меньше ровно двух элементов, либо больше ровно двух элементов. Полученное упорядоченное множество $\langle A, \leq\rangle$ самодвойственное, имеет длину 1 и ширину 3. Изобразим A его диаграммой Хассе:

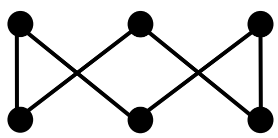

Рис. 1

Покажем, что размерность A равна 3. Сначала докажем от противного, что порядок $\leq$ не является пересечением двух линейных порядков A. Будем считать, что $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и один из линейных порядков, дающих в пересечении с другим линейным порядком исходный порядок $\leq$, естественный $1<2<3<4<5<6$. Второй линейный порядок $\angle$ задан перестановкой $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$ чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6:

$$i_k\angle i_l \Leftrightarrow k<l \text{ и } i_k<i_l.$$

Ясно, что $i_3=6$, $i_4=1$ и ни одно из чисел i_1, i_2, i_5, i_6 не равно 2, противоречие. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\geq3$. С другой стороны, порядок $\leq$ на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ есть пересечение трех линейных порядков-перестановок: 123456, 145236, 246135. Биекция $a\to1$, $b\to2$, $c\to4$, $d\to3$, $e\to5$, $f\to6$ устанавливает изоморфизм упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ на упорядоченное множество $\langle\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq\rangle$. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\leq3$. Следовательно, $\mathrm{ord}(A)=3$.

Пример 6. Пусть $B=\mathrm{B}(\{x, y, z\})$ – булеан трехэлементного множества $\{x, y, z\}$, то есть множество всех подмножеств в $\{x, y, z\}$ с отношением включения $\subseteq$ множеств. Упорядоченное подмножество $C=B\setminus\{\varnothing, \{x, y, z\}\}$ в $\langle B, \subseteq\rangle$, состоящее из одноэлементных и двухэлементных множеств, изоморфно упорядоченному множеству $\langle A, \leq\rangle$ из примера 5. Значит, в силу утверждения примера 4, $\mathrm{ord}(B)=\mathrm{ord}(C)=\mathrm{ord}(A)=3$.

Приведем диаграммы Хассе еще двух шестиэлементных упорядоченных множеств размерности 3.

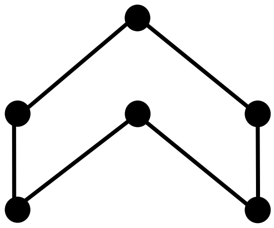

Рис. 2

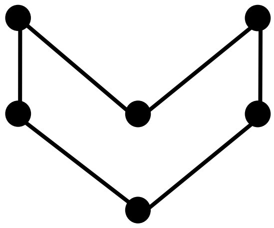

Рис. 3

Упорядоченные множества на рис. 2 и 3 двойственны друг другу, имеют длину 2, ширину 3 и размерность 3. Заметим, что диаграмма Хассе на рис. 2 построена снизу вверх, начиная с минимальных элементов, а диаграмма Хассе на рис. 3 построена сверху вниз, начиная с максимальных элементов.

Иллюстрация. Покажем, как в примере 5 возникли перестановки 145236 и 246135. Имеем изоморфные упорядоченные множества $\langle A, \leq\rangle$ и $\langle C, \subseteq\rangle$ при следующем биективном соответствии:

$$a\to\{z\},\ b\to\{y\},\ c\to\{x\},\ d\to\{y, z\},\ e\to\{x, z\},\ f\to\{x, y\}.$$

Далее каждому элементу из C поставим в соответствие его характеристическую функцию $\{x, y, z\}\to\{0, 1\}$, представляющую собой упорядоченную тройку чисел 0 и 1:

$$\{x\}\equiv(1, 0, 0),\ \{y\}\equiv(0, 1, 0),\ \{z\}\equiv(0, 0, 1),$$
$$\{x, y\}\equiv(1, 1, 0),\ \{x, z\}\equiv(1, 0, 1),\ \{y, z\}\equiv(0, 1, 1).$$

В результате упорядоченное множество A изоморфно вложено в прямое произведение трех двухэлементных цепей $\{0, 1\}$, $0<1$: $\{0, 1\}\times\{0, 1\}\times\{0, 1\}=\{0, 1\}^3$. Как и в предложении 1, зададим на образе A в произведении $\{0, 1\}^3$ три линейных лексикографических порядка:

$(0, 0, 1)<(0, 1, 0)<(0, 1, 1)<(1, 0, 0)<(1, 0, 1)<(1, 1, 0)$ – по 1-й координате;

$(0, 0, 1)<(1,0, 0)<(1, 0, 1)<(0, 1, 0)<(0, 1, 1)<(1, 1, 0)$ – по 2-й координате;

$(0, 1, 0)<(1, 0, 0)<(1, 1, 0)<(0, 0, 1)<(0, 1, 1)<(1, 0, 1)$ – по 3-й координате.

Обозначим $(0, 0, 1)=$**1**, $(0, 1, 0)=$**2**, $(0, 1, 1)=$**3**, $(1, 0, 0)=$**4**, $(1, 0, 1)=$**5**, $(1, 1, 0)=$**6**. Получаем три перестановки **123456**, **145236**, **246135**, дающие в пересечении порядок упорядоченного множества $\langle A, \leq\rangle$ из примера 5. При этом $\langle A, \leq\rangle$ изоморфно упорядоченному подмножеству прямого произведения трех шестиэлементных цепей (см. рис. 4)

1<2<3<4<5<6, 1<4<5<2<3<6, 2<4<6<1<3<5

при взаимно однозначном соответствии

$a\to$(**1**, **1**, **1**), $b\to$(**2**, **2**, **2**), $c\to$(**4**, **4**, **4**), $d\to$(**3**, **3**, **3**), $e\to$(**5**, **5**, **5**), $f\to$(**6**, **6**, **6**).

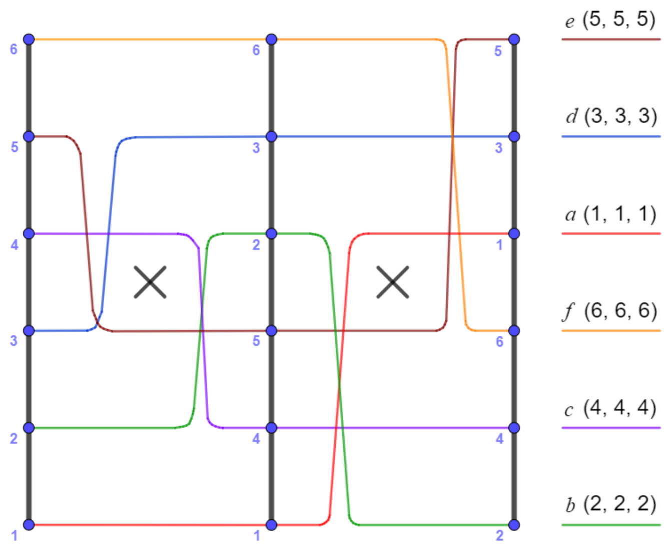

Рис. 4

5. Свойства размерности конечных упорядоченных множеств. Пусть далее A, B – произвольные конечные упорядоченные множества с одинаково обозначаемым порядком $\leq$.

Свойство 1 (монотонность). *Если A – упорядоченное подмножество B, то $ord(A) \leq ord(B)$.*

Доказательство. Порядок на подмножестве A – индуцированный, то есть совпадает с пересечением $\leq\cap(A\times A)$. Если порядок $\leq$ упорядоченного множества B является пересечением линейных порядков $\leq_1$, …, $\leq_m$, то $\leq\cap(A\times A)=(\leq_1\cap(A\times A))\cap\ldots\cap(\leq_m\cap(A\times A))$ – пересечение m линейных порядков на A. Поэтому $\mathrm{ord}(A) \leq \mathrm{ord}(B)$.

Свойство 2 (о размерности прямого произведения). *Верны неравенства*

$$max(ord(A), ord(B)) \leq ord(A\times B) \leq ord(A)+ord(B).$$

Доказательство. Возьмем по элементу $a\in A$ и $b\in B$. Имеем $A\cong A\times\{b\}$ и $B\cong\{a\}\times B$, откуда по свойству 1 $\mathrm{ord}(A)\leq\mathrm{ord}(A\times B)$ и $\mathrm{ord}(B)\leq\mathrm{ord}(A\times B)$. Далее, пусть порядок на A равен пересечению n линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$, а порядок на B равен пересечению m линейных порядков $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$. Тогда покоординатный порядок на $A\times B$ будет пересечением следующих $n+m$ линейных порядков:

Пример 7. Рассмотрим двухэлементную цепь A и двухэлементную антицепь B. Имеем $\mathrm{ord}(A)=1$, $\mathrm{ord}(B)=2$ и $\mathrm{ord}(A\times B)=2<3=\mathrm{ord}(A)+\mathrm{ord}(B)$. Кроме того, $\mathrm{ord}(A\times A)=2>1=\mathrm{ord}(A)$ и $\mathrm{ord}(B\times B)=2=\mathrm{ord}(B)$. Значит, равенства в неравенствах свойства 2 могут не выполняться.

Свойство 3 (о размерности дизъюнктной суммы). *Если одно из упорядоченных множеств A, B не является цепью, то*

$$ord(A+B)=max(ord(A), ord(B)).$$

Доказательство. Пусть $2\leq n=\mathrm{ord}(A)\geq\mathrm{ord}(B)=m$. Порядок на A есть пересечение линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$, а порядок на B равен пересечению линейных порядков $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$. Тогда порядок на сумме $A+B$ будет пересечением n линейных порядков $\angle_1\leq_1, \leq_2\angle_2, \ldots, \leq_m\angle_m, \ldots, \leq_n\angle_m$ на $A\cup B$. Получаем требуемое равенство.

Свойство 4. *Если A и B – цепи, то* $ord(A+B)=2$.

Действительно, выстроим цепи сначала в порядке A, B, а затем – в порядке B, A.

Свойство 5 (о размерности порядковой суммы). *Верно равенство*

$$ord(A\oplus B)=max(ord(A), ord(B)).$$

Доказательство. Допустим, как при доказательстве свойства 3, что, порядок на A есть пересечение линейных порядков $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$ и порядок на B равен пересечению линейных порядков $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$. Тогда порядок на $A\cup B$ равен пересечению n линейных порядков $\leq_1\angle_1, \leq_2\angle_2, \ldots, \leq_m\angle_m, \ldots, \leq_n\angle_m$ при $n\geq m$ и будет пересечением m линейных порядков $\leq_1\angle_1, \leq_2\angle_2, \ldots, \leq_n\angle_n, \ldots, \leq_n\angle_m$ при $n\leq m$. Откуда вытекает доказываемое равенство.

Теперь рассмотрим лексикографическое произведение $A\Pi B$ упорядоченных множеств A и B.

Свойство 6 (о размерности лексикографического произведения). *Справедливо равенство* $ord(A\Pi B)=max(ord(A), ord(B))$.

Доказательство. Заметим, что $A\Pi B$ будет порядковой суммой $\oplus B_a$, $B_a=B$, по всем элементам a упорядоченного множества A. Пусть даны линейные порядки $\leq_1, \leq_2, \ldots, \leq_n$ на A и линейные порядки $\angle_1, \angle_2, \ldots, \angle_m$ на B, пересечения которых равны порядкам на A и на B соответственно. Обозначим через $\leq_i\Pi\angle_j$ линейный лексикографический порядок цепей $\langle A, \leq_i\rangle$ и $\langle B, \angle_j\rangle$. Тогда порядок на $A\Pi B$ будет равен пересечению n линейных порядков $\leq_1\Pi\angle_1, \ldots, \leq_m\Pi\angle_m, \ldots, \leq_n\Pi\angle_m$ при $n\geq m$ и пересечению m линейных порядков $\leq_1\Pi\angle_1, \ldots, \leq_n\Pi\angle_n, \ldots, \leq_n\Pi\angle_m$ при $n<m$.

Свойство 7 (размерность булеана). *Размерность булеана n-элементного множества равна n.*

Доказательство. Булеан n-элементного множества изоморфен прямому произведению $A=\{0, 1\}^n$ n экземпляров двухэлементной цепи $\{0, 1\}$. В силу предложений 1 и 2 покоординатный порядок $\leq$ в $\{0, 1\}^n$ совпадает с пересечением n линейных порядков. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\leq n$.

Докажем обратное включение. Рассмотрим в A элементы $\alpha_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_2=(0, 1, \ldots, 0)$, …, $\alpha_n=(0, 0, \ldots, 1)$, $\beta_1=(0, 1, \ldots, 1)$, $\beta_2=(1, 0, \ldots, 1)$, …, $\beta_n=(1, 1, \ldots, 0)$, составляющие упорядоченное подмножество B в A. Для любых индексов $i, j\in\{1, 2, \ldots, n\}$ имеем: $\alpha_i<\beta_j$ при $i\neq j$ и несравнимые элементы α_i, β_i. Пусть дано множество Δ линейных порядков на множестве A, пересечение которых совпадает с порядком $\leq$. Для каждого $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$в Δ найдется такой линейный порядок $\leq_i$, что $\beta_i <_i \alpha_i$. Если $\alpha_i <_i \alpha_j$ при некотором j, то $\alpha_i <_i \beta_i$, поскольку $\alpha_j<\beta_i$ и, значит, $\alpha_j<_i \beta_i$. Полученное противоречие показывает, что относительно порядка $\leq_i$ элемент α_i будет наибольшим элементом множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Следовательно, порядки $\leq_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, различны уже на множестве B и, стало быть, множество Δ имеет не менее n элементов. Поэтому $\mathrm{ord}(A)\geq\mathrm{ord}(B)\geq n$. В результате получаем: $\mathrm{ord}(A)=\mathrm{ord}(B)=n$.

Пример 8. Прямая степень $A=\{0, 1\}^n$ содержит 2^n элементов, имеет длину n и размерность n по свойству 7. Упорядоченное подмножество $B=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ в A содержит $2n$ элементов, имеет длину 1, ширину n и размерность n в силу свойства 7. Последнее утверждение обобщает пример 5.

Теорема 4 (размерность прямого произведения цепей). *Размерность прямого произведения n неодноэлементных цепей равна n.*

Доказательство. Пусть даны неодноэлементные цепи $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Рассмотрим их прямое произведение A с покоординатным порядком. В каждой цепи A_i ($i=1, 2, \ldots, n$) выделим двухэлементную подцепь B_i. Их прямое произведение B будет упорядоченным подмножеством в A. По свойству 7 ord(B)=n, откуда по свойству 1 ord(A)≥n. С другой стороны, в силу предложений 1 и 2, ord(A)≤n. Значит, ord($A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$)=$n$.

6. Полукольцо классов изоморфности упорядоченных множеств. Введенные в параграфе 2 бинарные операции над упорядоченными множествами обладают следующими алгебраическими свойствами – с точностью до порядкового изоморфизма. Операции взятия суммы + и прямого произведения × коммутативны и ассоциативны, операции порядкового сложения ⊕ и лексикографического произведения не коммутативны и ассоциативны. Кроме того, операция × дистрибутивна относительно операции +.

Обозначим через **S** множество (на самом деле, класс) всех классов $\boldsymbol{A}$={X – упорядоченное множество: $X \cong A$} изоморфности по всевозможным упорядоченным множествам A. На множестве **S** рассмотрим операции сложения и умножения: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$={$X$ – упорядоченное множество: $X \cong A+B$} и $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$={$X$ – упорядоченное множество: $X \cong A \times B$}. В результате получаем алгебраическую структуру ⟨**S**, +, ·⟩, называемую *коммутативным полукольцом*: ⟨**S**, +⟩ и ⟨**S**, ·⟩ – коммутативные полугруппы, причем, умножение дистрибутивно относительно сложения $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}$ для любых упорядоченных множеств A, B, C. Заметим, что класс ***1*** всех одноэлементных упорядоченных множеств служит единичным (нейтральным по умножению) элементом в полукольце **S**.

Тем самым, доказано следующее утверждение:

Предложение 7. *Множество **S** всех классов изоморфности упорядоченных множеств с операциями + и · является коммутативным полукольцом с единицей.*

Замечание 7. Пусть **F** – подполукольцо в **S**, состоящее из классов изоморфности конечных упорядоченных множеств. Получаем коммутативное полукольцо **F** с единицей, обладающее свойством аддитивной сократимости: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ для любых конечных упорядоченных множеств A, B, C. Поэтому полукольцо **F** имеет кольцо разностей, а также обладает свойством мультипликативной сократимости [см. 15, с. 227]. Кроме того, множество **S****F** является простым идеалом полукольца **S** и (**S****F**)+**S**⊆**S****F**.

Замечание 8. Класс **AC** классов изоморфности всевозможных антицепей является подполукольцом с единицей в **S**, поскольку сумма и произведение антицепей будут антицепями, а одноэлементные упорядоченные множества суть в точности упорядоченные множества, являющиеся цепями и антицепями одновременно. Легко видеть, что полукольцо **AC** изоморфно полукольцу всех ненулевых кардинальных чисел (мощностей) с арифметическими операциями сложения и умножения. В полукольце **AC**, стало быть, и в полукольце **S** свойства аддитивной и мультипликативной сократимости не выполняются. Полукольцо **N** натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения изоморфно подполукольцу полукольца **AC**.

Полагаем ord($\boldsymbol{A}$)=ord(X) для любого упорядоченного множества $X \in \boldsymbol{A}$.

Предложение 8. *Отношение равенства размерности ≈ на полукольце ⟨**S**, +, ·⟩, будучи отношением эквивалентности, не является конгруэнцией.*

Доказательство. Очевидно, что отношение равенства размерности на классе всевозможных упорядоченных множеств является отношением эквивалентности. В силу инвариантности размерности это же верно и для полукольца ***S***. Пусть $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$, то есть ord($A$)=ord($B$), и C – произвольное упорядоченное множество. По свойствам 3 и 4 имеем ord($A+C$)=ord($B+C$), то есть $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$. Это значит, что отношение равенства размерности ≈ на ***S*** стабильно относительно операции сложения. Покажем, что отношение равенства размерности ≈ на ***S*** не является стабильным относительно операции умножения. Положим A={0, 1}×{0, 1} при 0<1, B={a, b}и D={a, b, c, d} – антицепи, C={0, 1}. Имеем ord(A)=ord(B)=ord(D)=2, то есть $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B} \approx \boldsymbol{D}$. Поскольку $(A \times C) \cong \{0, 1\}^3$, то по свойству 7 ord($A \times C$)=3. Но, как легко видеть, ord($B \times C$)=2 и ord($D \times C$)=2, то есть $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \approx (\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C})$. Следовательно, произведения $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}$ не находятся в отношении ≈.

Список литературы

1. *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. М. : Изд-во МГУ, 1988. 112 с.

2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М. : Наука, 1984. 568 с.

3. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // В Приложении к книге: Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М. : ИЛ, 1963. С. 245–259.

4. *Вечтомов Е. М.* Теория решеток. Киров : Киров. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина, 1995. 40 с.

5. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 2 (1). С. 111–120.

6. *Вечтомов Е. М.* Курс «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 169–186.

7. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2018. 296 с.

8. *Вечтомов Е. М.* Практикум по теории упорядоченных множеств и решеток // Advanced science. Киров : ВятГУ, 2018. № 3. С. 4–17.

9. *Вечтомов Е. М., Абрамова И. В., Шилова З. В.* Методика преподавания порядковых структур в обучении студентов вуза // Перспективы науки и образования. 2019. № 5 (41). С. 170–188.

10. *Вечтомов Е. М., Сазанов И. А.* Задачи и упражнения на тему размерности упорядоченных множеств : мат-лы III Международной научно-практической конференции «Задачи в обучении математике, физике, информатике: теория, опыт, инновации». Вологда : ВоГУ, 2022. С. 17–20.

11. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М. : Мир, 1982. 456 с.

12. *Гуров С. И.* Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: определения, свойства, примеры. М., 2013. 221 с.

13. Оре О. Теория графов. Изд. 2-е. М. : Наука, 1980. 336 с.

14. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. Изд. 2-е. М. : Наука, 1982. 160 с.

15. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М. : Мир, 1990. 440 с.

The dimension of ordered sets and its properties

E. M. Vechtomov[1], I. A. Sazanov[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

[2]master student of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: ivan.sazmem@gmail.com

Abstract. The concept of the dimension of an ordered set is analyzed. The existence and invariance of the dimension of arbitrary ordered sets are proved. The basic properties of the dimension of finite ordered sets are proved. Illustrative examples are given. A semiring of isomorphism classes of ordered sets is also considered.

Keywords: ordered set, finite ordered set, chain, dimension, dimension properties.

References

1. *Arhangel'skij A. V. Kantorovskaya teoriya mnozhestv* [Kantorovskaya theory of sets]. M. Moscow State University. 1988. 112 p.

2. *Birkhoff G. Teoriya reshetok* [Theory of lattices]. M. Nauka (Science). 1984. 568 p.

3. *Burbaki N. Arhitektura matematiki* [Architecture of mathematics] // *V Prilozhenii k knige: N. Burbaki. Ocherki po istorii matematiki* – In the Appendix to the book: N. Bourbaki. Essays on the history of mathematics. M. IL. 1963. Pp. 245–259.

4. *Vechtomov E. M. Teoriya reshetok* [Theory of lattices]. Kirov. Kirov State Pedagogical Institute n. a. V. I. Lenin. 1995. 40 p.

5. *Vechtomov E. M. Izuchenie poryadkovoj struktury* [The study of the ordinal structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University of Humanities. 2010. No. 2 (1). Pp. 111–120.

6. *Vechtomov E. M. Kurs "Uporyadochennye mnozhestva i reshetki" dlya magistrantov-matematikov* [Course "Ordered sets and lattices" for master students-mathematicians] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical colleges and universities of the Volga-Vyatka region. 2011. Is. 13. Pp. 169–186.

7. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury* [Mathematics: basic mathematical structures]. Publ. 2nd. M. Yurayt. 2018. 296 p.

8. *Vechtomov E. M. Praktikum po teorii uporyadochennyh mnozhestv i reshetok* [Practicum on the theory of ordered sets and lattices] // *Advanced science* – Advanced science. Kirov. VyatSU. 2018. No. 3. Pp. 4–17.

9. *Vechtomov E. M., Abramova I. V., Shilova Z. V. Metodika prepodavaniya poryadkovyh struktur v obuchenii studentov vuza* [Methods of teaching ordinal structures in teaching university students] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya* – Prospects of science and education. 2019. No. 5 (41). Pp. 170–188.

10. *Vechtomov E. M., Sazanov I. A. Zadachi i uprazhneniya na temu razmernosti uporyadochennyh mnozhestv : mat-ly III Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Zadachi v obuchenii matematike, fizike, informatike: teoriya, opyt, innovacii"* [Problems and exercises on the dimension of ordered sets : materials of the III International Scientific and Practical Conference "Problems in teaching mathematics, physics, computer science: theory, experience, innovation"]. Vologda. VSU. 2022. Pp. 17–20.

11. *Gretcer G. Obshchaya teoriya reshetok* [General theory of lattices]. M. Mir (World). 1982. 456 p.

12. *Gurov S. I. Bulevy algebry, uporyadochennye mnozhestva, reshetki: opredeleniya, svojstva, primery* [Boolean algebras, ordered sets, lattices: definitions, properties, examples]. M. 2013. 221 p.

13. *Ore O. Teoriya grafov* [Graph theory]. Publ. 2nd. M. Nauka (Sceince). 1980. 336 p.

14. *Skornyakov L. A. Elementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. Publ. 2nd. M. Nauka (Science). 1982. 160 p.

15. *Stanley R. Perechislitel'naya kombinatorika* [Enumerative combinatorics]. M. Mir (World). 1990. 440 p.

УДК 517.518.244 DOI 10.25730/VSU.0536.22.003

О сумме геометрически выпуклых функций

С. И. Калинин[1], Л. В. Панкратова[2]
[1]доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru
[2]кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-1242-3807. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются необходимые и достаточные условия геометрической выпуклости функции на промежутке в терминах GA-выпуклости. На основе формулируемого критерия показывается, что сумма двух геометрически выпуклых функций геометрически выпукла.

Ключевые слова: геометрически выпуклая функция, GA-выпуклая функция, сумма геометрически выпуклых функций.

1. Определения понятий и иллюстрации. Опираясь на работы [2]–[5], введем сначала необходимые определения понятий GA-выпуклой и геометрически, или GG-выпуклой функций.

Пусть $l \subseteq (0;+\infty)$ – произвольный промежуток числовой прямой *Ox* и $f : l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1. Функцию *f* назовем GA-*выпуклой* на *l*, если для любых точек $a, b \in l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях определения 1 при $a \neq b$ и всех $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то функцию *f* будем называть *строго* GA-*выпуклой* на промежутке *l*.

Определение 2. Функцию *f* назовем *геометрически выпуклой*, или GG-*выпуклой* на промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$, если она в точках данного промежутка принимает положительные значения, и для любых точек $a, b \in l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \leq f^{\lambda}(a) f^{1-\lambda}(b). \tag{3}$$

Если в условиях приведенного определения при $a \neq b$ и всех $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) < f^{\lambda}(a) f^{1-\lambda}(b), \tag{4}$$

то функцию *f* условимся называть *строго геометрически выпуклой* (*строго* GG-*выпуклой*) на *l*.

Очевидно, строго GA-выпуклая функция является GA-выпуклой, а строго геометрически выпуклая функция – геометрически выпуклой.

Аналогично определяются GA-вогнутая и геометрически вогнутая (GG-вогнутая) функции, а также строго GA-вогнутая и строго геометрически вогнутая функции – для этого в соответствующих неравенствах (1)–(4) знак $\leq$ (<) следует поменять на знак $\geq$ (>).

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие сформулированные определения.

На интервале $(0;+\infty)$ как GA-выпуклой, так и GA-вогнутой является функция $f(x) = \alpha + \beta \ln x$, где α и β – вещественные константы, ибо для нее:

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) = \alpha + \beta \ln(a^{\lambda} b^{1-\lambda}) = \alpha + \lambda\beta \ln a + (1-\lambda)\beta \ln b =$$
$$= \lambda(\alpha + \beta \ln a) + (1-\lambda)(\alpha + \beta \ln b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Из последнего следует, в частности, что и функция $f(x) = \ln x$, и функция $f(x) = c$ на всяком промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$ являются GA-выпуклыми и GA-вогнутыми.

Функция $f(x) = x,\ x > 0$ является строго GA-выпуклой. Это следует из весового неравенства Коши для положительных чисел *a* и *b*

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} < \lambda a + (1-\lambda) b,\ a \neq b,\ \lambda \in (0;1),$$

реализующего неравенство (2).

Легко видеть, на интервале $(0;+\infty)$ будет строго GA-выпуклой и функция $f(x) = x + c$, где $c = const$.

Весовое неравенство Коши для двух положительных чисел позволяет просто обосновать также строгую GA-выпуклость функции $f(x) = x^q,\ x > 0$, где *q* – произвольное отличное от нуля действительное число:

$$\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right)^q = \left(a^q\right)^{\lambda} \left(b^q\right)^{1-\lambda} < \lambda a^q + (1-\lambda) b^q,\ a > 0, b > 0, a \neq b;\ \lambda \in (0;1).$$

Нетрудно видеть, что функция $f(x) = -x^2,\ x > 0$ будет строго GA-вогнутой.

Так как для функции $h(x) = \beta x^{\alpha}$ ($\beta > 0, -\infty < \alpha < +\infty, x > 0$) выполняется соотношение $\beta\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right)^{\alpha} = \left(\beta a^{\alpha}\right)^{\lambda} \left(\beta b^{\alpha}\right)^{1-\lambda}$, где *a* и *b* – положительные числа, то данная функция является и геометрически выпуклой, и геометрически вогнутой на интервале $(0;+\infty)$.

Экспонента $y = e^x$ является строго геометрически выпуклой на интервале $(0;+\infty)$ функцией, поскольку для любых различных положительных чисел *a* и *b* и любого $\lambda \in (0;1)$ в силу весового неравенства Коши имеем:

$$\left(e^a\right)^{\lambda} \left(e^b\right)^{1-\lambda} = e^{\lambda a + (1-\lambda) b} > e^{a^{\lambda} b^{1-\lambda}}.$$

Аналогично на интервале $(0;+\infty)$ устанавливается строгая GG-выпуклость любой показательной функции вида $f(x) = \alpha c^{\beta x}$, где $\alpha > 0, \beta > 0, c > 1$.

Функция $g(x) = \log_c x$ ($c > 1$) является строго геометрически вогнутой на интервале $(1;+\infty)$, поскольку для любых различных положительных *a* и *b* и любого $\lambda \in (0;1)$ имеем:

$$g\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) = \log_c\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) = \lambda \log_c a + (1-\lambda) \log_c b > \left(\log_c a\right)^{\lambda} \left(\log_c b\right)^{1-\lambda} = g^{\lambda}(a) \cdot g^{1-\lambda}(b).$$

Аналогично показывается, что функция $\tilde{g}(x) = \log_c x$ ($0<c<1$) строго геометрически вогнута на интервале $(0;1)$.

2. Критерий геометрической выпуклости функции. Установим следующую теорему о необходимых и достаточных условиях геометрической выпуклости функции на промежутке.

Теорема А. Функция *f*, принимающая в точках промежутка $l \subseteq (0;+\infty)$ положительные значения, геометрически выпукла на нем тогда и только тогда, когда для любого действительного числа α функция $x^{\alpha} f(x)$ является GA-выпуклой на рассматриваемом промежутке.

Для установления данной теоремы воспользуемся схемой доказательства теоремы 2 работы [1] о необходимых и достаточных условиях логарифмической выпуклости функции на промежутке.

Доказательство необходимости. Пусть функция *f* геометрически выпукла на *l*. Рассмотрим функцию $g(x) = x^{\alpha} f(x)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Поскольку x^{α} – геометрически выпуклая на интервале $(0;+\infty)$ функция, то функция $g(x)$ также геометрически выпукла на *l*. Последнее означает, что для любых точек *a* и *b* из *l* и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$g\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \leq g^{\lambda}(a) g^{1-\lambda}(b).$$

Но в силу неравенства Коши $g^{\lambda}(a) g^{1-\lambda}(b) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b)$, следовательно,

$$g\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)\leq \lambda g(a)+(1-\lambda)g(b).$$

Последнее означает, что функция g является GA-выпуклой на l. Нужное установлено.

Доказательство достаточности. Предположим, что для любого $\alpha\in\mathbf{R}$ функция $x^{\alpha}f(x)$ является GA-выпуклой на промежутке l. Покажем, что тогда для любых a и b из l и любого числа $\lambda\in[0;1]$ для функции f будет выполняться неравенство (3).

Выберем α таким, чтобы $a^{\alpha}f(a)=b^{\alpha}f(b)$ (это будет значение $\alpha=\log_{\frac{a}{b}}\dfrac{f(b)}{f(a)}$). Для выбранного α в силу GA-выпуклости функции $x^{\alpha}f(x)$ имеем:

$$\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^{\alpha}f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)\leq \lambda a^{\alpha}f(a)+(1-\lambda)b^{\alpha}f(b)=a^{\alpha}f(a)=$$

$$=\left(a^{\alpha}f(a)\right)^{\lambda}\left(a^{\alpha}f(a)\right)^{1-\lambda}=\left(a^{\alpha}f(a)\right)^{\lambda}\left(b^{\alpha}f(b)\right)^{1-\lambda}=\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^{\alpha}f^{\lambda}(a)f^{1-\lambda}(b).$$

Отсюда, очевидно, следует (3). Теорема А полностью доказана.

Замечание 1. Техника доказательства теоремы А позволяет сформулировать аналогичный критерий строгой геометрической выпуклости функции. Справедлива

Теорема А₁. Функция f, принимающая в точках промежутка $l\subseteq(0;+\infty)$ положительные значения, строго геометрически выпукла на нем тогда и только тогда, когда для любого действительного числа α функция $x^{\alpha}f(x)$ является строго GA-выпуклой на рассматриваемом промежутке.

Приведем иллюстрацию сформулированной теоремы. Выше было показано, что функция $y=e^{x}$ является строго геометрически выпуклой на интервале $(0;+\infty)$. Следовательно, в силу теоремы $А_1$ всякая функция вида $x^{\alpha}e^{x}$, где α – действительное число, является строго GA-выпуклой на интервале $(0;+\infty)$.

3. Теорема о сумме геометрически выпуклых функций. Очевидно, сумма GA-выпуклых функций GA-выпукла. Возникает вопрос: справедливо ли такое свойство для GG-выпуклых функций? Ответ не очевиден. Однако установленный критерий геометрической выпуклости функции позволяет легко доказать следующую теорему.

Теорема Б. Если функции f и g геометрически выпуклы на промежутке l числовой прямой, то их сумма также является геометрически выпуклой на этом промежутке.

Доказательство. В силу теоремы А для любого $\alpha\in\mathbf{R}$ функции $x^{\alpha}f(x)$ и $x^{\alpha}g(x)$ являются GA-выпуклыми на промежутке l, следовательно, GA-выпуклой на нем будет и их сумма $x^{\alpha}\cdot(f+g)(x)$. Но тогда по теореме А функция $(f+g)(x)$ – геометрически выпукла на рассматриваемом промежутке. Требуемое установлено.

Замечание 2. Метод доказательства теоремы Б и наличие теоремы $А_1$ позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема Б₁. Если функции f и g геометрически выпуклы на промежутке l числовой прямой, причем хотя бы одна из них – в строгом смысле, то их сумма также является строго геометрически выпуклой на этом промежутке.

В силу теоремы $Б_1$ функция $y=e^{x}+5\cdot 2^{2x}$ является строго геометрически выпуклой на интервале $(0;+\infty)$.

Список литературы

1. *Аносов Д. В.* О сумме логарифмически выпуклых функций // Математическое просвещение. Серия 3. 2001. Вып. 5. С. 158–163.
2. *Kaizhong Guan* GA-convexity and its applications // Analysis Mathematica. 2013. Vol. 39. № 3. Pp. 189–208.
3. *Niculescu C. P.* Convexity according to the geometric mean // Math. Anal. Applics. 2000. Vol. 3. № 2. Pp. 155–167.
4. *Noor M. A. et al.* Geometrically Relative Convex Functions // Math. Inf. Sci. Appl. 2014. 8. № 2. Pp. 607–616.
5. *Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, Xiao-Hui Zhang* The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // Journal of Inequalities and Applications. 2010(4). 11 p. Article ID: 507560. DOI:10.1155/2010/507560.

On the sum of geometrically convex functions

S. I. Kalinin[1], L. V. Pankratova[2]

[1]Doctor of Pedagogical Sciences, professor, professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

[2]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-1242-3807. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Abstract. The paper considers necessary and sufficient conditions for geometric convexity of a function on an interval in terms of GA-convexity. Based on the formulated criterion, it is shown that the sum of two geometrically convex functions is geometrically convex.

Keywords: geometrically convex function, GA-convex function, sum of geometrically convex functions.

References

1. *Anosov D. V. O summe logarifmicheski vypuklyh funkcij* [On the sum of logarithmically convex functions] // *Matematicheskoe prosveshchenie* – Mathematical enlightenment. Series 3. 2001. Is. 5. Pp. 158–163.

2. *Kaizhong Guan* GA-convexity and its applications // Analysis Mathematica. 2013. Vol. 39. No. 3. Pp. 189–208.

3. *Niculescu C. P.* Convexity according to the geometric mean // Math. Anal. Applics. 2000. Vol. 3. No. 2. Pp. 155–167.

4. *Noor M. A. et al.* Geometrically Relative Convex Functions // Math. Inf. Sci. Appl. 2014. 8. No. 2. Pp. 607–616.

5. *Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, Xiao-Hui Zhang* The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // Journal of Inequalities and Applications. 2010(4). 11 p. Article ID: 507560. DOI:10.1155/2010/507560.

УДК 514.853 DOI 10.25730/VSU.0536.22.004

Интегралы уравнений движения в пространстве Лобачевского

Н. Н. Макеев
доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник,
Саратовский научный центр Российской академии наук.
Россия, г. Саратов. ORCID: 0000-0003-2807-977X. E-mail: nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Приведены условия существования дополнительных по Е. Т. Уиттекеру алгебраических первых интегралов системы уравнений движения абсолютно твердого материального объекта в трехмерном пространстве Лобачевского. Принимается, что винты пространства Лобачевского, согласно правилу Котельникова-Штуди, отображаются на комплексные векторы комплексного евклидова пространства. Каждому винту соответствует определенный комплексный вектор с компонентами, линейно зависящими от плюккеровых координат и от величины кривизны пространства Лобачевского. Объект движется под воздействием заданных гироскопических сил, структура которых для выбранного случая задается специальными условиями. Получены в явной форме некоторые частные интегралы, зависящие от одной и от двух фазовых переменных, характеризующие виды движений объекта, а также соответствующие им параметрические ограничения, обусловленные условиями существования частных интегралов.

Ключевые слова: винтовое движение, абсолют, бивектор, винт, неевклидово пространство постоянной кривизны.

Введение. Теория винтов, созданная в 1870-х годах, изложенная в трактате Р. С. Белла [14], явилась аппаратом исследования свойств движения материальных объектов в неевклидовых пространствах. Ее конструктивное построение было логически завершено А. П. Котельниковым в его монографии [3]. Он объединил в единую теорию – проективную теорию векторов – кинематику и динамику материальных объектов, а также разработал теорию векторов в трехмерном проективном пространстве.

П. А. Широков [12] распространил теорию векторного поля на пространства постоянной кривизны, в том числе и на пространство Лобачевского. Движение материального объекта, являющееся классическим аналогом регулярной прецессии в евклидовом пространстве и распространенное на пространство Лобачевского, было исследовано А. П. Широковым [13].

Различные виды движений материальных объектов в пространстве Лобачевского были рассмотрены М. С. Крюковым [4–6]. Свойства многообразия состояний, устойчивость стационарных винтовых движений объекта в пространстве Лобачевского и условия существования линейного первого интеграла его уравнений движения получены в работах [7–10].

1. Предварительные положения. Согласно проективной модели Ф. Клейна [4] пространство Лобачевского (пространство L_3) реализуется внутренними точками абсолюта

$$g_{ij}\, x^{ij} \equiv -\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 + \left(x^4\right)^2 = 0 \tag{1}$$

гиперболического пространства Γ_3. Здесь g_{ij} – метрический тензор псевдовекторного четырехмерного пространства, рассматриваемого как трехмерное проективное пространство P_3, реализующее пространство L_3. Отобразив точки пространства P_3 на точки гиперсферы псевдоевклидова пространства R_4^1, при решении задач в пространстве Γ_3 применяем тензорный аппарат пространства R_4^1.

Под движением пространства Γ_3 понимается проективное линейное преобразование, переводящее в себя абсолют (1). Поскольку между одночленными группами движений в пространстве Γ_3 и специальными линейными комплексами в пространстве P_3 существует взаимно однозначное соответствие, то движение в пространстве Γ_3, как и в пространстве L_3, можно задавать бивектором пространства R_4^1 [6].

Винт в пространстве L_3 определяется непростым бивектором, заданным плюккеровыми координатами внешней и внутренней оси винта.

Рассмотрим свободный от связей абсолютно твердый объект, движущийся в пространстве L_3. Пусть $R^0(e_1^0 \ldots e_4^0)$ – опорный координатный тетраэдр, автополярный относительно абсолюта (1), неизменно связанный с инерциальным конфигурационным пространством L_3. Этот тетраэдр задается точками e_j^0 ($j = 1, \ldots, 4$) данного пространства. С твердым объектом неизменно свяжем координатный тетраэдр инерции $R(e_1,\ldots,e_4)$, заданный точками e_j (j = 1, … , 4) объекта, также автополярный относительно абсолюта (1). При этом тетраэдр R выбирается так, чтобы его вершина – точка e_4 объекта – была собственной, совпадала с центром инерции объекта и чтобы ориентации этих тетраэдров совпадали [4]. Положение тетраэдра R и его точек относительно R^0 задается параметрами положения и ориентации следующим образом [5].

Положение точки e_4 задается двумя линейными и одним угловым параметрами, а ориентация тетраэдра R относительно R^0 определяется заданными углами Эйлера. Таким образом, взаимное положение тетраэдров R^0, R устанавливается упорядоченным набором шести заданных характерных параметров.

Мгновенное состояние объекта в пространстве L_3 задается винтом мгновенной скорости $V^{j4}(v^{j4}, \omega^{j4})$ и винтом мгновенного кинетического момента (винтом импульса) $G^{j4}(B_{j4}v^{j4}, -A_{j4}\omega^{j4})$ (j = 1, 2, 3) твердого объекта. Здесь (v^{j4}, B_{j4}) – компоненты скорости сдвига и моменты инерции сдвига объекта относительно его главных осей инерции, соответственно; (ω^{j4}, A_{j4}) $(j=1,2,3)$ – компоненты скорости вращения и моменты инерции вращения объекта относительно тех же осей, соответственно. Определение моментов инерции объекта в пространстве L_3 здесь принято в форме, приведенной в работе [13].

Для моментов инерции сдвига и вращения объекта имеют место тождественные соотношения связи [13]

$$B_{j4} - A_{j4} = k^2 M \quad (j=1,2,3), \tag{2}$$

где k – радиус кривизны пространства L_3, M – величина массы объекта. При этом равенства (2) имеют место лишь при условиях $B_{j4} \neq A_{j4}$ $(j=1,2,3)$, то есть при очевидном ограничении $k \neq 0$.

2. Уравнения движения твердого объекта. Система уравнений движения объекта, происходящего под воздействием силового винта внешних сил L^{ij} в пространстве L_3, имеет вид [9]

$$\begin{aligned} &B_{14}\dot{v}^{14} + (A_{34}+B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) = k^2 L^{14}, \\ &A_{14}\dot{\omega}^{14} + (B_{34}-B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) = -k^2 L^{23} \end{aligned} \quad (1,2,3). \tag{3}$$

В системе уравнений (3) каждая из двух групп уравнений задана приведенным здесь уравнением-представителем. Остальные уравнения каждой группы следуют из данных при циклической перестановке индексов 1, 2, 3, что здесь и всюду далее обозначается символом (1, 2, 3).

Положим, что движение твердого объекта происходит под действием сил с *гироскопической структурой* (по Томсону и Тэту [15]). Тогда компоненты силового винта L^{ij} для уравнений системы (3) относительно автополярного тетраэдра R можно задать в виде [9]

$$\begin{aligned} &k^2 L^{14} = \lambda^{34}v^{24} - \lambda^{24}v^{34} + \lambda^{31}\omega^{34} - \lambda^{12}\omega^{24} + k^2 m^{14}, \\ &-k^2 L^{23} = \lambda^{31}v^{34} - \lambda^{12}v^{24} + \lambda^{24}\omega^{34} - \lambda^{34}\omega^{24} - k^2 n^{14} \\ &\qquad (1,2,3). \end{aligned} \tag{4}$$

В системе равенств (4) числа λ^{rs}, m^{rs}, n^{rs} (r = 1, 2, 3; s = 1, … , 4; $r \neq s$) – заданные постоянные коэффициенты и характерные постоянные параметры винта внешних сил, соответственно.

Поскольку мощность силового винта, заданного выражениями (4), при всех значениях $m^{rs} = n^{rs} = 0$ тождественно равна нулю, то силы, определяемые этим винтом при данных условиях, являются *гироскопическими*, а параметры λ^{rs} – заданными гироскопическими коэффициентами.

В силу соотношений (4) система динамических уравнений (3) в осях координатного тетраэдра R принимает вид [7]

$$\begin{aligned} &B_{14}\dot{v}^{14} + (A_{34}+B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) + \lambda^{24}v^{34} - \lambda^{34}v^{24} + \lambda^{12}\omega^{24} - \lambda^{31}\omega^{34} = k^2 m^{14}, \\ &A_{14}\dot{\omega}^{14} + (B_{34}-B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) + \lambda^{12}v^{24} - \lambda^{31}v^{34} + \lambda^{34}\omega^{24} - \lambda^{24}\omega^{34} = -k^2 n^{14} \\ &\qquad (1,2,3). \end{aligned} \tag{5}$$

Система уравнений (5), называемая далее *основной динамической системой*, представленная двумя группами уравнений, является многопараметрической системой эволюционного типа, аналитически замкнутой относительно компонент v^{i4}, ω^{i4} (i = 1, 2, 3) при заданных постоянных параметрах m^{rs}, n^{rs}.

Уравнения системы (5) могут быть представлены в компактной форме, если ввести характерные квадратичные формы переменных v^{rs}, ω^{rs} (*кинематические квазипотенциалы*) [9]:

$$f_1 = \frac{1}{2}(A_{34} + B_{24})\left[(v^{34})^2 + (\omega^{34})^2\right] + \lambda^{12} v^{34} + \lambda^{34}\omega^{34},$$

$$g_1 = \frac{1}{2}(B_{34} - B_{24})\left[(v^{24})^2 + (\omega^{24})^2\right] - \lambda^{31} v^{24} - \lambda^{24}\omega^{24} \quad (1, 2, 3).$$

Некоторые частные виды уравнений системы (5) приведены в работе [9]. Эти виды определяют простейшие движения твердого объекта в пространстве L_3. К ним относятся: *собственно сдвиг* (все компоненты $\omega^{rs} = 0$), *собственно вращение* (все компоненты $v^{rs} = 0$), а также *винтовое движение* объекта, существующее при определенных структурно-динамических ограничениях [7]. Винтовое движение в пространстве L_3 в форме регулярной прецессии, совершаемой твердым объектом, имеющим ось кинетической симметрии, вдоль этой оси, подробно исследовано А. П. Широковым [13].

3. Интегралы основной динамической системы. Поставим задачу: *на многообразии инерционных состояний в фазовом пространстве найти структурно-динамические ограничения (постулируемые как возможные), наложенные на параметры системы уравнений* (5), *при которых для данной динамической системы существуют алгебраические первые интегралы объекта, определенные в открытой односвязной области ее пространства состояний.*

Введем квадратичные формы

$$F_1 = \sum_{(1\,2\,3)}[(B_{34}v^{34} + \lambda^{12})^2 - (A_{14}\omega^{14} + \lambda^{14})^2],$$
$$F_2 = \sum_{(1\,2\,3)}(B_{34}v^{34} + \lambda^{12})(A_{34}\omega^{34} + \lambda^{34}), \tag{6}$$
$$F_3 = \sum_{(1\,2\,3)}[B_{34}(v^{34})^2 + A_{14}(\omega^{14})^2],$$

представим в развернутом виде соотношение связи (2)

$$B_{14} - A_{14} = B_{24} - A_{24} = B_{34} - A_{34} = k^2 M. \tag{7}$$

В равенствах (6) символ (123) под знаком суммы обозначает суммирование по величинам, каждая из которых может быть получена из остальных слагаемых циклической перестановкой заданных в них числовых индексов.

Рассмотрим условия, при которых каждая из форм (6) является первым алгебраическим интегралом основной динамической системы (5).

Введем ограничения инерционности состояний объекта, наложенные на параметры винта внешних сил

$$m^{j4} = n^{j4} = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Условия (8) заданы относительно осей связанного тетраэдра и не зависят от текущего положения и ориентации данного твердого объекта. Эти условия соответствуют случаю инерционного состояния этого объекта.

Зададим формально равенства

$$F_1 = h_1, \quad F_2 = h_2, \quad F_3 = h^2, \tag{9}$$

где h_1, h_2, h – произвольные постоянные, а функции F_1, F_2, F_3 определяются равенствами (6). Тогда для соотношений (9) имеют место следующие положения.

Теорема 1. *Если выполняются соотношения связи* (7) *и условия* (8), *то равенства* (9) *являются первыми алгебраическими интегралами динамической системы* (5).

Доказательство. Дифференцируя по t соотношения (6) в силу уравнений данной системы, получаем равенство, тождественно удовлетворяющееся согласно заданным условиям (7), (8).

В равенствах (9) соотношения F_1, F_2 являются алгебраическими первыми интегралами кинетического винта [7] (F_1 – интеграл модуля кинетического винта, F_2 – аналог интеграла Э. Нетер), а F_3 – интеграл типа первого интеграла энергии [1]. Интеграл F_1 является функцией бивектора кинетического винта; интеграл F_2 – функцией бивектора. Величина F_3 сохраняется в силу свойства гироскопичности силового винта, действующего на материальный объект.

Введем квадратичную форму компонент бивектора скорости сдвига

$$F = a_{14}(v^{14})^2 + a_{24}(v^{24})^2 + a_{34}(v^{34})^2, \tag{10}$$

с заданными существенно положительными коэффициентами

$$a_{14} = \frac{B_{14}}{B_{24} + A_{34}}, \quad a_{24} = \frac{B_{24}}{B_{34} + A_{14}}, \quad a_{34} = \frac{B_{34}}{B_{14} + A_{24}}, \tag{11}$$

а также соотношения связи (при $k \neq 0$)

$$B_{14} - A_{34} = B_{24} - A_{14} = B_{34} - A_{24} = k^2 M, \tag{12}$$

родственные приведенным ранее соотношениям (7).

Имеет место следующее интегральное свойство основной динамической системы (5).

Теорема 2. *Если выполняются ограничения* (8), *соотношения связи* (7), (12) *и либо условия*

$$\lambda^{12} = \lambda^{23} = \lambda^{31} = 0, \quad (\lambda^{14}, \lambda^{24}, \lambda^{34}) \neq 0, \tag{13}$$

либо условие, при котором все величины

$$\lambda^{rs} = 0, \tag{14}$$

то равенство

$$F = G \quad (G = \text{const}) \tag{15}$$

является первым алгебраическим интегралом динамической системы (5).

Доказательство этого утверждения проводится аналогично предыдущему в силу уравнений системы (5) с применением соотношений (8), (12)–(14).

Отметим, что алгебраические интегралы (6), (9) для динамической системы (5) приведены в работах [9, 10], но без необходимого обоснования их построения при заданных структурно-динамических условиях. В частном случае, при котором все характерные параметры $\lambda^{rs} = 0$ и выполняются кинетические условия (8), из первых интегралов (9), как частные случаи, следуют соотношения, приведенные в работах [5, 6].

4. Существование дополнительных интегралов динамической системы. Рассмотрим ограниченную задачу о существовании первых интегралов динамической системы (5), дополнительных по Уиттекеру [11] (термин работы [2]) к совокупности интегралов (9), в классе однозначных алгебраических функций C^2 для стационарных (перманентных) состояний твердого объекта.

Решение такого рода задачи гипотетически предполагает существование независимых первых интегралов, каждый из которых определен в соответствующей области фазового пространства. Поскольку каждый из дополнительных интегралов системы уравнений (5), как частный интеграл, может существовать лишь при определенных структурно-динамических условиях, эту задачу следует рассматривать как задачу нахождения элементов интегрального многообразия данной динамической системы в предположении, что это многообразие не является пустым.

Представим возможные искомые интегралы в наиболее общем виде

$$F(v^{14}, v^{24}, v^{34}; \omega^{14}, \omega^{24}, \omega^{34}) = h, \tag{16}$$

где F – алгебраическая функция заданных переменных, h – постоянная интегрирования.

Как известно [11], критериальным условием существования первого интеграла (16) данной системы уравнений является равенство нулю скобки Пуассона (коммутатора) от функции F и гамильтониана данной системы, заданных на симплектическом многообразии [1; 2, с. 84]. Отсюда имеем

$$(\nabla_{\mathbf{V}} F \bullet \dot{\mathbf{V}}) + (\nabla_{\mathbf{\Omega}} F \bullet \dot{\mathbf{\Omega}}) = 0,$$

где обозначены векторы скоростей $\mathbf{V} = \mathbf{V}(v^{14}, v^{24}, v^{34})$, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(\omega^{14}, \omega^{24}, \omega^{34})$.

В развернутом скалярном виде данное равенство представляется так

$$\sum_{i\ j=1}^{3} (p_{i4}\, \dot{v}^{i4} + q_{j4}\, \dot{\omega}^{j4}) = 0. \tag{17}$$

Равенство (17) в силу уравнений системы (5) является тождеством, выполняющемся для любых значений переменных, при определенных структурно-динамических ограничениях, соответствующих случаям существования дополнительных первых интегралов исходной системы уравнений движения.

Рассмотрим вопрос о существовании алгебраических первых интегралов исходной динамической системы (5) при сложном стационарном движении объекта типа "сдвиг-вращение" (когда имеют место тождественные соотношения $(v^{i4}, \omega^{j4}) \neq 0;\ i, j = 1, 2, 3)$, при условиях (8).

5. Дополнительные интегралы с одной переменной. Пусть дополнительный интеграл (16) зависит только от одной независимой переменной и имеет вид[1]

$$F(v^{14}) = \text{const}. \tag{18}$$

Тогда, согласно соотношению (17), имеем равенство, являющееся тождеством по переменным $v^{24}, v^{34}, \omega^{24}, \omega^{34}$ и удовлетворяющееся при условиях

$$m^{14} = 0, \tag{19}$$

$$\lambda^{12} = \lambda^{31} = \lambda^{24} = \lambda^{34} = 0, \tag{20}$$

к которым следует присоединить ограничение

$$\frac{v^{24}}{\omega^{24}} = \frac{v^{34}}{\omega^{34}} = p. \tag{21}$$

Равенство (21) определяет винтовое движение объекта относительно координатной оси 1-4 с параметром винта *p*. В силу этого справедлива следующая

Теорема 3. *Если выполняются условия* (19)–(21), *то для динамической системы* (5) *при зависимости* (18) *имеет место первый интеграл*

$$v^{14} = \text{const}. \tag{22}$$

Аналогичным образом, в случае, при котором интеграл (16) имеет вид[2]

$$F(\omega^{14}) = \text{const}, \tag{23}$$

согласно соотношению (17) получаем равенство, являющееся тождеством по данным переменным, удовлетворяющееся при условии

$$n^{14} = 0 \tag{24}$$

и ограничениях (20), к которым следует присоединить условие структурно-кинетической симметрии

$$B_{24} = B_{34}. \tag{25}$$

Условие (24), как и ограничение (19), является условием инерционности движения объекта – вращения и сдвига, соответственно.

Таким образом, установлена следующая

Теорема 4. *Если выполняются условия* (20), (24), (25), *то для динамической системы* (5) *при зависимости* (23) *имеет место первый интеграл*

$$\omega^{14} = \text{const}. \tag{26}$$

Приведенные соотношения интерпретируются следующим образом: ограничения (19), (24) соответствуют движению твердого объекта по инерции в направлении координатной оси 1-4, а условия (20) отражают отсутствие гироскопического эффекта относительно той же оси.

Интеграл (22) устанавливает стационарное движение – равномерный сдвиг твердого объекта по координатной оси 1-4, а интеграл (26) – его равномерное (перманентное) вращение вокруг этой оси, тогда как система интегралов (22), (26) совместно с кинематическим соотношением (21) определяет винтовое движение данного объекта относительно этой оси. Таким образом, первые интегралы (18), (23) определяют соответствующие равномерные движения твердого объекта, аналитические свойства которых приведены в работе [9].

6. Дополнительные интегралы с двумя переменными. В дальнейшем полагаем, что в общем случае выполняются следующие структурно-кинематические ограничения

$$B_{14} - B_{24} \neq 0, \qquad \frac{v^{14}}{\omega^{14}} - \frac{v^{24}}{\omega^{24}} \neq 0 \qquad (1, 2, 3).$$

Предварительно отметим, что условия для параметров B_{j4}, согласно тождествам (7), (12), эквивалентны ограничениям

$$A_{14} - A_{24} \neq 0 \qquad (1, 2, 3).$$

Первая группа данных условий исключает тривиальный случай, при котором $A_{j4} = A,\ B_{j4} = B \quad (j = 1, 2, 3)$, а вторая группа позволяет исключить из многообразия состояний твердого объекта в фазовом пространстве его возможные винтовые движения, которые могут существовать в общем случае.

---

[1] Равенство (18) здесь дано как представитель совокупности интегралов вида $F(v^{j4}) = \text{const}$.

[2] Равенство (23) здесь представляется как интеграл-представитель совокупности интегралов вида $F(\omega^{j4}) = \text{const}\ (j = 1, 2, 3)$.

Рассмотрим условия существования и виды дополнительных первых интегралов указанного типа для динамической системы (5). Если дополнительный интеграл (16) с двумя независимыми переменными задан в виде

$$F(v^{14}, \omega^{14}) = \mathrm{const}, \tag{27}$$

то, согласно соотношению (17), в результате получаем

$$k_1 v^{24} + k_2 v^{34} + k_3 \omega^{24} + k_4 \omega^{34} = 0, \tag{28}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} k_1 = A_{14} p_{14} c_1 \omega^{34} + B_{14} q_{14} c_2 v^{34} + A_{14} p_{14} \lambda^{34} - B_{14} q_{14} \lambda^{12}, \\ k_2 = B_{14} q_{14} \lambda^{31} - A_{14} p_{14} \lambda^{24}, \\ k_3 = B_{14} q_{14} c_2 \omega^{34} - A_{14} p_{14} c_1 v^{34} - A_{14} p_{14} \lambda^{12} - B_{14} q_{14} \lambda^{34}, \\ k_4 = A_{14} p_{14} \lambda^{31} + B_{14} q_{14} \lambda^{24}. \end{gathered} \tag{29}$$

В равенствах (29) и всюду далее обозначено

$$p_{j4} = \frac{\partial F}{\partial v^{j4}}, \quad q_{j4} = \frac{\partial F}{\partial \omega^{j4}} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$c_1 = A_{34} + B_{24}, \quad c_2 = B_{24} - B_{34},$$

причем $c_2 \neq 0$ согласно принятым ограничениям.

Поскольку величины p_{14}, q_{14} зависят только от переменных v^{14}, ω^{14}, то из соотношений (28), (29) получаем условия, при которых данное равенство выполняется тождественно при произвольных значениях величин v^{i4}, ω^{i4} $(i = 2, 3)$:

$$\begin{gathered} A_{14} p_{14} [\lambda^{34} \;\; \lambda^{12}]^T + B_{14} q_{14} [-\lambda^{12} \;\; \lambda^{34}]^T = 0, \\ A_{14} p_{14} [\lambda^{24} \;\; \lambda^{31}]^T + B_{14} q_{14} [-\lambda^{31} \;\; \lambda^{24}]^T = 0, \\ A_{14} c_1 p_{14} [\omega^{34} \;\; v^{34}]^T + B_{14} c_2 q_{14} [v^{34} \;\; -\omega^{34}]^T = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

Рассматривая парные равенства (30) как системы линейных однородных уравнений по отношению к заведомо ненулевым величинам p_{14}, q_{14}, согласно критерию существования ненулевых решений данных уравнений полагаем их определители равными нулю. В силу этого для систем уравнений (30) получаем определяющие условия, соответственно,

$$\lambda^{12} = \lambda^{34} = 0, \quad \lambda^{24} = \lambda^{31} = 0, \tag{31}$$

$$v^{34} = \omega^{34} \equiv 0. \tag{32}$$

Условия (31) исключают наличие гироскопического эффекта для твердого объекта относительно оси 1-4, а условия (32) позволяют исключить состояние, при котором существуют сдвиг и вращение объекта относительно оси 3-4. В этом случае интеграл вида (27) представляется совокупностью ранее полученных первых интегралов (22), (26), непосредственно следующих из системы уравнений (5) при заданных условиях.

Таким образом, имеет место следующее предложение.

Теорема 5. *Если для системы уравнений* (5), *представленной при условиях* (8), (31), *существует дополнительный независимый первый интеграл вида* (27), *то для состояния* (32) *имеют место частные интегралы* (22), (26).

В случае, при котором дополнительный интеграл (16) задан в виде

$$F(v^{24}, \omega^{24}) = \mathrm{const}, \tag{33}$$

аналогично предыдущему согласно соотношению (17) получаем определяющее равенство

$$l_1 v^{34} + l_2 \omega^{34} + l_3 v^{14} + l_4 \omega^{14} = 0, \tag{34}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} [l_1 \;\; l_2]^T = P_{24} [c_4 \omega^{14} + \lambda^{14} \quad c_4 v^{14} + \lambda^{23}]^T + \\ + Q_{24} [c_3 v^{14} - \lambda^{23} \quad -(c_3 \omega^{14} - \lambda^{14})]^T, \\ [l_3 \;\; l_4]^T = P_{24} [\lambda^{34} \;\; \lambda^{12}]^T + Q_{24} [-\lambda^{12} \;\; \lambda^{34}]^T, \end{gathered} \tag{35}$$

и положено

$$P_{24} = A_{24} p_{24}, \quad Q_{24} = B_{24} q_{24}.$$

В равенствах (35) обозначено

$$c_3 = B_{34} - B_{14}, \quad c_4 = A_{14} + B_{34},$$

причем $c_3 \neq 0$ согласно принятым ограничениям.

Поскольку величины p_{24}, q_{24} зависят только от переменных v^{24}, ω^{24}, то из соотношений (34), (35) получаем условия, при которых равенство (34) выполняется для произвольных значений величин v^{i4}, ω^{i4} $(i = 1, 3)$:

$$l_s(v^{i4}, \omega^{i4}) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, 4). \tag{36}$$

Аналогично предыдущему в силу системы уравнений (36) получаем условия, соответственно,

$$\lambda^{12} = \lambda^{34} = 0, \quad \lambda^{14} = \lambda^{23} = 0, \tag{37}$$

$$v^{14} = \omega^{14} \equiv 0. \tag{38}$$

Согласно уравнениям движения (5) условия (37) устанавливают отсутствие гироскопического эффекта для твердого объекта относительно координатной оси 2-4, а система условий (37), (38) определяет существование первых частных интегралов

$$v^{24}(t) = \text{const}, \quad \omega^{24}(t) = \text{const}. \tag{39}$$

При этом согласно условиям (38) для данных ограничений не имеют места эффекты вращения и сдвига объекта относительно оси 1-4 базового координатного тетраэдра. В этом случае интеграл вида (33) представляется совокупностью интегралов (39).

Таким образом, имеет место следующее положение.

Теорема 6. *Если для системы уравнений* (5), *представленной при условиях* (8), (37), *существует дополнительный первый интеграл вида* (33), *то для состояния* (38) *имеются частные интегралы* (39).

Аналогично предыдущему исследуется вопрос о существовании первого дополнительного интеграла (16), заданного в виде

$$F(v^{34}, \omega^{34}) = \text{const}, \tag{40}$$

однотипного интегралам видов (27), (33).

В силу соотношения (17) получаем определяющее равенство

$$n_1 v^{24} + n_2 \omega^{24} + n_3 v^{14} + n_4 \omega^{14} = 0, \tag{41}$$

где обозначено, аналогично предыдущему,

$$[n_1\ n_2]^T = A_{34} p_{34} [-(c_5 \omega^{14} + \lambda^{14})\ \ c_5 v^{14} + \lambda^{23}]^T + B_{34} q_{34} [c_6 v^{14} + \lambda^{23}\ \ c_6 \omega^{14} + \lambda^{14}]^T,$$

$$[n_3\ n_4]^T = A_{34} p_{34} [\lambda^{24} - \lambda^{31}]^T - B_{34} q_{34} [\lambda^{31}\ \lambda^{24}]^T \tag{42}$$

и положено

$$c_5 = A_{24} + B_{14}, \quad c_6 = B_{14} - B_{24}.$$

При этом $c_6 \neq 0$ в силу ранее принятых условий.

Согласно равенствам (42) в результате получаем условия

$$\lambda^{14} = \lambda^{23} = 0, \quad \lambda^{24} = \lambda^{31} = 0, \tag{43}$$

$$v^{24} = \omega^{24} \equiv 0, \tag{44}$$

при выполнении которых имеют место первые частные интегралы системы уравнений (5)

$$v^{34}(t) = \text{const}, \quad \omega^{34}(t) = \text{const}, \tag{45}$$

являющиеся интегралами сдвига и вращения, соответственно. Равенства (45) определяют указанные стационарные движения твердого объекта относительно оси 3-4 координатного тетраэдра.

Условия (43) и соотношения (44) для интеграла вида (40) однотипны соотношениям, полученным ранее для интегралов видов (27), (33). При этом смысл определяющих соотношений (43), (44) аналогичен истолкованию соответствующих выражений (31), (32), (37), (38), а равенства (45) определяют равномерное винтовое движение твердого объекта, происходящее относительно оси 3-4 координатного тетраэдра в пространстве L_3. Это движение слагается из совокупности его независимых равномерных движений: сдвига и вращения объекта относительно координатной оси 3-4 опорного тетраэдра.

Таким образом, имеет место следующее результирующее положение.

Теорема 7. *Если для системы уравнений* (5), *представленной при условиях* (8), (43), *существует дополнительный первый интеграл вида* (40), *то для состояния* (44) *имеются частные интегралы* (45).

Следует отметить, что в силу структурной симметрии уравнений системы (5) определяющие соотношения, полученные для интегралов вида (27), (33), (40), представленные группами (31), (32), а также (37), (38) и (43), (44), подчиняются правилу циклической перестановки индексов 1, 2, 3 при соответствующих величинах. Это же свойство относится и к виду соотношений, содержащихся в группах равенств (22), (26) и (39), (45).

Заключение. Дополнительный (термин, приведенный в работе [2, с. 84]) алгебраический первый интеграл динамической системы является одним из основных элементов ее интегрального многообразия, позволяющим решать задачи интегрирования системы (в частности, задачи интегрирования по Лиувиллю [1, с. 234]). В качестве примера этому можно указать на факт установления связи между процедурой нахождения дополнительных интегралов и интегрированием гамильтоновой системы уравнений методом Пуанкаре [2, с. 104].

В данной работе показано, что для исходной динамической системы, описывающей динамику твердого объекта в пространстве Лобачевского, при определенных структурно-динамических условиях существуют алгебраические первые дополнительные (частные) интегралы, соответствующие либо винтовому, либо стационарному (перманентному) движению объекта относительно осей координатного тетраэдра (типа “сдвиг” – “вращение”). Эти виды движения имеют место в инерционном режиме его состояния, при котором параметры винта внешних сил тождественно равны нулю. При этом в данном исследовании рассмотрены только некоторые случаи существования дополнительных первых интегралов, зависящих от одной или от двух соответственных (по ν^{j4}, ω^{j4}) переменных. Остальные виды зависимостей для типа первых интегралов, которые могут существовать, подлежат отдельному рассмотрению.

Отметим, что полученные дополнительные первые интегралы являются в определенном смысле условными, существующими лишь при выполнении определенных заданных условий. В частности, стационарные интегралы (22), (26); (39) и (45) имеют место только при выполнении дополнительных условий (32), (38), (44), наложенных на переменные, содержащиеся в зависимостях (27), (33), (40), соответственно.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М. : Наука, 1974. 432 с.
2. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М. : Наука, 1979. 320 с.
3. *Котельников А. П.* Проективная теория векторов. Казань : Типолитография Императорского Университета, 1899. 357 с.
4. *Крюков М. С.* О движении стержня по инерции в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1964. № 4 (41). С. 86–98.
5. *Крюков М. С.* О движении твердого тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 5 (60). С. 34–39.
6. *Крюков М. С*. Движение симметричного тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 6 (61). С. 68–75.
7. *Макеев Н. Н.* Устойчивость перманентных движений гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Геометрия обобщенных пространств и ее приложения : сб. научных трудов. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1981. Вып. 6. С. 58–71.
8. *Макеев Н. Н.* Линейный интеграл движения гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Дифференциально-геометрические структуры и их приложения : сб. научных трудов. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1991. Вып. 10. С. 29–36.
9. *Макеев Н. Н.* Квазитвердое движение прототела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы : сб. научных трудов. Пермь : Пермский ун-т, 2007. Вып. 39. С. 110–130.
10. *Макеев Н. Н.* Движение симметричного твердого тела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы : сб. научных трудов. Пермь : Пермский ун-т, 2010. Вып. 42. С. 46–63.
11. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М., Л. : Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 500 с.
12. *Широков П. А.* Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны // In memoriam N. I. Lobatschevskii. Казань : Главнаука, 1927. Т. 2. С. 119–134.
13. *Широков А. П.* Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Ученые записки Казанского ун-та. 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 196–207.
14. *Bell R. S.* A Treatise on the Theory of the Screws. Harvard, University Press, 1900. 544 p.
15. *Thomson W. and Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. Part I. London : Cambridge University Press, 1879.

Integrals of equations of motion in Lobachevsky space

N. N. Makeev
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, researcher,
Saratov Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.
Russia, Saratov. ORCID: 0000-0003-2807-977X. E-mail: nmakeyev@mail.ru

Abstract. The conditions for the existence of additional algebraic first integrals of the system of equations of motion of an absolutely solid material object in the Lobachevsky three-dimensional space according to E. T. Whittaker are given. It is assumed that the screws of the Lobachevsky space, according to the Kotelnikov-Studi rule, are mapped to complex vectors of a complex Euclidean space. Each screw corresponds to a certain complex vector with components that linearly depend on the Plucker coordinates and on the magnitude of the curvature of the Lobachevsky space. The object moves under the influence of specified gyroscopic forces, the structure of which is set by special conditions for the selected case. Some partial integrals, depending on one and two phase variables, characterizing the types of movements of the object, as well as the corresponding parametric constraints due to the conditions of the existence of partial integrals, are obtained explicitly.

Keywords: helical motion, absolute, bivector, screw, non-Euclidean space of constant curvature.

References

1. *Arnold V. I. Matematicheskie metody klassicheskoj mekhaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. M. Nauka (Science). 1974. 432 p.

2. *Dzhakal'ya G. E. O. Metody teorii vozmushchenij dlya nelinejnyh sistem* [Methods of perturbation theory for nonlinear systems]. M. Nauka (Science). 1979. 320 p.

3. *Kotel'nikov A. P. Proektivnaya teoriya vektorov* [Projective theory of vectors]. Kazan. Typolithography of Imperial University. 1899. 357 p.

4. *Kryukov M. S. O dvizhenii sterzhnya po inercii v prostranstve Lobachevskogo* [On the movement of the rod by inertia in the Lobachevsky space] // *Izvestiya vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1964. No. 4 (41). Pp. 86–98.

5. *Kryukov M. S. O dvizhenii sterzhnya po inercii v prostranstve Lobachevskogo* [On the motion of a solid body in Lobachevsky space] // *Izvestiya vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1967. No. 5 (60). Pp. 34–39.

6. *Kryukov M. S. Dvizhenie simmetrichnogo tela v prostranstve Lobachevskogo* [Motion of a symmetric body in Lobachevsky space] // *Izvestiya vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1967. No. 6 (61). Pp. 68–75.

7. *Makeev N. N. Ustojchivost' permanentnyh dvizhenij girostata v prostranstve Lobachevskogo* [Stability of permanent gyrostat movements in Lobachevsky space] // *Differencial'naya geometriya. Geometriya obobshchennyh prostranstv i ee prilozheniya : sb. nauchnyh trudov* – Differential geometry. Geometry of generalized spaces and its applications : collection of scientific papers. Saratov. Saratov University. 1981. Is. 6. Pp. 58–71.

8. *Makeev N. N. Linejnyj integral dvizheniya girostata v prostranstve Lobachevskogo* [Linear integral of gyrostat motion in Lobachevsky space] // *Differencial'naya geometriya. Differencial'no-geometricheskie struktury i ih prilozheniya : sb. nauchnyh trudov* – Differential geometry. Differential geometric structures and their applications : collection of scientific papers. Saratov. Saratov University. 1991. Is. 10. Pp. 29–36.

9. *Makeev N. N. Kvazitverdoe dvizhenie prototela v prostranstve Lobachevskogo* [Quasi-solid motion of a protothel in Lobachevsky space] // *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy : sb. nauchnyh trudov* – Problems of mechanics and control. Nonlinear dynamical systems : collection of scientific papers. Perm. Perm University. 2007. Is. 39. Pp. 110–130.

10. *Makeev N. N. Dvizhenie simmetrichnogo tverdogo tela v prostranstve Lobachevskogo* [Motion of a symmetric rigid body in Lobachevsky space] // *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy : sb. nauchnyh trudov* – Problems of mechanics and control. Nonlinear dynamical systems : collection of scientific papers. Perm. Perm University. 2010. Is. 42. Pp. 46–63.

11. *Whittaker E. T. Analiticheskaya dinamika* [Analytical dynamics]. M., L. United Scientific and Technical Publishing House of the NKTP of the USSR. 1937. 500 p.

12. *Shirokov P. A. Preobrazovanie vintovyh integralov v prostranstvah postoyannoj krivizny* [Transformation of screw integrals in spaces of constant curvature] // In memoriam N. I. Lobatschevskii. Kazan. Glavnauka. 1927. Vol. 2. Pp. 119–134.

13. *Shirokov A. P. Vintovaya regulyarnaya precessiya v prostranstve Lobachevskogo* [Screw regular precession in Lobachevsky space] // *Uchenye zapiski Kazanskogo un-ta* – Scientific Notes of Kazan University. 1963. Vol. 123. Book 1. Pp. 196–207.

14. *Bell R. S.* A Treatise on the Theory of the Screws. Harvard, University Press, 1900. 544 p.

15. *Thomson W. and Tait P.* Treatise on Natural Phylosophy. Part I. London : Cambridge University Press, 1879.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 37.016:51 DOI 10.25730/VSU.0536.22.005

Практико-ориентированные задачи в методике обучения математике учащихся гуманитарных классов

М. А. Кислякова[1], Е. Захарова[2]
[1]старший преподаватель кафедры МИТ, Тихоокеанский государственный университет.
Россия, г. Хабаровск. E-mail: rabota2486@yandex.ru
[2]студентка 5-го курса, Тихоокеанский государственный университет.
Россия, г. Хабаровск. E-mail: kit1576@mail.ru

Аннотация. В статье описываются результаты исследования практико-ориентированных задач в методике обучения математике учащихся гуманитарных классов. Представлены примеры практико-ориентированных задач по основным содержательно-методическим линиям школьного курса математики старшей школы.

Ключевые слова: методика обучения математике, учащиеся гуманитарных классов, практико-ориентированное обучение математике.

Введение. Профилизация обучения в старшей школе предполагает сокращение учебного материала непрофильных предметов, изучаемых с целью завершения базовой общеобразовательной подготовки учащихся. Так, в классах гуманитарного профиля дается лишь минимальная математическая подготовка, что оправдано целями профильного обучения в старшей школе [6].

В связи с этим перед учителем математики стоит сложная задача реализовать педагогический потенциал математики в развитии личности учащего не только в условиях ограниченного времени, но и учитывая психолого-педагогические особенности учащихся гуманитарных классов [6].

К последним относятся: низкий уровень мотивации к изучению математики в старшей школе, низкий уровень математических знаний и недостаточный уровень развития математических умений, преобладание чувств и эмоций в восприятии учебного материала и т. д.

ФГОС. В соответствии со стандартом среднего (полного) общего образования изучение математики в классах гуманитарного профиля на базовом уровне должно обеспечить:

– сформированность представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;

– сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления;

– сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач;

– сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Предметные результаты изучения предметной области «Математика» включают[1]:

– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

– владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

– владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

[1] В редакции Приказа Минобрнауки России от 29.06.2017 № 613.

– сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

– сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

– владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач [9].

При выборе педагогического подхода, обеспечивающего достижение указанных целей, особое значение приобретает практико-ориентированное обучение математике [2].

Теория практико-ориентированного обучения. Одной из наиболее детально проработанных концепций практико-ориентированного обучения математике в школе является концепция, разработанная М. В. Егуповой. Она так определяет смысл практико-ориентированного обучения математике в школе: это обучение, способствующее формированию умений учащихся математизировать информацию об окружающем мире и получать на основе этого новую информацию. Это умение является одной из характеристик самостоятельно мыслящего, интеллектуально развитого человека [2, с. 55].

Основную характеристику практико-ориентированного обучения математике в школе М. В. Егупова формулирует так: «обучение практическим приложениям математике в школе направлено на формирование у учащихся представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные объекты, а также на развитие умений применять изученные математические понятия, результаты, методы для исследования простейших объектов действительности, решения задач практического характера» [2].

Одним из средств реализации практико-ориентированного обучения является решение практико-ориентированных задач.

Практико-ориентированные задачи – это задачи из окружающей действительности, которые тесно связаны с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни [10].

Целью применения этих задач в методике обучения математике является формирование умений учащихся математически описывать гуманитарные объекты. Практико-ориентированные задачи способствуют обучению учащихся анализу гуманитарного объекта, выделять те характеристики объекта, которые подлежат математическому описанию, выбору математического метода, интерпретации результатов. А также развитию математико-мировоззренческих ориентиров учащихся гуманитарных классов.

Прежде всего, практико-ориентированная задача – это текстовая задача, носящая не только дидактический характер, но и достоверность описываемой ситуации, и доступность ее математического разрешения средствами школьного курса математики [4; 5].

Практико-ориентированные задачи выступают как основа мотивации изучения математики в школе [1; 10].

Система практико-ориентированных задач повышает уровень осознанности в восприятии гуманитарных объектов и возможности их математического описания.

А. Д. Нахман считает, что следует разделять имеющиеся в литературе понятия: задачи практического содержания, задачи прикладного содержания, задачи практико-ориентированные, задачи профессионально-ориентированные, задачи квазипрофессиональные [7].

С его точки зрения, понятие практико-ориентированной задачи – понятие достаточно общее, не предполагающее конкретной практической или прикладной ситуации, а относящееся к целому классу таких ситуаций [7].

В литературе представлено большое разнообразие практико-ориентированных математических задач. По сюжету можно выделить два типа:

– традиционные сюжетно-текстовые математические задачи (на движение, на работу, на проценты, на смеси и сплавы);

– социально-экономические текстовые задачи (на кредиты и вклады, на оптимальный выбор).

По методу исследования математической модели, построенной по условию задачи, можно выделить арифметические, алгебраические, функциональные, геометрические, логические, графовые, табличные, комбинаторные, вероятностные, статистические, игровые и другие методы.

По сложности можно выделить два типа: стандартные, алгоритм решения которых известен, или нестандартные.

Также можно выделить исследовательские и проектные практико-ориентированные задачи.

Критерии отбора практико-ориентированных задач. Для реализации педагогического потенциала математических дисциплин и требований ФГОС предложим следующие критерии отбора практико-ориентированных задач в методике обучения математике в классах гуманитарного профиля [8; 10].

Мотивационный критерий. Задача должна способствовать повышению уровня мотивации к изучению математики.

Критерий доступности. Решения задачи должны быть доступны учащимся гуманитарных классов и включать только те умения, которые сформированы на достаточном уровне.

Критерий практической направленности. Задача должна способствовать формированию практических навыков учащихся.

Критерий универсальности. При решении практико-ориентированных задач используется обобщенный алгоритм решения математических задач.

Этап 1. Анализ текста задачи. На первом этапе необходимо понять, о каком гуманитарном объекте идет речь, выделить все его существенные и несущественные свойства.

Этап 2. Исследование возможностей. На втором этапе учащиеся оценивают возможности математического описания свойств гуманитарного объекта и введения обозначений.

Этап 3. Составление математической модели гуманитарного объекта. На данном этапе устанавливают соответствие между содержательной и математической моделью объекта в зависимости от условий и требований задачи. В некоторых ситуациях подбирают подходящую для данной ситуации математическую модель из уже известных.

Этап 4. Выбор метода исследования математической модели и составление математической задачи.

Этап 5. Составление и осуществление плана решения математической задачи. Осуществление поиска решения математической задачи с использованием учебной и научной математической литературы, с привлечением средств информационных технологий.

Этап 6. Проверка и оценка решения математической задачи.

Этап 7. Получение данных о гуманитарном объекте на основе полученного математического результата. Анализируют использованные математические методы и математическую модель с точки зрения их рациональности для исследования гуманитарного объекта.

Критерий соответствия. Задача должна соответствовать той математической теории, которую учащиеся изучают в рамках школьного курса математики.

Анализ школьной учебно-методической литературы показал, что практико-ориентированных задач недостаточно для учащихся гуманитарных классов.

Приведем несколько примеров практико-ориентированных по основным содержательно-методическим линиям, реализующих педагогический потенциал математических дисциплин в обучении учащихся гуманитарных классов [3; 6].

Задача № 1. В экспериментальной группе 100 человек. Вы проводите опрос на предмет увлечений и хобби. Получены следующие результаты: 35 человек изучают иностранные языки, 42 человека посещают бассейн, 43 человека увлекаются рисованием, 17 человек изучают иностранный язык и посещают бассейн, 15 человек увлекаются рисованием и посещают бассейн, 13 человек изучают иностранный язык и увлекаются рисованием. Верно ли, что все люди имеют хобби?

Методический комментарий: задача наглядно демонстрирует математическое описание ситуации с использованием аппарата теории множеств и позволяет выявить ошибку в рассуждениях.

Задача № 2. В школе кто-то разбил окно. По подозрению в хулиганстве задержали трех учеников: Иванова, Петрова и Сидорова. Один из них был отличником, другой был музыкантом, третий – известным хулиганом. В процессе следствия отличник говорил правду, хулиган лгал, а третий ученик в одном случае говорил правду, в другом – ложь. Вот что они утверждали:

Иванов: «Я совершил это. Петров не виноват».

Петров: «Иванов не виноват. Преступление совершил Сидоров».

Сидоров: «Я не виноват, виновен Иванов».

Определите имя каждого из учеников, и кто из них виноват, если известно, что окно разбил кто-то один.

Методический комментарий: задача наглядно демонстрирует математическое описание ситуации с использованием аппарата математической логики и позволяет дать верный ответ.

Задача № 3. В большой школе необходимо организовать транспортировку детей на мероприятие. Для транспортировки дети разбиваются на группы и по две группы садятся в один автобус. Тех же самых детей можно распределить другим способом, так что в каждой группе будет на пять детей меньше, чем раньше, но тогда в каждом автобусе поместится три группы, а автобусов при этом потребуется на два меньше. Какое наибольшее количество детей можно рассадить указанными способами?

Методический комментарий: задачи такого типа формируют у учащихся важное умение моделировать ситуацию с применением функционального метода и исследовать функцию элементарными методами.

Задача № 4. Начальный капитал небольшой танцевальной студии составляет 150 тыс. рублей. Ежегодно капитал увеличивается на 25 %. Найдите минимальное количество лет, после которых капитал студии превысит 450 тыс. рублей.

Методический комментарий: задачи такого типа формируют у учащихся важное умение моделировать ситуацию с применением степенной функции.

Задача № 5. Вы являетесь владельцем двух фирм в разных городах (например, Вы владеете рекламными агентствами). Фирмы выполняют одинаковый набор услуг, однако в фирме, расположенной во втором городе, используется более совершенное оборудование для печати.

В результате, если сотрудники первой фирмы трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они выполняют t заказов, если сотрудники второй фирмы трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они так же выполняют t заказов.

За каждый час работы Вы платите сотруднику 1000 руб. Необходимо, чтобы за неделю суммарно выполнялось 20 заказов. Какую наименьшую сумму в неделю придется Вам тратить на оплату труда сотрудников?

Методический комментарий: задачи такого типа формируют у учащихся важное умение моделировать ситуацию с применением производной функции.

Задача № 6. Группа из 15 детей ежедневно строится на прогулку по трое. Можно ли организовать прогулки так, чтобы в течение недели ни одна пара детей не была дважды в одной тройке?

Методический комментарий: задачи такого типа формируют у учащихся важное умение моделировать ситуацию с применением аппарата комбинаторики.

Задача № 7. Среди избирателей младше 40 лет 70 % поддерживают кандидата Иванова В. П., а среди людей старше 40 лет, кандидата поддерживают – 60 %. Используя данные переписи, согласно которым доля избирателей младше 40 лет составляет 55 %, оценить вероятность победы на выборах Иванова В. П.

Задача № 8. Всем людям с подозрением на инфекцию делают анализ крови. Если анализ выявляет инфекцию, то результат анализа называется положительным. У больных пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если человек не болен, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5 % людей, поступающих с подозрением на инфекцию, действительно больны. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на инфекцию, будет положительным.

Методический комментарий: задачи такого типа формируют у учащихся важное умение моделировать ситуацию с применением теории вероятностей.

Таким образом, в каждой теме школьного курса математики, пусть и весьма сокращенного, можно найти практико-ориентированные задачи, которые удовлетворяют заявленным критериям и реализуют педагогический потенциал математики [6].

Список литературы

1. *Дербеденева Н. Н., Дорофеев С. Н., Утеева Р. А.* Практико-ориентированные задачи как основа формирования мотивации у школьников к изучению геометрии в основной школе // Гуманитарные науки и образование. 2019. Т. 10. № 4. С. 36–42.

2. *Егупова М. В.* Практико-ориентированное обучение математике в школе : учеб. пособие для студентов педвузов. М. : МПГУ, 2014. 239 с.

3. *Кислякова М. А.* Задачи с практическим содержанием в курсе математики для бакалавров социогуманитарных профилей : мат-лы Всерос. научно-практ. конф. препод. школ и вузов «Управление качеством образования: от проектирования к практике». Ульяновск : УлГПУ им. И. Н. Ульянова, 2018. С. 93–100.

4. *Кислякова М. А., Поличка А. Е.* Разработка практических задач в обучении математическим дисциплинам студентов социогуманитарных профилей // Проблемы современного образования. 2019. № 3. С. 153–161.

5. *Кислякова М. А., Малыхина О. А.* Педагогический потенциал текстовых математических задач в развитии культуры мышления учащихся // Проблемы высшего образования. 2021. № 1. С. 109–119.

6. *Кислякова М. А., Поличка А. Е.* Педагогический потенциал математических дисциплин в подготовке студентов гуманитарных профилей : монография. Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. 240 с.

7. *Нахман А. Д.* Формирование практико-ориентированных умений средствами математики // Saarbrucken: Lambert Academic Publishing. 2016. 130 с.

8. *Поличка А. Е.* Задачное обеспечение самостоятельной работы в овладении учебными дисциплинами // Н. И. Лобачевский и математическое образование в России : мат-лы Международного форума по математическому образованию, 18–22 октября 2017 г. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2017. Т. 1. С. 206–209.

9. Приказ об утверждении ФГОС среднего общего образования от 17.05.2021 № 413. URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/.

10. *Соларева Н. В.* Практико-ориентированные задания как способ повышения мотивации на уроках математики // Актуальные проблемы внедрения ФГОС при обучении математике в основной школе : мат-лы Региональной научно-практической конференции, 01 ноября 2018 г. Пермь : Изд-во Перм. гос. гум.-пед. ун-та, 2019. С. 64–67.

11. *Табачук Н. П.* Информационная компетенция личности как субъекта деятельности // Научно-педагогическое обозрение. Pedagogical Review. Томск, 2017. № 3 (17). С. 40–44.

Practice-oriented tasks in the methodology of teaching mathematics to students of humanities classes

M. A. Kislyakova[1], E. Zakharova[2]

[1]senior lecturer of the MIT Department, Pacific State University. Russia, Khabarovsk. E-mail: rabota2486@yandex.ru

[2]student of the 5th year, Pacific State University. Russia, Khabarovsk. E-mail: kit1576@mail.ru

Abstract. The article describes the results of a study of practice-oriented tasks in the methodology of teaching mathematics to students of humanities classes. Examples of practice-oriented tasks on the main content and methodological lines of the high school mathematics course are presented.

Keywords: methods of teaching mathematics, students of humanities classes, practice-oriented teaching of mathematics.

References

1. *Derbedeneva N. N., Dorofeev S. N., Uteeva R. A. Praktiko-orientirovannye zadachi kak osnova formirovaniya motivacii u shkol'nikov k izucheniyu geometrii v osnovnoj shkole* [Practice-oriented tasks as a basis for the formation of motivation among schoolchildren to study geometry in primary school] // *Gumanitarnye nauki i obrazovanie* – Humanities and Education. 2019. Vol. 10. No. 4. Pp. 36–42.

2. *Egupova M. V. Praktiko-orientirovannoe obuchenie matematike v shkole : ucheb. posobie dlya studentov pedvuzov* [Practice-oriented teaching of mathematics at school : studies. manual for students of pedagogical universities]. M. MPSU. 2014. 239 p.

3. *Kislyakova M. A. Zadachi s prakticheskim soderzhaniem v kurse matematiki dlya bakalavrov sociogumanitarnyh profilej : mat-ly Vseros. nauchno-prakt. konf. prepod. shkol i vuzov "Upravlenie kachestvom obrazovaniya: ot proektirovaniya k praktike"* [Problems with practical content in the course of mathematics for bachelors of socio-humanitarian profiles : materials of al-Russia Scientific and Practical Conference of teachers of schools and universities "Quality management of education: from design to practice". Ulyanovsk : Ulyanovsk State Pedagogical University n. a. I. N. Ulyanov. 2018. Pp. 93–100.

4. *Kislyakova M. A., Polichka A. E. Razrabotka prakticheskih zadach v obuchenii matematicheskim disciplinam studentov sociogumanitarnyh profilej* [Development of practical tasks in teaching mathematical disciplines to students of socio-humanitarian profiles] // *Problemy sovremennogo obrazovaniya* – Problems of modern education. 2019. No. 3. Pp. 153–161.

5. *Kislyakova M. A., Malyhina O. A. Pedagogicheskij potencial tekstovyh matematicheskih zadach v razvitii kul'tury myshleniya uchashchihsya* [Pedagogical potential of textual mathematical problems in the development of students' thinking culture] // *Problemy vysshego obrazovaniya* – Problems of higher education. 2021. No. 1. Pp. 109–119.

6. *Kislyakova M. A., Polichka A. E. Pedagogicheskij potencial matematicheskih disciplin v podgotovke studentov gumanitarnyh profilej : monografiya* [Pedagogical potential of mathematical disciplines in the preparation of students of humanitarian profiles : monograph]. Khabarovsk. Publishing House of the Pacific State University. 2019. 240 p.

7. *Nachman A.D. Formirovanie praktiko-orientirovannyh umenij sredstvami matematiki* [Formation of practice-oriented skills by means of mathematics] // *Saarbrucken: Lambert Academic Publishing* – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing. 2016. 130 p.

8. *Polichka A. E. Zadachnoe obespechenie samostoyatel'noj raboty v ovladenii uchebnymi disciplinami* [Task-based support of independent work in mastering academic disciplines] // N. I. Lobachevsky and mathematical education in Russia : materials of the International Forum on Mathematical Education, October 18–22, 2017. Kazan. Kazan University. 2017. Vol. 1. Pp. 206–209.

9. Order on the approval of the Federal State Educational Standard of Secondary General Education dated 17.05.2021 No. 413. Available at: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo /. (in Russ.)

10. *Solareva N. V. Praktiko-orientirovannye zadaniya kak sposob povysheniya motivacii na urokah matematiki* [Practice-oriented tasks as a way to increase motivation in math lessons] // *Aktual'nye problemy vnedreniya FGOS pri obuchenii matematike v osnovnoj shkole : mat-ly Regional'noj nauchno-prakticheskoj konferencii, 01 noyabrya 2018 g.* – Actual problems of the introduction of the Federal State Educational Standard in teaching mathematics in primary school : materials of the Regional Scientific and Practical Conference, November 01, 2018 Perm. Perm State Humanitarian and Pedagogical University. 2019. Pp. 64–67.

11. *Tabachuk N. P. Informacionnaya kompetenciya lichnosti kak sub'ekta deyatel'nosti* [Information competence of a person as a subject of activity] // *Nauchno-pedagogicheskoe obozrenie. Pedagogical Review* – Scientific and pedagogical review. Pedagogical Review. Tomsk. 2017. No. 3 (17). Pp. 40–44.

УДК 37.016:51.854 DOI 10.25730/VSU.0536.22.006

О разработке методических рекомендаций для учителей математики и информатики по профильному обучению учащихся дискретной математике

Е. А. Перминов

доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры математических и естественно-научных дисциплин,
Российский государственный профессионально-педагогический университет.
Россия, г. Екатеринбург. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

Аннотация. В статье обосновывается актуальность проблемы разработки методических рекомендаций для учителей математики и информатики по профильному обучению дискретной математике в школе. С этой целью анализируется роль дискретной математики в сфере компьютерных наук. Характеризуются основы дискретной математики и их элементы в учебной и популярной литературе по математике и информатике для школы.

Излагаются особенности методики отражения основ дискретной математики в разработке методических рекомендаций, в чем фундаментально значение задачного подхода. При этом перечисляются наиболее важные виды задач. Особое внимание уделяется методике задачного подхода в изучении языка доминирующих в дискретной математике алгебраических и логических структур.

Ключевые слова: школа, обучение математике и информатике, роль дискретной математики, основы дискретной математики, методика профильного обучения.

1. Об актуальности разработки методических рекомендаций. Как известно, в прошлом веке произошло превращение дискретной математики (ДМ), синонимом которой является название конечная, в составную часть магистрального направления современной математики. Не случайно один из основоположников информатики В. М. Глушков указывал, что математика в начале XXI в. «будет в большей мере математика дискретных, а не непрерывных величин», а «расширение области математизации знания ... потребует и будет опираться на развитие новых разделов математики, прежде всего – новых разделов дискретной математики» [11, с. 122]. Причиной продолжающегося интенсивного развития идей и методов дискретной (конечной) математики является то, что «по существу все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного... Мы предпочитаем непрерывную модель лишь потому, что она проще» [18, с. 15]. Именно поэтому в отсутствие компьютеров математические модели были в основном непрерывными, а не дискретными. Анализируя дискретные (логико-алгоритмические) начала деятельности цифрового мира и общества, В. И. Игошин имел все основания заключить: «Знаменами» цифровой эры XXI века являются: дискретность ⇒ алгоритмизм ⇒ конструктивизм» [14, с. 307]. По его мнению, обосновываемому в процитированной статье, именно дискретная математика является основой компетенций цифровой эры. На актуальность в цифровую эпоху изучения основ дискретной математики в школах и вузах указывалось на 13-м Всемирном конгрессе по математическому образованию (ICME-13), проходившем в Гамбурге (Германия) в июле 2016 г.

Как следует из изложенного, обучение ДМ имеет особенно важное значение в обучении математике и информатике в школе и вузе, лежащих в основе отражения в образовании дискретных начал деятельности цифрового мира. Этому обучению препятствует чрезмерное увлечение информационными технологиями (ИТ) в подготовке учащихся, что особенно проявилось в период пандемии Covid-19. Наблюдается не имеющий должной научной базы процесс ускоренного внедрения в образование некоторых ИТ, разработанных подчас далекими от математики и программирования специалистами, гарантирующими быстрый эффект и получающих лавры новаторов без серьезных педагогических исследований. В результате появляется много бесполезной, искаженной и даже ложной информации в содержании обучения (так называемые «информационные шумы»).

Стоит напомнить, что выдающийся ученый в области информатики А. П. Ершов подчеркивал базовую роль дискретной математики в доведении системы «законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах» [13, с. 294]. Как образно выразился Р. Гласс, «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии программного обеспечения…» [10, с. 23]. Поэтому ДМ имеет фундаментальное значение в корректной разработке и внедрении современных информационных технологий, какими являются искусственный интеллект, большие данные (Big Data), виртуальная и дополненная реальность и другое, коренным образом меняющие мир профессий.

Как показывает анализ учебной литературы по математике и информатике для школы, некоторые элементы ДМ уже нашли свое отражение в содержании этих учебников, в частности – элементы комбинаторики и алгебры логики. Но необходимо *не разрозненное, а системное* внедрение элементов ДМ в профильное обучение математике и информатике в школе в условиях большого расширения сферы информатики и, как следствие, формирования компьютерных наук (КН). В связи с этим является актуальной ***проблема*** разработки методических рекомендаций для учителей математики, информатики по профильному обучению дискретной математике в школе. Ее решение особенно важно в обучении элементам ДМ учащихся классов *с углубленным изучением математики и информатики* с целью подготовки к последующему профессиональному образованию в сфере КН.

В разработке этих методических рекомендаций важную роль может играть привлечение авторов посредством соответствующих грантов РГНФ и других открытых конкурсов разного уровня по специальным темам в области фундаментальных проблем образования, в том числе – в сфере разработки методической и учебной литературы.

2. Об элементах ДМ в учебной и популярной литературе для школы. О возможности решения назревшей проблемы разработки методических рекомендаций свидетельствует то, что в настоящее время некоторые важные понятия ДМ внедрены в содержание учебников по информатике в школе. Например, важные понятия алгебры логики и элементов теории алгоритмов изложены в учебниках [15; 16]. Кроме того, многие из них изложены в многочисленной популярной литературе и в литературе для математического просвещения, обзор которой сделан в [25]. Среди них – понятия графа, алгебры логики, булевой функции, математической модели, математического языка и некоторые другие понятия. В противовес этому в учебниках по математике прослеживается традиционный «функциональный» подход, в рамках которого недостаточное внимание уделяется внедрению элементов дискретной математики, особенно важных в овладении основами научных методов познания окружающего мира, что является важной личностной характеристикой выпускника, предусмотренной в ФГОС (полного) общего образования (10–11 кл.), именуемым далее Стандартом. Отметим, что попытки их внедрения в профильное обучение математике уже неоднократно предпринимались и ранее. В частности, элементы математической логики были изложены в учебнике [1], элементы комбинаторики – в учебниках [2; 3].

Все это лишь подтверждает разрозненное, не системно осуществляемое профильное обучение в школе базовым понятиям и методам ДМ, имеющих в современном цифровом мире и обществе общеобразовательное значение. Тем не менее многие изложения многих этих понятий дискретной математики можно обнаружить в содержании литературы для внеклассного чтения по математике, другой популярной литературе по математике для школьников и литературе в области математического просвещения. Достаточно полный обзор элементов ДМ в этой литературе для школьников осуществлен в монографии [25] (см. также литературу из учебника [23]).

Проведенный в [25] обзор литературы по дискретной математике показывает, что уже достаточно полно разработаны основы методики изучения в школе базовых понятий из таких разделов ДМ, какими являются элементы *абстрактной алгебры, математической логики, комбинаторики и некоторых понятий из теории алгоритмов.* Однако анализ указанной литературы показывает, что не разработана методика изучения элементов *алгоритмики и* теории *формальных языков.*

Отметим, что алгоритмика (algorithmics) – научная дисциплина, занимающаяся изучением правильности, сложности и эффективности алгоритмов. Алгоритмика также известна и под другим названием «Анализ алгоритмов».

3. О роли дискретной математики в компьютерных науках. В решении указанной проблемы разработки методических указаний фундаментальное значение имеет анализ роли ДМ в исследованиях компьютерных наук, важный в отражении основ дискретной математики в профильном обучении математике и информатике в школе.

Действительно, в условиях существования уже более 15 тысяч наук [6] стала весьма обширной сфера не только математики, но и информатики. За пределами сферы информатики «остаются области, охваченные компьютеризацией. Например, область инженерного дела» [31]. В связи с этим отметим, что не случайно в работе [33] прослеживается формирование трех значений термина «информатика». По этой причине в цифровую эру наряду с термином «Информатика» постепенно входит в обиход термин «Компьютерные науки (computer science)», давно использующийся в англоязычных странах. Более того, в [22] обосновывается, что переход от названия «Информатика» к названию «Компьютерные науки» – веление времени. При этом существует мнение, что в эпоху компьютерной революции «все науки можно разделить на компьютерные и некомпьютерные (noncomputer science)» [29, с. 120]. В науковедении при разработке классификаций наук был даже введен термин «Информационно-компьютерные науки». При этом «под информационно-компьютерными науками понимались как технические (компьютерные), так и социогуманитарные дисциплины, связанные с информационной деятельностью» [4, с. 4].

Таким образом, такие изменения в терминологии закономерны, поскольку в условиях лавинообразного роста научной информации возникают существенно различающиеся трактовки предметного поля информатики, чем и вызвано возникновение сферы компьютерных наук, связанных с использованием уникальных возможностей современного компьютера. Поэтому вопросы преподавания математики и КН в высшей школе обсуждались на конференциях, посвященных проблемам развития высшего образования в сфере математики и информатики на современном этапе [19; 21].

Формирование компьютерных наук, лежащих в основе использования уникальных возможностей современного компьютера, вызвано тем, что ключевую роль в начавшей научной революции играет математика и феномен компьютера и поэтому эту революцию называют цифровой. Любопытное сравнение роли математики и компьютера привел В. А. Садовничий: «Если за 20 лет (с 1992 по 2012) скорость компьютеров увеличилась примерно в 8 тысяч раз, то за счет развития математических методов скорость расчетов увеличилась более чем в 400 тысяч раз… Но самое лучшее, конечно, это *соединение* прогресса математики и компьютеров» [30, с. 9]. Главную роль в этом на рубеже тысячелетий играют идеи и методы современной ДМ *как основы* использования уникальных возможностей компьютера.

В цифровую эру не зависящие от конъюнктуры и времени универсальные идеи и методы ДМ и формируемые в результате их изучения умения и навыки позволяют использовать уникальные возможности компьютера практически в любой профессиональной деятельности. Об этом свидетельствует и проведенный в [25] анализ функций ДМ в *компьютерных технологиях и системах компьютерной математики*, являющихся компьютерной основой исследований КН. Поэтому за рубежом у специалистов в сфере компьютерных наук вошло в обиход крылатое выражение «Дискретная математика рулит!».

4. О методике отражения основ ДМ в разработке методических рекомендаций. Как следует из проведенного в [25] анализа роли дискретной математики в компьютерных технологиях, системах компьютерной математики, а также учебной литературы по ДМ, в профильном обучении дискретной математике в школе велико значение основ дискретной математики, которые образуют дисциплины *абстрактная алгебра, математическая логика, комбинаторика, теория графов, алгоритмов, автоматов и формальных языков.* Поэтому не случайно базовые понятия и методы ДМ (за исключением комбинаторики) включены в учебное пособие «Фундаментальные основы дискретной математики» [12]. Несмотря на различные подходы в обучении дискретной математике в вузах и порожденное ими разнообразие содержания учебной литературы по ДМ [25], перечисленные дисциплины действительно в совокупности образуют основы дискретной математики.

Важно отметить, что абстрактная алгебра и математическая логика играют *лидирующую роль* в основах ДМ. Действительно, благодаря синтезу идей математической логики и абстрактной алгебры в первой половине прошлого века были заложены основы теории математических моделей и алгоритмов, что ознаменовало начало эпохи всеобщей компьютеризации. Поэтому закономерно, что абстрактная алгебра и математическая логика позднее легли в основу замечательной идеи В. М. Глушкова «представления облика вычислительной системы в виде системы алгебрологических выражений, над которыми можно выполнять ряд преобразований, а также в виде сети алгоритмических модулей» [17, с. 1]. В результате ДМ стала инструментарием «для представления и обработки информации в компьютерах, а также алгебрологических методов решения задач» [там же, с. 2].

Понятия и методы абстрактной алгебры, математической логики и других перечисленных дисциплин из основ дискретной математики буквально пронизывают исследования компьютерных наук. Поэтому эти понятия и методы из основ ДМ имеют важное значение в достижении метапредметных результатов подготовки в школе по математике и информатике в соответствии с требованием Стандарта.

Основы ДМ имеют фундаментальное значение в предусмотренном Стандарте овладения системой базовых знаний, отражающих вклад математики, информатики в формирование современной научной картины мира, важной в профессиональной ориентации обучающихся. Они имеют фундаментальное значение в реализации междисциплинарных связей математики и информатики и других естественно-научных предметов, изучаемых в школе (физики, химии).

В реализации этих связей особенно важен принцип единства в обучении элементам дискретной и непрерывной математики. Это предполагает пропедевтику формирования у школьников первоначальных умений гармоничного сочетания в решении задач дискретных и непрерывных моделей. В основе пропедевтики формирования у школьников таких умений лежат базовые понятия изучаемого в школе курса алгебры и математического анализа и базовые понятия из основ ДМ, ставшие общеобразовательными понятиями в современном цифровом мире и обществе.

Как обосновано в [25], особенно важными базовыми понятиями из основ ДМ являются понятия языка *доминирующих* в дискретной математике алгебраических, порядковых структур и комбинаторных, логических и алгоритмических схем как универсальных междисциплинарных методов, средств научного познания. Этот язык имеет фундаментальное значение умений систематизации того, что известно по интересующей проблеме, ее структуризации, представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего анализа с использованием компьютера.

Как выявлено в [26], базовые понятия этого языка имеют фундаментальное значение в формировании структуры интеллектуальных операций в мышлении, лежащих в основе развития логического, алгоритмического и математического мышления учащихся. Поэтому они лежат в основе корректного обучения моделированию объектов и явлений с использованием компьютера, исключающем возникновение ошибок пропущенной логики рассуждений и ошибок в использовании программного, компьютерного и аппаратного обеспечения моделирования.

Как следует из [25], в отборе содержания профильного обучения ДМ в школе главным ориентиром являются следующие базовые понятия языка доминирующих в дискретной математике структур и схем:

– множество и подмножество, операции с множествами;
– отображения множеств и их основные виды;
– бинарное отношение, основные свойства бинарных отношений;
– алгебраическая операция и алгебра;
– группа, кольцо, поле, решетка;
– математическая модель как множество с заданными на нем операциями и отношениями, изоморфизм (равенство) моделей;
– простое и сложное высказывание, операции над высказываниями;
– логическое тождество, основные тождества алгебры логики;
– предикат и квантор;
– перестановка, сочетание, размещение, бином Ньютона;
– простой, неориентированный, ориентированный, эйлеров, гамильтонов, связный граф и дерево;
– алгоритм с конечным и бесконечным числом действий исполнителя;
– полиномиальный, экспоненциальный и эффективный алгоритмы;
– математический язык;
– понятие алгоритмической разрешимости на выбранном математическом языке.

В цифровом мире и обществе многие из понятий из этого списка приобрели уже статус общеобразовательных понятий математики и информатики, важных в овладении математической терминологией компьютерных наук, особенно искусственного интеллекта, радикальным образом меняющего мир профессий. Поэтому они имеют фундаментальное значение в отборе *инвариантного* содержания обучения ДМ в зависимости от профиля обучения, что важно учесть в решении поставленной ***проблемы*** разработки методических рекомендаций.

Отметим, что методика изучения этих понятий (за исключением предиката и квантора) изложена в учебных пособиях [23; 24]. Основным в методике их изучения является задачный подход с использованием занимательных задач, задач с сюжетным текстом и нестандартных задач, что также играет важную роль в решении поставленной проблемы.

5. О реализации задачного подхода в разработке методических рекомендаций. Задачный подход имеет фундаментальное значение в формировании навыков математической познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности школьников, что является еще одной основной целью Стандарта.

Для развития навыков этих видов деятельности в методических рекомендациях по внедрению элементов ДМ должна быть предусмотрена соответствующая структура задач. В учебном пособии для профильного обучения ДМ в школе [23] включены, в частности, задачи следующих видов.

1*) Задачи с неверно составленным условием.*
2) Задачи с ненайденным решением.
3) Задачи, для которых не существует алгоритм решения.
4) Задачи с бесконечным числом действий алгоритма.
5) Задачи с конечным числом действий алгоритма.
6) Задачи на составление эффективного алгоритма.

В обучении постановке и решению этих задач видов 1–6 в старших классах наряду со знаниями из ДМ используются знания, полученные ими в математике, информатике, физике и в других естественнонаучных предметах.

7) Задачи на изучение доступных для восприятия понятий языка алгебраических и логических структур.

Как уже было отмечено ранее, язык абстрактной алгебры и математической логики играет лидирующую роль в основах ДМ. Вследствие этого доступные для восприятия школьников и наглядные понятия языка этих научных дисциплин занимают особенно важное место в реализации задачного подхода в профильном обучении ДМ. Поэтому в структуре задач и предусмотрены задачи из п. 8. Благодаря обучению решениям этих задач можно уйти от изучения довлеющих рекомендаций «работать с установившимся инструктивным материалом» [20, с. 13]. Например, довлеют рекомендации с установившимся инструктивным материалом по выполнению привычных операций на множестве действительных чисел и «инструкции» по тождественному преобразованию алгебраических выражений из школьного курса алгебры.

8) Исследовательские задачи, решаемые на основе наглядных понятий из элементов теории графов, решеток и групп симметрий графов и решеток.

Обучение решению задач из п. 8 имеет важное значение во внеурочной познавательной деятельности учащихся, особенно учащихся классов с углубленным изучением математики и информатики. Эти задачи играют важную роль в подготовке будущих математиков и специалистов в области КН.

Охарактеризуем основные особенности методики задачного подхода в обучении решению задач видов 7–8 на конкретных характерных примерах задач, приводимых далее в пп. 6–8.

6. Решение задач в пятиэлементном поле. Начинать обучение решению задач из п. 7 на доступные для восприятия школьников понятия языка алгебраических структур целесообразно с решения задач в пятиэлементном поле, что и сделано в учебном пособии [23]. Причиной этому является то, что пятиэлементное поле можно назвать «новой арифметикой». Как будет показано, это название оправданно потому, что законы этого поля почти не отличаются от законов арифметики и более того – от законов обычной алгебры, изучаемой в школе.

Подготовка к решению задач этой «*новой арифметики*» начинается с рассмотрения вращений правильного пятиугольника вокруг центра против часовой стрелки, являющихся совмещениями его вершин. Будем считать совпадающими всякие два вращения, отличающиеся друг от друга на число, кратное 360^0. Поэтому будем иметь всего пять вращений, отличающихся друг от друга положением вершин пятиугольника. Это повороты 0^0, 72^0, 144^0, 216^0 и 288^0.

Последовательное выполнение двух поворотов кратко названо сложением поворотов. Для дальнейшего изучения операций в пятиэлементном поле вводятся более удобные обозначения $0^0 = \hat{0}$, $72^0 = \hat{1}$, $144^0 = 2$, $216^0 = \hat{3}$, $288^0 = 4$. Знак угла над цифрой позволяет отличать повороты от чисел 0, 1, 2, 3 и 4. Тогда например, равенство $72^0 + 144^0 = 216^0$ перепишется кратко в привычном виде $\hat{1} + 2 = \hat{3}$.

Операция последовательного выполнения двух поворотов или кратко – сложения поворотов из множества $A = \{\hat{0}, \hat{1}, 2, \hat{3}, 4\}$ записывается очевидным образом в виде таблицы 1.

Умножение элементов множества A выполняется в соответствии с таблицей 2.

Используя эти таблицы, учащимся легко объяснить составление таблиц для операций вычитания и деления как операций, обратных для введенных операций сложения и умножения (как это делается в школе для аналогичных операций с числами).

Таблица 1

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Таблица 2

×	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Заметим, что аналогичным образом можно было бы определить и n-элементное поле для любого простого натурального числа n. Например, в соответствии с принципом наглядности определение семиэлементного поля начать с рассмотрения аналогичных вращений правильного восьмиугольника, являющихся совмещениями его вершин. При этом для обучения учащихся составлению и запоминанию таблиц Кэли сложения и умножения элементов этого поля целесообразно далее определять его как кольцо классов вычетов по модулю 7.

Как доказывается в процессе решения в «*новой арифметике*» аналогов простых задач из школьной алгебры, такое название этого пятиэлементного поля полностью оправдано тем, что для новых операций сложения, вычитания, умножения и деления в этом поле справедливы все законы школьной арифметики. Более того, оказывается, что справедливы и формулы сокращенного умножения и свойства степеней. Особенно удивляет школьников то, что в этой арифметике нет отрицательных чисел и дробей, вызывающих у них большие затруднения в действиях с ними. Поэтому «новую арифметику» выучить гораздо легче, чем школьную арифметику.

Приведем наиболее характерные примеры задач этой «арифметики» разного уровня сложности.

1) Вычислить:

а) $\hat{3}+\hat{4}$; б) $\hat{3}-\hat{4}$; в) $\dfrac{\hat{3}}{\hat{4}}$; г) $\dfrac{\hat{3}}{\hat{4}}(\hat{2}+\hat{4})$.

2) Решить уравнения:

а) $\hat{3}x-\hat{4}=\hat{2}$; б) $\dfrac{x-\hat{3}}{\hat{4}}=\hat{2}$; в) $\dfrac{x}{\hat{2}}+\dfrac{x}{\hat{3}}=\hat{1}$;

г) $x^2-2x+\hat{4}^2=\hat{0}$, где $2x=x+x$; д) $x^2-\hat{2}x=\hat{0}$; е) $(x-\hat{4})(x^2+\hat{4}x+\hat{1})=\hat{0}$;

ж) $x^6=\hat{4}x$.

Задачи на доказательство тождеств для элементов «новой арифметики» из множества $A=\{\hat{0}, \hat{1}, 2, \hat{3}, 4\}$:

3) Доказать, что для любого элемента $a\neq\hat{0}$ существует такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1}=a^{-1}a=\hat{1}$. При этом элемент a^{-1} обозначается также $\dfrac{1}{a}$, элемент ab^{-1} – далее через $\dfrac{a}{b}$.

4) Доказать, что из $a=b$ при любом $c\neq\hat{0}$ следует $ac=bc$ и $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$.

5) Доказать формулы сокращенного умножения:

а) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (где $2a=a+a$); б) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

в) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; г) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

д) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

6) Доказать свойства степеней:

а) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; б) $(a^m)^n=a^{mn}$; в) $a^nb^n=(ab)^n$; г*) $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$;

д) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ ($n,m\in N$); е) $a^4=\hat{1}$ при $a\neq\hat{0}$.

7) Упростить выражения:

а) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}-b$; б) $\dfrac{\hat{2}(a^3+\hat{2})}{a^2-\hat{3}a+\hat{4}}-\hat{2}a$; в) $\left(\dfrac{a^4}{b^2}\right)^2\cdot b$.

8) Составить алгоритм решения уравнений «новой арифметики», являющихся аналогами уравнений из курса школьной алгебры:

а) $a\cdot x=b$ с параметрами a и b;

б) $x^2+px+q=\hat{0}$ с параметрами p и q.

Указание. Доказать формулу $x=\hat{2}p\pm\sqrt{\hat{4}p^2-q}$ нахождения корней этого уравнения.

Здесь целесообразно напомнить о задачах вида 3, *для которых не существует алгоритм решения.* При этом сообщить, что не существует алгоритма нахождения корней произвольного многочлена степени выше 4 на множестве действительных чисел. В то же время, как следует из тождества $a^4=\hat{1}$ при $a\neq\hat{0}$, для многочленов в пятиэлементном поле такой алгоритм существует.

7. Задачи на понятия алгебры логики. Начинать обучение решению задач из п. 7 на доступные для восприятия школьников понятия языка логических структур целесообразно с решения задач алгебры логики. Как показывает проведенный в [25] анализ учебной и популярной литературы, методика обучения решению задач алгебры логики и их основные виды уже достаточно полно изложена в этой литературе. В то же время в этой литературе отсутствуют задачи на ряд способов доказательства логических тождеств, являющихся аналогами способов доказательств тождеств школьной алгебры, а также задачи на решение логических уравнений.

В [23] изложены следующие способы доказательства тождеств алгебры логики:

1) составление таблицы истинности высказываний для левой и правой части тождества;

2) тождественное преобразование левой или правой части, или обеих частей логического равенства одновременно на основе тождеств из предыдущего параграфа;

3) способ подстановки;

4) прибавление к обеим частям логического равенства одного и того же выражения;

5) умножение обеих частей логического равенства на одно и то же выражение, не являющееся тождественно ложным;

6) взятие логического следования $(C \Rightarrow A) \equiv (C \Rightarrow B)$ или $(A \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow C)$ от обеих частей логического равенства $A \equiv B$;

7) взятие отрицания ($\overline{A} \equiv \overline{B}$);

8) способ почленного сложения или умножения логических равенств.

В учебном пособии [23] приведено немало примеров доказательства тождеств первым способом, и в нем приведены упражнения на обучение другим перечисленным способам доказательств. При этом для обеспечения доступности обучения перед объяснением каждого способа из пп. 2–5 приводятся упражнения на аналогичный способ доказательства тождества из школьной алгебры.

Приведем два примера задач из [23] на решение логических уравнений, являющихся аналогами уравнений из курса школьной алгебры:

а) Решить уравнение $A \bullet X \equiv B$, где $A, B \in \{И, Л\}$;

б) $AX^2 + BX + C \equiv Л$, где $A, B, C \in \{И, Л\}$.

Примечание. Знаки + и • являются более привычными для школьников обозначениями операций дизъюнкции и конъюнкции.

8. *Исследовательские задачи (вида 8) на графы, решетки и группы симметрий.* Важную роль в формировании навыков математической познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности на основе ДМ в соответствии с требованиями Стандарта играет обучение решению исследовательских задач на наглядные понятия ДМ, например, классического графа и решетки, группы симметрий (автоморфизмов) графа и решетки. При этом отметим, что в отличие от графа, наглядное понятие решетки очень редко изучалось на факультативных курсах в школе. Для изучения этого понятия школьниками можно рекомендовать популярные книги [7; 32].

Как известно, понятие симметрии объектов в науке и природе является фундаментальным научным понятием, возникшим еще в древности в архитектуре и искусстве. В школе понятие симметрии изучалось на основе задач нахождения групп различных преобразований геометрических фигур и тел из школьного курса геометрии. Приводимые далее некоторые исследовательские задачи из статьи [27] дополняют эти задачи школьного курса геометрии.

В решении этих задач важную роль играют понятия *равных* (изоморфных) *конечных* графов и решеток. При этом определение равных графов или решеток посредством биекции, сохраняющей инцидентность вершин графа или точные нижние и верхние грани двух элементов решетки, является непривычным и поэтому трудным для восприятия школьников (как и сам термин «изоморфизм»). Поэтому изоморфизм графов и решеток определяется следующим образом.

Рассмотрим произвольный граф с n вершинами. Занумеруем его вершины числами от 1 до n. Ребро графа, соединяющие вершины i и j, обозначим (i, j) в случае $i < j$. Если же $j < i$, то обозначим ребро (j,i). Тогда каждому ребру (i, j) графа будет соответствовать точка (i, j) на координатной плоскости Oxy. Далее приводятся примеры такой нумерации вершин графов и изображения ребер графа в виде точек на плоскости. Делается вывод, что с помощью этих точек можно записать всю информацию о ребрах: число ребер и то, какие вершины соединяет каждое ребро. Затем дается следующее определение из [23].

Графы $Г$ и G с одинаковым числом вершин называются *равными*, если вершины каждого графа можно занумеровать так, чтобы ребрам $Г$ и ребрам G соответствовало одно и то же множество точек на координатной плоскости.

В определении *равных* решеток используется отношения покрытия. Говорят, что «элемент a покрывает элемент b, если $a > b$ и не существует такого x, что $a > x > b$».

Решетки A и B с одинаковым числом элементов называются *равными*, если элементы каждой решетки можно обозначить одним и тем же множеством символов так, чтобы решетки A и B оказались заданными одним и тем же бинарным отношением покрытия. При этом определение иллюстрируется примерами диаграмм 4, 5, 6-элементных решеток, элементы которых обозначаются латинскими буквами.

Конечно, надо еще выяснить, заменяет ли это определение точное определение изоморфизма *конечных* решеток через точную нижнюю и верхнюю грани двух элементов решетки. Но для решеток с малым числом элементов им можно воспользоваться для упрощения их описания посредством диаграмм (и учета в них числа атомов, коатомов и максимальных цепей).

Примеры исследовательских задач из [27].

1) Для любой симметрической группы S_n найти $n+1$-вершинное дерево D, для которого $S_n \cong AutD$, где через $AutD$ обозначена группа автоморфизмов D.

2) Найти все -вершинные эйлеровы графы для $n \leq 6$ с группой автоморфизмов четвертого порядка.

3) Может ли циклическая группа быть группой автоморфизмов гамильтонового графа с 6 вершинами?

4) Указать последовательно диаграммы всех 73 семиэлементных решеток.

5) Найти все семиэлементные решетки с симметрической группой автоморфизмов.

6) Найти решетку, группа симметрий которой изоморфна группе симметрий тетраэдра.

В монографии [8, с. 35] поставлена нерешенная проблема:

«Найти все конечные решетки, для которых каждый автоморфизм соответствующего им графа являлся бы решеточным автоморфизмом (Уотермен)».

Задача 7. Найти все – элементные решетки для $n \leq 7$ с указанным свойством их автоморфизмов.

Важно отметить, что в [27] даются *подробные указания* для решения предложенных задач.

Отметим, что ряд исследовательских задач для школьников на элементы теории решеток можно выбрать среди задач практикума [9].

9. *Об исследовательских задачах на обучение дискретизации непрерывных математических моделей.* Эти задачи важны в реализации отмеченного ранее принципа единства в обучении элементам дискретной и непрерывной математики. Как подчеркивал В. И. Арнольд в третьем издании своей книги «Теория катастроф», «математическое описание мира основано на тонкой игре непрерывного и дискретного» [5, с. 4]. По-видимому, впервые такую игру начал Архимед в своей знаменитой дискретизации графика непрерывной функции – параболы для нахождения площади сегмента параболы. С появлением уникальных возможностей современных компьютеров возможности этой тонкой игры несравнимо увеличились, что можно обнаружить, например, при исследовании фундаментальных научных понятий хаоса, порядка и фрактала в вузах.

Начало обучения этой тонкой игре в школьном курсе математики закладывается при изучении элементов математического анализа. Например – при построении графика непрерывной функции, в основе которого фактически лежит дискретизация ее графика, то есть определение тех важных его точек, которые раскрывают главные свойства функции (иметь минимум, максимум, точки перегиба, наибольшее и наименьшее значение на отрезке и так далее). Но в обучении такой тонкой игре в школе важны и понятия дискретной математики. Например – изображение в координатной плоскости «графика» булевой функции одной переменной $Y = f(X)$, где $X, Y \in \{0,1\}$. При этом логические символы $0,1$ отождествляются с нулем и единицей. Точно так же можно изобразить точками в системе координат $Oxyz$ точки пространственного «графика» булевой функции двух переменных $Z = f(X,Y)$.

В обучении такой тонкой игре важную роль играет теория решеток, на основе которой наиболее полно с общенаучной точки зрения раскрывается суть важного понятия порядка на сложных системах, как антипода понятию хаоса. Поэтому в решении исследовательских задач на изучение элементов теории решеток можно предложить школьникам задачи на построение решеточных фракталов. Одна из таких исследовательских задач предложена в [28]. Это задача на построение аналога геометрического фрактала. А именно – решетки, являющейся «решеточным» фракталом, наглядно демонстрирующим суть понятия фрактала на основе подобия части целому. Эта решетка появляется постепенно в серии итераций в построении диаграмм решеток-предфракталов и наглядно предстает окончательно в виде черного квадрата Малевича, повернутого на 45^o.

В заключение подчеркнем, что в формировании умений и навыков познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности на основе задачного подхода целесообразно предусмотреть лабораторные работы по ДМ. Использование заранее подготовленных электронных учебных материалов, созданных в среде систем компьютерной математики для выполнения лабораторных работ способствует актуализации внутрипредметных связей и межпредметных связей математики и информатики. Например, для изучения различных видов конечных графов и их свойств можно рекомендовать систему Maxima с ее специализированным пакетом graphs, в том числе – для проверки результатов, полученных «вручную». Для изучения различных видов конечных решеток и свойств их элементов можно рекомендовать языки программирования Delphi и Python.

Список литературы

1. Алгебра и начала анализа. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений : в 2 ч. Ч. 1. / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузенцова, Е. А. Седова. М. : Дрофа, 2003. 320 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко. Изд. 2-е. М. : Просвещение, 2010. 336 с.

3. Алгебра и математический анализ. 11 кл. : учеб. пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. Изд. 7-е. М. : Мнемозина, 2000. 288 с.

4. *Антопольский А. Б.* О представлении информационно-компьютерных наук в различных классификационных системах : доклад на семинаре ИПИ РАН и ИНИОН РАН «Методологические проблемы наук об информации», 26 мая 2016 г., Москва. URL: inion.ru›site/assets…antopolsky_a…presentation.ppt (дата обращения: 17.11.2021).

5. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. Изд. 3-е, доп. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1990. 128 с.

6. *Бармин А. В.* К проблеме классификации науки. История науки и техники в системе современных знаний : мат-лы научной конференции, посвященной 10-летию кафедры истории науки и техники УГТУ–УПИ, Екатеринбург, 14 декабря 2009 г. С. 41–46.

7. *Беран Л.* Упорядоченные множества и решетки: пер. с чешского. Москва : Наука, 1981. 64 с.

8. *Биркгоф Г.* Теория решеток: пер. с англ. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1984. 568 с.

9. *Вечтомов Е. М.* Практикум по теории упорядоченных множеств и решеток / Advanced science. 2018. № 3. С. 4–17.

10. *Гласс Р.* Факты и заблуждения профессионального программирования: пер. с английского. Санкт-Петербург : Символ-Плюс, 2007. 240 с.

11. *Глушков В. М.* Кибернетика. Вопросы теории и практики. М. : Наука, 1986. 888 с.

12. *Горбатов В. А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М. : Наука. Физматлит, 2000. 544 с.

13. *Ершов А. П.* Избранные труды. Новосибирск : Наука: Сиб. изд. фирма, 1994. 413 с.

14. *Игошин В. И.* «Дискретная математика – основа компетенций цифровой эры» : мат-лы XXXIX Междун. научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Москва : МГПУ, 2020. 396 с.

15. Информатика. 10 кл. : учебник / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2016. 288 с.

16. Информатика. 11 кл. Базовый уровень : учебник / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2016. 256 с.

17. *Капитонова Ю. В.* Лекции по дискретной математике / Ю. В. Капитонова, С. Л. Кривой, А. А. Летичевский, Г. М. Луцкий. СПб. : БХВ-Петербург, 2004. 624 с.

18. *Колмогоров А. Н.* Научные основы школьного курса математики. Первая лекция // Математика в школе. 1969. № 3. С. 12–18.

19. «Математика и компьютерные науки в образовании» : VI конференция-семинар для учителей математики и информатики, посвященная памяти Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 2021. URL: mathschool. imm.uran.ru (дата обращения: 19.10.2021).

20. *Красовский Н. Н.* Математическое моделирование в школе. Екатеринбург : Известия УрГУ, 1995. № 4. С. 12–24.

21. «Преподавание математики и компьютерных наук в высшей школе» : мат-лы Междун. научно-методич. конф. Пермь : Изд-во Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2017. 104 с.

22. *Одинец В. П.* Появление названия «Компьютерные науки» – веление времени / Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 58–68.

23. *Перминов Е. А.* Дискретная математика : учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург : ИРРО, 2004. 206 с.

24. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений : учебное пособие. Екатеринбург : Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2015. 256 с.

25. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования : монография. Екатеринбург : Изд-во РГППУ, 2013. 286 с.

26. *Перминов Е. А.* О психологических аспектах реализации дискретной линии в модернизации математического образования // Инновации в образовании. 2014. № 10. С. 140–150.

27. *Перминов Е. А.* О профильном обучении школьников решению исследовательских задач на группы симметрий графов и решеток : мат-лы III Международной научно-практической конференции «Задачи в обучении математике, физике и информатике в условиях цифровой трансформации», посвященной 130-летию П. А. Ларичева. Вологда : ВоГУ, 2022. С. 135–139.

28. *Перминов Е. А.* О роли дискретной математики в изучении понятий хаоса, порядка и фрактала в вузах : мат-лы XVI Колмогоровских чтений: III международной научно-методической конференции «Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А. Н. Колмогорова». Кострома : КГУ, 2021. С. 37–42.

29. *Пройдаков Э. М.* Древо компьютерных наук // Науковедческие исследования : сб. научных трудов РАН. ИНИОН. Центр научн.-информ. исслед. по науке, образованию и технологиям. М., 2012. 254 с.

30. *Садовничий В. А.* Большие данные в современном мире. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017. 28 с.

31. *Серебрякова Н. Г.* Анализ цикла дисциплин «Компьютерные науки» в инженерном образовании // Вышэйшая школа. 2020. № 4. С. 42–43.

32. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. М. : Мир, 1979. 260 с.

33. *Черный Ю. Ю.* Полисемия в науке: когда она вредна? (на примере информатики) // Открытое образование. 2010. № 6. С. 97–107.

On the development of methodological recommendations for teachers of mathematics and computer science on specialized teaching of discrete mathematics to students

E. A. Perminov

Doctor of Pedagogical Sciences, associate professor, professor of the Department of Mathematical and Natural Sciences, Russian State Vocational Pedagogical University.

Russia, Yekaterinburg. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

Abstract. The article substantiates the relevance of the problem of developing methodological recommendations for teachers of mathematics and computer science for specialized teaching of discrete mathematics at school. To this end, the role of discrete mathematics in the field of computer science is analyzed. The fundamentals of discrete mathematics and their elements in the educational and popular literature on mathematics and computer science for schools are characterized.

The features of the methodology for reflecting the foundations of discrete mathematics in the development of methodological recommendations are described, which is the fundamental importance of the problem approach. At the same time, the most important types of tasks are listed. Special attention is paid to the methodology of the problem approach in the study of the language of algebraic and logical structures dominating in discrete mathematics.

Keywords: school, teaching mathematics and computer science, the role of discrete mathematics, the basics of discrete mathematics, the methodology of specialized education.

References

1. *Algebra i nachala analiza. 10 kl. : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdenij : v 2 ch. Ch. 1.* – Algebra and the beginning of analysis. 10 grade : textbook for general education institutions : in 2 pts. Pt. 1. / G. V. Dorofeev, L. V. Kuzentsova, E. A. Sedova. M. Drofa (Bustard). 2003. 320 p.

2. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 kl. : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdenij: bazovyj i profil. urovni* – Algebra and the beginning of mathematical analysis. 11 grade : textbook for general education institutions: basic and profile levels / Y. M. Kolyagin, M. V. Tkacheva, N. E. Fedorova, M. I. Shabunin; ed. by A. B. Zhizhchenko. Publ. 2nd. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 2010. 336 p.

3. *Algebra i matematicheskij analiz. 11 kl. : ucheb. posobie dlya cl. s uglubl. izuch. matematiki* – Algebra and mathematical analysis. 11 grade : trxtbook for schools and classes with an advanced course of mathematics / N. Ya. Vilenkin, O. S. Ivashev-Musatov, S. I. Schwarzburd. Publ. 7th. M. Mnemosyne. 2000. 288 p.

4. *Antopol'skij A. B. O predstavlenii informacionno-komp'yuternyh nauk v razlichnyh klassifikacionnyh sistemah : doklad na seminare IPI RAN i INION RAN "Metodologicheskie problemy nauk ob informacii", 26 maya 2016 g., Moskva* [On the representation of information and computer sciences in various classification systems : a report at the seminar of IPI RAS and INION RAS "Methodological problems of information sciences", May 26, 2016, Moscow]. Available at: inion.ru "site/assets...antopolsky_a...presentation.ppt (date accessed: 17.11.2021).

5. *Arnol'd V. I. Teoriya katastrof. Izd. 3-e, dop.* [Theory of catastrophes. 3rd edition, supplement] / V. I. Arnold. M. Nauka (Science). Gl. ed. phys.-mat. lit, 1990. 128 p.

6. *Barmin A. V. K probleme klassifikacii nauki. Istoriya nauki i tekhniki v sisteme sovremennyh znanij : mat-ly nauchnoj konferencii, posvyashchennoj 10-letiyu kafedry istorii nauki i tekhniki UGTU–UPI, Ekaterinburg, 14 dekabrya 2009 g.* [On the problem of classification of science. History of Science and Technology in the system of modern

knowledge : proceedings of the scientific conference dedicated to the 10th anniversary of the Department of History of Science and Technology of USTU-UPI, Yekaterinburg, December 14, 2009]. Pp. 41–46.

7. *Beran L. Uporyadochennye mnozhestva i reshetki: per. s cheshskogo* [Ordered sets and Lattices: transl. from Czech]. M. Nauka (Science). 1981. 64 p.

8. *Birkhoff G. Teoriya reshetok: per. s angl.* [Theory of lattices: transl. from English]. M. Nauka (Science). Chief editor of phys.-mat. literature. 1984. 568 p.

9. *Vechtomov E. M. Praktikum po teorii uporyadochennyh mnozhestv i reshetok* [Practicum on the theory of ordered sets and lattices] / Advanced science. 2018. No. 3. Pp. 4–17.

10. *Glass R. Fakty i zabluzhdeniya professional'nogo programmirovaniya: per. s anglijskogo* [Facts and Misconceptions of professional programming: transl. from English]. SPb. Symbol-Plus. 2007. 240 p.

11. *Glushkov V. M. Kibernetika. Voprosy teorii i praktiki* [Cybernetics. Questions of theory and practice]. M. Nauka (Science). 1986. 888 p.

12. *Gorbatov V. A. Fundamental'nye osnovy diskretnoj matematiki. Informacionnaya matematika* [Fundamental foundations of discrete mathematics. Information mathematics]. M. Nauka (Science). Fizmatlit. 2000. 544 p.

13. *Ershov A. P. Izbrannye trudy* [Selected works]. Novosibirsk. Nauka: Siberian Publishing house firm. 1994. 413 p.

14. *Igoshin V. I. "Diskretnaya matematika – osnova kompetencij cifrovoj ery" : mat-ly XXXIX Mezhdun. nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* ["Discrete mathematics – the basis of competencies of the digital era" : materials of the XXXIX International Scientific Seminar of teachers of mathematics and computer science of universities and pedagogical universities]. M. MSPU. 2020. 396 p.

15. *Informatika. 10 kl. : uchebnik* – Computer science. 10 grade : textbook / L. L. Bosova, A. Y. Bosova. M. BINOM, Laboratory of Knowledge. 2016. 288 p.

16. *Informatika. 11 kl. Bazovyj uroven' : uchebnik* – Computer science. 11 grade. Basic level : textbook / L. L. Bosova, A. Y. Bosova. M. BINOM, Laboratory of Knowledge. 2016. 256 p.

17. *Kapitonova Yu. V. Lekcii po diskretnoj matematike* [Lectures on discrete mathematics] / Yu. V. Kapitonova, S. L. Krivoy, A. A. Letichevsky, G. M. Lutsky. SPb. BHV-Petersburg. 2004. 624 p.

18. *Kolmogorov A. N. Nauchnye osnovy shkol'nogo kursa matematiki. Pervaya lekciya* [Scientific foundations of the school course of mathematics. The first lecture] // Math at school. 1969. No. 3. Pp. 12–18.

19. *"Matematika i komp'yuternye nauki v obrazovanii" : VI konferenciya-seminar dlya uchitelej matematiki i informatiki, posvyashchennaya pamyati N. N. Krasovskogo* – "Mathematics and computer science in education" : VI conference-seminar for teachers of mathematics and computer science, dedicated to the memory of N. N. Krasovsky. Yekaterinburg. 2021. Available at: mathschool.imm.uran.ru (date accessed: 19.10.2021).

20. *Krasovskij N. N. Matematicheskoe modelirovanie v shkole* [Mathematical modeling at school]. Yekaterinburg. USU News. 1995. No. 4. Pp. 12–24.

21. *"Prepodavanie matematiki i komp'yuternyh nauk v vysshej shkole" : mat-ly Mezhdun. nauchno-metodich. konf.* – "Teaching mathematics and computer science in higher school" : materials of the International Scientific and Methodological Conference. Perm. Perm State National Research University Publishing House. 2017. 104 p.

22. *Odinec V. P. Poyavlenie nazvaniya "Komp'yuternye nauki" – velenie vremeni* [The appearance of the name "Computer Science" – the dictates of time] / Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2016. Is. 1 (21). Pp. 58–68.

23. *Perminov E. A. Diskretnaya matematika : uchebnoe posobie dlya 8–9-h klassov srednej obshcheobrazovatel'noj shkoly* [Discrete mathematics : textbook for grades 8–9 of secondary school]. Yekaterinburg. IRRO. 2004. 206 p.

24. *Perminov E. A. Metodicheskaya sistema obucheniya diskretnoj matematike studentov pedagogicheskih napravlenij : uchebnoe posobie* [Methodical system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical directions : textbook]. Yekaterinburg. Publishing House of the Russian State Prof.-Ped. University. 2015. 256 p.

25. *Perminov E. A. Metodicheskaya sistema obucheniya diskretnoj matematike studentov pedagogicheskih napravlenij v aspekte integracii obrazovaniya : monografiya* [Methodical system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical directions in the aspect of integration of education : monograph]. Yekaterinburg. Russian State Pedagogical University. 2013. 286 p.

26. *Perminov E. A. O psihologicheskih aspektah realizacii diskretnoj linii v modernizacii matematicheskogo obrazovaniya* [On the psychological aspects of the implementation of the discrete line in the modernization of mathematical education] // *Innovacii v obrazovanii* – Innovations in education. 2014. No. 10. Pp. 140–150.

27. *Perminov E. A. O profil'nom obuchenii shkol'nikov resheniyu issledovatel'skih zadach na gruppy simmetrij grafov i reshetok : mat-ly III Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Zadachi v obuchenii matematike, fizike i informatike v usloviyah cifrovoj transformacii", posvyashchennoj 130-letiyu P. A. Laricheva* [On specialized teaching of schoolchildren to solve research problems on groups of graph and lattice symmetries : materials of the III International Scientific and Practical Conference "Problems in teaching mathematics, physics and computer science in the conditions of digital transformation", dedicated to the 130th anniversary of P. A. Larichev]. Vologda. VSU. 2022. Pp. 135–139.

28. *Perminov E. A. O roli diskretnoj matematiki v izuchenii ponyatij haosa, poryadka i fraktala v vuzah : mat-ly XVI Kolmogorovskih chtenij: III mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoj konferencii "Obuchenie fraktal'noj geometrii i informatike v vuze i shkole v svete idej akademika A. N. Kolmogorova"* [On the role of discrete mathematics in the study of the concepts of chaos, order and fractal in universities : materials of the XVI Kolmogorov readings: III International scientific and methodological Conference "Teaching fractal geometry and computer science in higher education and school in the light of the ideas of Academician A. N. Kolmogorov"]. Kostroma. KSU. 2021. Pp. 37–42.

29. *Projdakov E. M. Drevo komp'yuternyh nauk* [Tree of Computer Science] // *Naukovedcheskie issledovaniya : sb. nauchnyh trudov RAN. INION. Centr nauchn.-inform. issled. po nauke, obrazovaniyu i tekhnologiyam* – Scientific research :

collection of scientific works of the Russian Academy of Sciences. INION. The Center of scientific-inform. research on science, education and technology. M. 2012. 254 p.

30. *Sadovnichij V. A. Bol'shie dannye v sovremennom mire* [Big data in the modern world]. M. Moscow State University n. a. M. V. Lomonosov. 2017. 28 p.

31. *Serebryakova N. G. Analiz cikla disciplin "Komp'yuternye nauki" v inzhenernom obrazovanii* [Analysis of the cycle of disciplines "Computer science" in engineering education] // *Vyshejshaya shkola* – Higher school. 2020. No. 4. Pp. 42–43.

32. *Fried E. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru* [Elementary introduction to abstract algebra]. M. Mir. 1979. 260 p.

33. *Chernyj Yu. Yu. Polisemiya v nauke: kogda ona vredna? (na primere informatiki)* [Polysemy in science: when is it harmful? (on the example of computer science)] // *Otkrytoe obrazovanie* – Open education. 2010. No. 6. Pp. 97–107.

УДК 37.016:5 DOI 10.25730/VSU.0536.22.007

Вопросы методологии использования инструмента инвариантов в методике преподавания

Ю. А. Сауров
доктор педагогических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии образования, профессор кафедры физики и методики обучения физике, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: saurov-ya@yandex.ru

Аннотация. В статье продолжается разработка своего рода парадигмы использования инвариантов в теории и практике естественно-научного образования. Прежде всего к этому понятию, принципу, концепции формулируется отношение как к методологическому инструменту на примере методики обучения физике (или более узко – дидактики физики).

Так, исторически фиксируется в методике обучения физике как науке настойчивый поиск и разработка методических решений, которые бы сохраняли свою устойчивость при некой вариации условий. На наш взгляд, эта практика неплохо подпадает под описание с помощью инструмента инвариантности. И есть предположение, что в итоге использования этого инструмента можно получить новые результаты сначала в теории, а потом и в практике обучения. На поиск этого дидактического потенциала и нацелена статья.

Важно зафиксировать, что разрабатываемое поле методических возможностей сравнительно широкое: от использования знаковых моделей до эмпирически фиксируемых устойчивых свойств методических систем. Заметим, что в рамках статьи рассматривается только общая, методологическая, рамка дидактических возможностей. Библиография к статье содержит 22 источника.

Ключевые слова: методология, инвариантность, методика преподавания, принципы, знаковые модели, экспериментирование, моделирование.

Историко-методологическое введение. Теория, то есть сама наука методика обучения физике, и практика физического образования нуждаются в логической рациональности, а, как частность, в математической строгости во всех процессах, от разработки содержания до организации процессов усвоения знаний. Нет сомнения, что практика образования нуждается и в устойчивости, особенно в эпоху перемен. Но это должна быть «умная» устойчивость. А такая устойчивость на практике возможна только через видение (инструменты, практики и др.) культуры или науки. Вот почему в методической науке должны идти поиски и быть выделены и обозначены адекватные дидактические инструменты (понятия, представления, принципы и др.) этой практической потребности. На наш взгляд, к таким подходит и такой общенаучный инструмент, как инварианты. Добавим, что для методики это инструмент, во-первых, методических систем, во-вторых, деятельности. И то, и другое фундаментальные категории для методики. В целом, это в идеале будет способствовать большей строгости методических знаний.

Итак, деятельность – фундаментальная категория наук о человеке [11; 19; 21; 22]. Это онтологическая по смыслу категория, то есть она задает фундаментальную реальность человечества. Выделяют ее образованности, по статусу это некоторые части-стороны или характеристики деятельности. Среди основных сторон в области обучения выделяют понимание, мышление, рефлексию, коммуникацию [22]. Несомненно, это важнейшие образования деятельности, по смыслу феномены-процессы. Таким образом, не совсем гласно, но они признаются реально существующими. А далее для них формулируются характеристики или средства описания. Их может быть неопределенно много. На наш взгляд, к ним относят инварианты как удобные (и смысловые) характеристики методических систем. На вопрос «Характеристики чего?» следует общий ответ: «Деятельности или образованностей деятельности». А далее следует детальная расшифровка этой теоретической позиции. В такой логике поиск инвариантов – ведущий принцип любой методики. Как частность, в познании все постулаты – инварианты. Отсюда, как обобщение, наше видение чего-либо возможно только при наличии сетки (рамки, матрицы) понятий-истин, исторически или, что равносильно, изначально заданной.

Для методики существенна позиция известного логика И. С. Нарского, который определяет значение знака как инвариант [4, с. 197]. Это важный сигнал. В последние годы в методике физики растет интерес к знакам и их использованию, как в рамках физического содержания, так и в рамках собственно методических поисков [11; 12; 17; 18]. Например, любое буквенное изображение физической величины – это знак, скажем, m, и у него есть словесное выражение «масса». Но значение этого знака, то есть инвариант, – это инертные свойства тела. Причем, вне зависимости от формы, объема, цвета, скорости движения тела. И как только мы определяем массу как инвариант, так мы лучше представляем смыслы этой физической величины для нашей практики.

Принципиально важно, что совершенствование и развитие методики, а это развитие понятийных систем, было всегда на идеях извне. Фундаментальные понятия-категории «приходили» из методологии, психологии, более узкие представления – из физики, педагогики... Наконец, рефлексия опыта, а это все равно теоретические идеи, осуществляется на материале образовательной практики, то есть тоже от действия извне. В нашем случае это так об инвариантах.

В обоснование дидактического потенциала понятия инварианта для методики обучения приведем ряд высказываний специалистов, близкие педагогическим потребностям образовательной деятельности.

– Известный методолог В. С. Степин определяет большой круг «знаниевых» образований как инвариантов научной деятельности. Назовем здесь некоторые, важные для методики: в историческом познании «идеал объективной истинности» не зависит от особенностей средств и операций познания и является инвариантом [20, с. 541 и др.]; три сферы бытия – неживая природа, органический мир и социальный мир – как принцип- инвариант понимания нашего мира [там же, с. 457]; формула универсального эволюционизма «изменчивость – наследственность – отбор» – инвариант понимания действительности [там же, с. 459]. В познании к инвариантам относят: различение предметной и субъектной сторон познавательной деятельности, универсалии научного метода познания, принципы наблюдаемости, непротиворечивости, соответствия и др. [там же, с. 36, 157, 247, 270]. Для теории и практики физического образования важным является поиск инвариантов как условия формирования эмпирического научного факта [см. полнее 11, с. 81–88].

– Методист-физик Н. И. Резник защитила докторскую диссертацию на тему «Концепция инвариантности в системе преподавания дисциплин естественнонаучного цикла» (Челябинск, 1996), позднее вышла ее монография [9]. На наш взгляд, автор впервые в методике обозначила дидактический потенциал использования понятия об инвариантности: признает большую фундаментальность этого понятия по сравнению с понятием закона, дальновидно ставит методическую задачу построения системы инвариантов [9, с. 37], приводит примеры (правда, не всегда обоснованные и конкретные) реализации идеи инвариантов из радиотехники и физики. В целом, пока содержательно и процессуально концепция (основа, идея) выглядит несколько абстрактной для методики школьного физического образования. И требует сейчас нового этапа разработки методики.

– Глубокий мыслитель А. А. Зиновьев в рамках логики заложил основание для использования идеи инвариантов в обучении. В частности, интерпретируя инвариантность пространства и времени, он писал: «пространство всегда остается пространством (а время – временем), независимо от способа его ограничения, отсчета, измерения и т. п.» [2, с. 138].

– При построении своих предметных пространств психологи ищут и обозначают в схемах-моделях устойчивые образованности деятельности. Так, В. Ф. Петренко предлагает парадигму многомерного сознания: о познании как конструировании моделей мира, о множественности возможных языков, моделей, описаний мира, о структурировании поведения человека по извне/изнутри заданным конструктам [8; 13]. Здесь и происходит теоретический, с помощью методологии, и экспериментальный, на фиксации фактов, поиск инвариантов. И. И. Ильясов в педагогической психологии центрирует внимание на устойчивых структурах учебной деятельности, в частности, выделение деятельности учения можно трактовать как инвариант учения [3]. Осмысление такого видения в методике продуктивно. Н. Г. Салмина настойчиво раскрывает образовательный потенциал знаков, за которыми, несомненно, стоят инварианты деятельности [10].

– Многие сложные высказывания М. Мамардашвили, имеющие значение для понимания образовательных процессов, могут получить актуальную жизнь, если их прагматично (технологично) сформулировать на *языке инвариантов*:

✓ Великий А. Пуанкаре отмечал, «что имей Тихо Браге хотя бы в десять раз более точные инструменты, не было бы никакой астрономии... Иными словами, характеристики и внутреннего и внешнего совершенства теории устанавливаются в реальном познании независимо от движения источников опыта и их направлений» [Познание, с. 285].

✓ «Познание – это не арена мгновенно одно-непрерывным взглядом охватываемой идеальной системы отсчета, а пути, прокладываемые конечными областями связностей, и что в последних понимание уже существует, есть, независимо от того, понимает ли кто-нибудь, и от реального канала передачи, и общения и его описания» [там же, с. 287]. Кратко суть: «Может наблюдаться только допускаемое теорий. И это 1) не зависит от различий предметных языков, 2) не имеет причины, 3) неразлагаемо» [там же, с. 288].

✓ «Шаг «сделанного» и понимание им дают символизацию всех связей на все времена и для всех (как, например, в пифагоровском треугольнике, сферическом законе Кулона или орнаменте Альгамбры)» [там же, с. 291].

✓ «События «мыслей», «законоподобных высказываний» и тому подобное содержат в себе формулировку некоторого упорядоченного положения вещей, не могут тем не менее предопределены – это тавтологически ясно» [там же, с. 292].

Итак, парадигма (принцип) инвариантности задает некое устойчивое мощное методическое пространство, в котором можно строить эффективные в каком-либо смысле методические системы.

Сущности инвариантов в методике. Что не меняется в деятельности? Структура? Да, в широком диапазоне условий. Воспроизводимость? Да, ее считают фундаментальным свойством [15; 22]. И тогда возникает вопрос об инвариантах. Поиск сохраняющихся в определенных рамках свойств (характеристик) – привлекательный и эффективный инструмент описания (и конструирования) методических систем. Хотя, заметим, что многофакторность и рукотворность дидактических событий являются сильным ограничителем для этого языка описания.

В физике язык инвариантов признают фундаментальнее (выше по иерархии) законов: «Законы природы не могли бы существовать без принципов инвариантности»; «Не будь принципов инвариантности, физические законы нельзя было бы подкрепить экспериментом» [1, с. 36, 193]. Хотя в механике известно, что законы сохранения, с одной стороны, следуют из уравнений Ньютона, с другой стороны, являются следствием геометрических инвариантов (относительно сдвига в пространстве и во времени).

На наш взгляд, в методиках преподавания трудности формулирования закономерностей связаны с перескоком познания через этап инвариантов. Без осознания и отработки этого этапа познания и понимания методического явления мы скатываемся к формам гипотетических утверждений, называя их законами или закономерностями. Заметим, что иной путь – это установление эмпирических закономерностей (И. И. Нурминский [7]). Хотя на практике он пока плохо развит, а в нем как раз ищут корреляции между событиями, т. е. реализуется классическая логика поиска закона. И далее на этой основе может быть обобщение – формулирование инвариантов, и на этой сравнительно твердой основе построение методик.

О видах (формах) инвариантов образовательной деятельности [15]. Язык инвариантов реализуется (представляется или так осознается):

– При выделении *принципов образовательной деятельности;* они устойчивы в рамках дидактической системы;

– В различных методических моделях, несущих функции ориентировок деятельности. Так, например, в схеме освоения научного метода познания в форме «факты – модель – следствия – эксперимент» (В. Г. Разумовский), в схеме-модели учебной деятельности при решении школьных физических задач «анализ текста и физического явления – идея или план решения – математическая модель явления и выводы из нее – рефлексия решения» (Д. Пойа, Л. М. Фридман, В. А. Орлов, Ю. А. Сауров). Как устойчивое частное методическое решение по организации процесса учения в виде двухэтапной логики освоения любой учебной задачи: выделение физического явления – описание физического явления [11; 15; 17; 18].

– При *конструировании разнообразных норм* учебной деятельности и деятельности преподавания в форме знаковых моделей (блок-схемы, опорные сигналы, модели уроков и др.) [19].

Известны два языка представления инвариантов: первый, строгий и широко распространенный – математический, он задается формулами преобразований величин, например, сохранение ускорения тела при переходе описания из одной инерциальной системы в другую; качественный, понятийный – концептуальный, идейный, он задается устойчивым принципом, логикой на основе методологии познания.

Инварианты в содержании физического образования.

– Наличие границ применимости у любых предметных знаний необходимо рассматривать как инвариант методики преподавания [14; 16].

– В настоящее время структурирование содержания громадного числа вопросов рационально строить и осваивать по схеме-модели «факты – гипотеза, модель – следствия – эксперимент». Сейчас эта универсальная ориентировка познавательной деятельности школьников входит в ядро содержания физического образования. По крайней мере, для двух поколений она показала свою устойчивость.

– Существует большой блок устойчивых моделей-схем образований интеллектуальной деятельности школьников, которые нуждаются в систематизации, интерпретации, в итоге – внедрении. Все они могут быть отнесены к инвариантам с учетом специфики методики обучения физике.

Такие инварианты можно усмотреть из работ многих методологов [22], в частности, из работ Г. П. Щедровицкого. Например, он прямо указывал на инвариант функциональной структуры сопоставления объектов реальности и предметов (описаний, представлений) [21, с. 169 и др.]. На наш взгляд, инвариантом является схема-модель замещения объектов знаками (рис. 1). Это необходимый устойчивый элемент построения любой мыслительной деятельности. Еще пример: модель-схема трансляции опыта деятельности в обучении (рис. 2). По нашему мнению, это в прямом смысле инвариант образовательного процесса, и он дает некое универсальное видение этого великого процесса. Зафиксируем, на наш взгляд, и аналогию между инвариантами в форме схем-моделей в пространстве образования, и геометрическими инвариантами в пространстве физики [1].

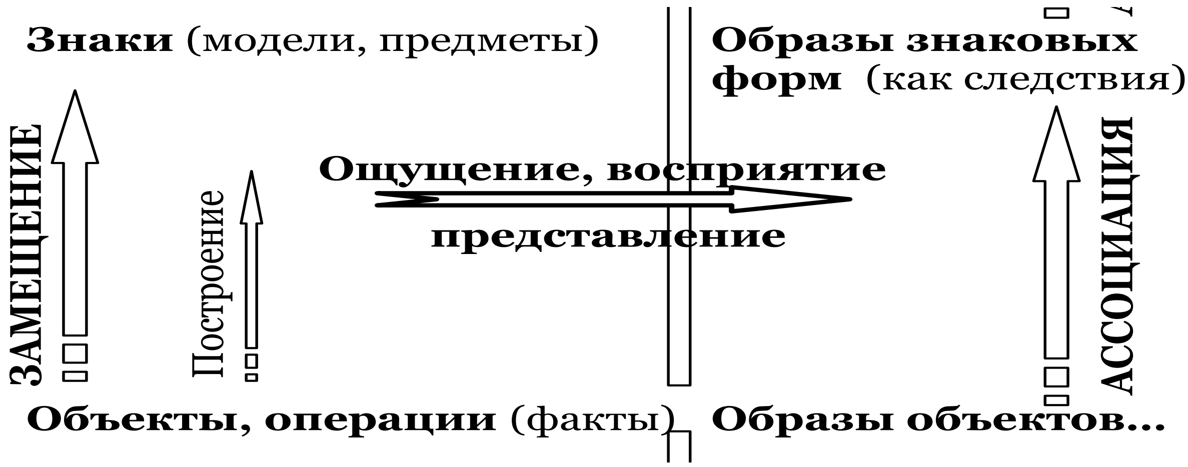

Рис. 1. Схема-модель единицы замещения объектов знаками

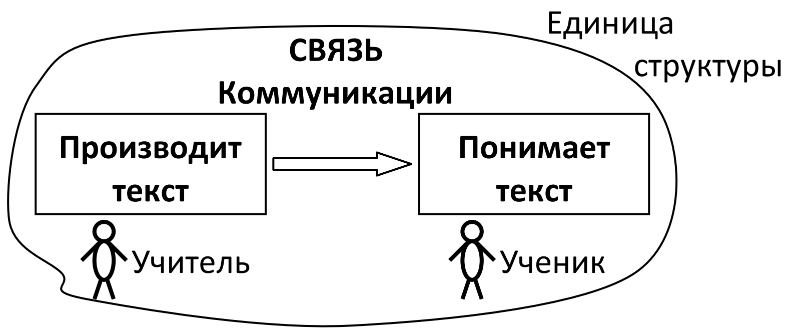

Рис. 2. Схема-модель единицы трансляции

– При определенных условиях к инвариантам учебной деятельности можно отнести обобщенные планы изучения явления, закона, измерения и др. (А. В. Усова). Некоторые устойчивые мнемонические приемы организации усвоения (запоминания) тоже могут играть функции инвариантов деятельности; и практика обучения знает этот опыт, а этот инструмент даже объясняет успешность таких методических решений.

– Статические системы знаний в форме теории имеют устойчивую структуру «основание – ядро – выводы» (В. Гейзенберг, В. В. Мултановский). По схеме этого инварианта в школе рассматриваются все фундаментальные физические теории, нередко частные теории, теории отдельных явлений [11]. Есть опыт распространения этой схемы-модели и на методические системы знаний. Приведем пример структуры классической механики:

ОСНОВАНИЕ: Понятия (о макроскопическом теле, о механическом движении, о видах механического движения: прямолинейное...). Понятия о моделях: материальная точка. Понятия о физических величинах (скорость, ускорение, масса, импульс, энергия...).

ЯДРО: Фундаментальные идеи и принципы: взаимодействие, принципы дальнодействия, относительности, суперпозиции сил. Фундаментальные законы: Ньютона, взаимодействий для всемирного притяжения, упругости, трения.

ВЫВОДЫ: Статика. Механические колебания. Объяснение явлений природы и техники: невесомость, тормозной путь и др.

– Приведем еще несколько конкретных примеров методических вопросов, связанных с использованием инвариантов. Вот один странный курьез в наше время: десятилетиями в вузовских и школьных учебниках физики сохранялись представления о росте массы при увеличении скорости тела. Формальный ответ простой: неадекватная интерпретация физической формулы $m=m_0/(1-\upsilon^2/c^2)^{1/2}$. Но в этом и других случаях выбор языка описания – залог методического успеха. Почти очевидно, что в системе с самого начала определение инвариантных характеристик упрощает понимание (и решение задач). Известный физик-теоретик Л. Б. Окунь жестко критиковал: «Пора прекратить обманывать все новые поколения школьников и студентов, внушая им, что возрастание массы с увеличением скорости – это экспериментальный факт» [УФН. 2008. Т. 178. № 5. С. 552]. Если масса с самого начала понимается как инвариант, то вопрос автоматически снимается.

Еще устойчивая методическая проблема. При определенных условиях (малые токи и др.) сопротивление на участке электрической цепи – величина постоянная, т. е. inv. Но тогда следует всегда правильная интерпретация выражения R=U/I как формулы расчета, а не функциональной зависимости. А ведь эта физическая ошибка сохраняется в системах обучения десятилетиями!

Словом, теоретические и экспериментальные факты убеждают в значительном методическом потенциале такого инструмента познания и понимания как инвариант.

Заключительные мысли. Использование языка инвариантов, пусть даже в «мягком» (по сравнению с классическими представлениями логики или математики) варианте, создает возможности более строгого описания дидактических систем. В перспективе можно обоснованнее ставить и вопрос о закономерностях. И может быть, это единственный путь формулирования закономерностей для таких искусственных, целеустремленных, деятельностных методических систем. Почти очевидно, что построение (или поиск) описаний под такой взгляд у неопределенно сложной методической системы все же позволяет задать некую устойчивую модель. А тогда и возникает соблазн сделать еще один, классический по смыслам, шаг – формулирование закономерностей для такой модели. (Повторим, в физике инварианты убедительно рассматриваются шире законов.) Немаловажно, что в этом интеллектуальном движении лучше складываются условия понимания методических явлений.

В случае же построения содержания учебного предмета «физика», несомненно, язык инвариантов может и должен быть прямо использован, например, при изучении сохранения физических величин в разных инерциальных системах отсчета. Сохранение импульса, энергии замкнутых систем как следствие однородности пространства и времени, т. е. инвариант сдвигов. Так, масса тела как скалярная физическая величина – инвариант преобразований Лоренца в специальной теории относительности, т. е. она не изменяется при рассмотрении движения тела в разных инерциальных системах отсчета. В школьном курсе физики примеров много: скорость света, заряд – инварианты...

В методике обучения физике хорошо известно, что, например, второй закон динамики задает только «пустую» форму механики, без конкретных законов сил, без учета начальных и конечных условий он не работает. Словом, из общей формы закона не выводимо его конкретное применение, и это знание – инвариант. Об этом уже сказано не раз [6]. Здесь же объяснима и природа устойчивого недоумения студентов (да и менеджеров): почему нас не учат практике элементарной физики, а читают лекции по теоретической физике?!

В целом проблема различения реальности и описаний – фундаментальная проблема обучения физике на современном этапе развития образования. И выделение инвариантов – один из инструментов решения этой стратегической методической проблемы.

Список литературы

1. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М. : Мир, 1971. 318 с.
2. *Зиновьев А. А.* Основы логической теории научных знаний. М. : ЛЕНАНД, 2015. 264 с.
3. *Ильясов И. И.* Структура процесса учения. М. : Изд-во МГУ, 1986. 200 с.
4. *Кондаков Н. И.* Логический словарь-справочник. М. : Наука, 1976. 720 с.
5. *Лекторский В. А.* Эпистемология классическая и неклассическая. М. : Эдиториал УРСС, 2001. 256 с.
6. *Мамардашвили М.* Стрела познания: Набросок естественноисторической гносеологии. М. : «Языки русской культуры», 1997. 304 с.
7. *Нурминский И. И., Гладышева Н. К.* Статистические закономерности формирования знаний и умений учащихся. М. : Педагогика, 1991. 224 с.
8. *Петренко В. Ф.* Многомерное сознание: психосемантическая парадигма. М. : Эксмо, 2013. 448 с.
9. *Резник Н. И.* Инвариантная основа внутрипредметных, межпредметных связей: методологические и методические аспекты : монография. СПб. : Речь, 2012. 265 с.
10. *Салмина Н. Г.* Знак и символ в обучении. М. : Изд-во МГУ, 1988. 288 с.
11. *Сауров Ю. А.* Принцип цикличности в методике обучения физике: историко-методологический анализ : монография. Киров : Изд-во ИПК и ПРО, 2008. 224 с.
12. *Сауров Ю. А.* Научное творчество профессора В. В. Мултановского. О личности в образовании : монография. Киров : О-Краткое, 2015. 256 с.

13. *Сауров Ю. А., Низовских Н. А.* Проблемы современного познания человека в мире // Вопросы психологии. 2015. № 1. С. 159–162.

14. *Сауров Ю. А., Уварова М. П., Перевощиков Д. В.* Об исследовании освоения границ применимости физических понятий, принципов, моделей и законов // Перспективы науки и образования. 2019. № 6. С. 128–141.

15. *Сауров Ю. А., Перевощиков Д. В., Уварова М. П.* Язык инвариантов как инструмент построения методики в дидактике физики // Вестник ТУ. 2020. № 451. С. 170–178.

16. *Сауров Ю. А., Уварова М. П.* О проблеме границ применимости знаний в методике обучения физике // Педагогика. 2020. № 10. С. 24–36.

17. *Сауров Ю. А., Петрова Е. Б.* Знаки и чувства в обучении физике // Физика в школе. 2021. № 2. С. 3–11.

18. *Сауров Ю. А.* Вопросы содержания, методов и приемов формирования физического миропонимания // Физика в школе. 2021. № 5. С. 20–29.

19. *Сауров Ю. А., Уварова М. П.* Нормативная и творческая деятельность в обучении: различение и согласование // Педагогика. 2021. № 8. С. 5–15.

20. *Степин В. С.* Философия и методология науки. Избранное. М. : «Академический проект», 2015. 716 с.

21. *Щедровицкий Г. П.* Психология и методология. М. : Путь, 2004. 368 с.

22. *Щедровицкий Г. П.* Мышление – Понимание – Рефлексия. М. : Наследие ММК, 2005. 800 с.

Questions of methodology of using the invariant tool in teaching methodology

Yu. A. Saurov

Doctor of Pedagogical Sciences, professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Education,
professor of the Department of Physics and Methods of Teaching Physics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. E-mail: saurov-ya@yandex.ru

Abstract. The article continues to develop a kind of paradigm for the use of invariants in the theory and practice of natural science education. First of all, the attitude to this concept, principle, concept is formulated as a methodological tool on the example of the methodology of teaching physics (or more narrowly, the didactics of physics).

So, historically, the persistent search and development of methodological solutions that would maintain their stability under some variation of conditions is fixed in the methodology of teaching physics as a science. In our opinion, this practice falls well under the description using the invariance tool. And there is an assumption that as a result of using this tool, you can get new results first in theory, and then in the practice of learning. The article is aimed at finding this didactic potential.

It is important to note that the field of methodological possibilities being developed is relatively wide: from the use of iconic models to empirically fixed stable properties of methodological systems. Note that the article considers only the general, methodological, framework of didactic possibilities. The bibliography of the article contains 22 sources.

Keywords: methodology, invariance, teaching methods, principles, sign models, experimentation, modeling.

References

1. *Wigner E. Etyudy o simmetrii* [Etudes on symmetry]. M. Mir. 1971. 318 p.

2. *Zinov'ev A. A. Osnovy logicheskoj teorii nauchnyh znanij* [Fundamentals of the logical theory of scientific knowledge]. M. LENAND. 2015. 264 p.

3. *Il'yasov I. I. Struktura processa ucheniya* [Structure of the teaching process]. M. Moscow State University. 1986. 200 p.

4. *Kondakov N. I. Logicheskij slovar'-spravochnik* [Logical dictionary-reference]. M. Nauka (Science). 1976. 720 p.

5. *Lektorskij V. A. Epistemologiya klassicheskaya i neklassicheskaya* [Classical and non-classical epistemology]. M. Editorial URSS. 2001. 256 p.

6. *Mamardashvili M. Strela poznaniya: Nabrosok estestvennoistoricheskoj gnoseologii* [The arrow of knowledge: A sketch of natural-historical epistemology]. M. "Languages of Russian culture". 1997. 304 p.

7. *Nurminskij I. I., Gladysheva N. K. Statisticheskie zakonomernosti formirovaniya znanij i umenij uchashchihsya* [Statistical patterns of formation of knowledge and skills of students]. M. Pedagogika (Pedagogy). 1991. 224 p.

8. *Petrenko V. F. Mnogomernoe soznanie: psihosemanticheskaya paradigma* [Multidimensional consciousness: a psychosemantic paradigm]. M. Eksmo. 2013. 448 p.

9. *Reznik N. I. Invariantnaya osnova vnutripredmetnyh, mezhpredmetnyh svyazej: metodologicheskie i metodicheskie aspekty : monografiya* [Invariant basis of intra-subject, inter-subject relations: methodological and methodological aspects : monograph]. SPb. Speech. 2012. 265 p.

10. *Salmina N. G. Znak i simvol v obuchenii* [Sign and symbol in teaching]. M. Moscow State University. 1988. 288 p.

11. *Saurov Yu. A. Princip ciklichnosti v metodike obucheniya fizike: istoriko-metodologicheskij analiz : monografiya* [The principle of cyclicity in the methodology of teaching physics: historical and methodological analysis : monograph]. Kirov. Publishing house of IPK and PRO. 2008. 224 p.

12. *Saurov Yu. A. Nauchnoe tvorchestvo professora V. V. Multanovskogo. O lichnosti v obrazovanii : monografiya* [Scientific creativity of Professor V. V. Multanovsky. About personality in education : monograph]. Kirov. O-Kratkoe. 2015. 256 p.

13. *Saurov Yu. A., Nizovskih N. A. Problemy sovremennogo poznaniya cheloveka v mire* [Problems of modern human cognition in the world] // *Voprosy psihologii* – Questions of psychology. 2015. No. 1. Pp. 159–162.

14. *Saurov Yu. A., Uvarova M. P., Perevoshchikov D. V. Ob issledovanii osvoeniya granic primenimosti fizicheskih ponyatij, principov, modelej i zakonov* [On the study of the development of the boundaries of applicability of physical concepts, principles, models and laws] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya* – Prospects of Science and education. 2019. No. 6. Pp. 128–141.

15. *Saurov Yu. A., Perevoshchikov D. V., Uvarova M. P. Yazyk invariantov kak instrument postroeniya metodiki v didaktike fiziki* [The language of invariants as a tool for constructing a methodology in the didactics of physics] // *Vestnik TU* – Herald of TU. 2020. No. 451. Pp. 170–178.

16. *Saurov Yu. A., Uvarova M. P. O probleme granic primenimosti znanij v metodike obucheniya fizike* [On the problem of the limits of the applicability of knowledge in the methodology of teaching physics] // *Pedagogika* – Pedagogy. 2020. No. 10. Pp. 24–36.

17. *Saurov Yu. A., Petrova E. B. Znaki i chuvstva v obuchenii fizike* [Signs and feelings in teaching physics] // *Fizika v shkole* – Physics at school. 2021. No. 2. Pp. 3–11.

18. *Saurov Yu. A. Voprosy soderzhaniya, metodov i priemov formirovaniya fizicheskogo miroponimaniya* [Questions of content, methods and techniques of formation of physical worldview] // *Fizika v shkole* – Physics at school. 2021. No. 5. Pp. 20–29.

19. *Saurov Yu. A., Uvarova M. P. Normativnaya i tvorcheskaya deyatel'nost' v obuchenii: razlichenie i soglasovanie* [Normative and creative activity in teaching: distinction and coordination] // *Pedagogika* – Pedagogy. 2021. No. 8. Pp. 5–15.

20. *Stepin V. S. Filosofiya i metodologiya nauki. Izbrannoe* [Philosophy and methodology of science. Favorites]. M. "Academic project". 2015. 716 p.

21. *Shchedrovitsky G. P. Psihologiya i metodologiya* [Psychology and methodology]. M. Put' (Path). 2004. 368 p.

22. *Shchedrovitsky G. P. Myshlenie – Ponimanie – Refleksiya* [Thinking – Understanding – Reflection]. M. Heritage of MMK. 2005. 800 p.

УДК 37.016:51 DOI 10.25730/VSU.0536.22.008

Решение задач как основное средство развития математического мышления

В. А. Тестов
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики,
Вологодский государственный университет.
Россия, г. Вологда. ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация. В современную эпоху возросла роль математики в науке и образовании. В образовании роль математики состоит, прежде всего, в развитии мышления учащихся. В статье показывается, что основным средством развития математического мышления во все времена является решение задач. Цифровые технологии никогда не смогут заменить деятельность по решению задач. При изучении математики приоритет следует отдавать не запоминанию каких-то формул и фактов, а формированию схем (средств, общих приемов, методов) математического мышления, математической деятельности. В статье выделены виды таких схем (когнитивных структур). Для каждого вида таких схем математического мышления наиболее эффективным способом развития в младшем и в подростковом возрасте является решение системы некоторых специальным образом подобранных задач, в первую очередь, нестандартных (поисковых). Эти же задачи являются эффективным средством диагностики уровня сформированности схем математического мышления и математических способностей.

В статье показывается, что в обучении важным является использование исследовательских задач, порождающих проблемные ситуации. Рассматривается также роль обратных и некорректных задач, имеющих ярко выраженную практическую направленность.

Ключевые слова: цифровая трансформация, схемы математического мышления, нестандартные задачи, некорректные задачи.

В современных условиях в обучении на первый план выдвигается развитие личности. Огромную роль в достижении этой цели и, прежде всего, развитии интеллектуальных способностей личности во все времена играет математика. Изучение математики существенно обогащает мышление, формирует такие когнитивные качества, которые присущи не только для математической деятельности, но и являются необходимыми человеку для работы и жизни в современном обществе.

В цифровую эпоху роль математики в образовании и науке еще более возросла и стала многоплановой. При изучении математики и формировании умений ее применять для решения практических проблем учащийся овладевает различными творческими методами, в частности методом математического моделирования, который является приоритетным для компетенций цифровой эпохи. Математическое моделирование лежит в основе формирования трансдисциплинарных систем знаний, таких как синергетика, искусственный интеллект, большие данные и др., которые отличает принципиальное игнорирование междисциплинарных границ. Математика стала лидером трансдисциплинарного тренда в образовании, выводящим его на новый, более высокий уровень познания, синтезатором идей и методов огромного научного потенциала самых разных дисциплин [9].

В последние десятилетия происходит интенсивный процесс цифровой трансформации всей системы образования. Благодаря цифровым технологиям удалось в значительной степени предотвратить в условиях пандемии коллапс системы образования. Однако результаты исследований института возрастной физиологии РАО показывают, что в результате перехода на цифровой формат обучения у многих из обучающихся обострился целый ряд проблем, в частности проблема с пониманием изучаемого материала. Хотя цифровые технологии способствуют решению целого ряда методических задач, они не являются панацеей. Это всего лишь средство обучения, а, как и любое средство обучения, оно носит вспомогательный характер, это помощник учителя, и его применение должно определяться содержанием изучаемого материала. Особенно эффективно применение компьютеров при изучении такого материала, который допускает наглядную интерпретацию на экране.

Однако при изучении теоретического материала и особенно при изучении доказательств теорем применение цифровых технологий мало помогает. Как показывает опыт, в этом случае большую помощь учителю в достижении понимания изучаемого материала оказывает умение предварять доказательство решением специально подобранных задач. Таким образом, цифровые технологии никогда не смогут заменить в образовании деятельность по решению задач.

Ведущая роль задач всегда являлась особенностью математики как учебного предмета. На всех этапах учебной деятельности по математике система задач является основным средством усвоения теории, формирования творческого опыта, критического мышления, овладения структурой и содержанием поисковой деятельности.

Роль использования задач в обучении математики варьировалась в зависимости от конкретно-исторических условий. Можно выделить три основных подхода к использованию задач в обучении математике. При первом подходе изучение математики происходит, прежде всего, с целью обучения решению задач. Особенности этого подхода хорошо прослеживаются в таком учебнике, как «Арифметика» Л. Ф. Магницкого. При втором подходе обучение математике сопровождается решением задач. Этот подход наиболее распространен в методике обучения, большинство авторов современных учебников следует особенностям именно этого подхода. Наконец возможен третий подход, при котором обучение математике происходит через решение задач. Характерные особенности этого подхода хорошо проявляются при чтении известной книги Г. Пойя и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа». Задачи при таком подходе одновременно должны служить как мотивом для дальнейшего развития теории, так и возможностью для ее применения. Выбор каждого из этих трех подходов определяется, прежде всего, целями обучения и готовностью преподавателя и учащихся к использованию того или иного подхода [3].

Решение задач имеет первостепенное значение для развития различных видов математического мышления. Как замечено многими педагогами, наиболее эффективным способом такого развития является решение школьниками системы некоторых, специальным образом подобранных задач, в первую очередь, нестандартных (поисковых). Решение таких задач позволяет оказывать эффективное влияние на обе компоненты человеческого мышления (и на образную, интуитивную компоненту, и на логическую), что приводит к совершенствованию самых разных мыслительных операций.

Согласно деятельностному подходу достижение необходимого развивающего эффекта обучения предполагает усвоение учащимися содержания обучения в процессе собственной активной деятельности, направленной на приобретение теоретических знаний о предмете обучения и общих приемов решения, связанных с этими знаниями задач. Таким образом, из деятельностного подхода вытекает, что для развития математического мышления приоритет следует отдавать не передаче готовых знаний, а формированию общих приемов, средств, методов математического мышления, математической деятельности.

Для обеспечения математического развития у школьников должны быть сформированы не только алгебраические, порядковые и топологические когнитивные структуры, которые представляют собой системы хранения знаний, но и когнитивные структуры, представляющие собой определенные качества математического мышления, являющиеся, прежде всего, средствами, методами познания, а значит, и средствами, методами получения математических знаний учеником. Такого сорта когнитивные структуры швейцарский психолог Жан Пиаже называл операциями второго порядка, к которым он относил комбинаторные и логические операции.

Такие структуры играют особую роль для исследовательской активности в области математики, а значит, и для развивающего обучения. Для таких когнитивных структур лучше подходит термин «схемы математического мышления». Такими видами схем (когнитивных структур) являются логические, алгоритмические (процедурные), комбинаторные, образно-геометрические структуры [6].

Все эти схемы мышления не зависят от конкретного используемого математического материала и имеют большое значение для математического творчества. В частности, комбинаторные и геометрические методы получили широкое распространение в современной математике. Многие математики мыслят не формулами, а образами.

Как показали исследования, кратковременное обучение логическим или комбинаторным понятиям не дает заметного эффекта. Такой эффект можно достичь, если формировать схемы математического мышления и соответствующие понятия поэтапно в течение продолжительного времени в соответствии с возрастными особенностями учащихся, органически вплетая эти понятия в курс математики.

Как уже отмечалось, наилучшим способом развития математического мышления является решение школьниками системы некоторых нестандартных задач. Такие задачи требуют не столько знания каких-то отдельных математических фактов и частных методов, сколько универсальных приемов математического мышления. Поэтому при решении именно таких задач происходит не только развитие математического мышления, но проявляется и его сформированность, что позволяет использовать такие задачи также и для диагностики уровня математического мышления.

Такие задачи можно использовать и при диагностике уровня развития математических способностей на устных экзаменах или беседах преподавателя с учащимися. Как указывал Л. С. Выготский, следует считать «показателем уровня детского мышления не то, что ребенок знает, не то, что он способен усвоить, а то, как он мыслит в той области, где он никакого знания не имеет» [С. с., т. 2, 1956, с. 227].

В оценке способностей с помощью таких задач следует опираться на идею Л. С. Выготского о зоне ближайшего развития ребенка как ключевом диагностическом принципе его развития. Для этого преподаватель должен наблюдать за ходом решения задач, которые должны быть достаточно трудными и незнакомыми для учащегося. Самостоятельно большинство учащихся справиться с такими задачами не могут. Однако с помощью преподавателя, его наводящих вопросов, его подсказок, т. е. «дозированной помощи», справиться с задачами вполне возможно. В возникающем при этой деятельности переходе из зоны ближайшего развития в зону актуального развития ярко высвечиваются математические способности учащегося. Задача преподавателя в этом случае состоит в том, чтобы фиксировать, сколько подсказок потребовалось учащемуся, начиная с какого этапа у него созрел план решения задачи, насколько безошибочным и настойчивым он был в достижении цели.

К нестандартным развивающим задачам обычно относят задачи на переливание и взвешивание, логические [1], комбинаторные, геометрические, арифметические и т. д. Так, Мартин Гарднер все задачи разделяет на шесть типов: комбинаторные, логические, процедурные (алгоритмические), геометрические, арифметические и словесные (лингвистические) [2]. При этом эти типы задач неизбежно перекрываются. Задачи последних двух типов могут быть отнесены к комбинаторным и логическим задачам. Тем самым, основные типы нестандартных задач полностью соответствуют выделенным выше видам схем математического мышления.

Экспериментально было установлено, что развитие выделенных выше различных видов математического мышления школьников лучше всего достигается не через изучение тех или иных разделов математики, а через решение соответствующих задач с привлечением минимального дополнительного материала (круги Эйлера, графы, выборки, принцип Дирихле и т. п.). Хорошим примером задачи на развитие алгоритмического мышления является старинная русская задача про переправу через реку волка, козы и капусты. Для развития наглядно-образного мышления большое внимание следует уделять наблюдению, проведению опытов (в том числе с применением компьютеров), решению задач на разрезание и конструирование фигур, на различные наглядные построения и т. д. [7; 8].

Неслучайно в последние десятилетия больше внимания стало уделяться текстовым арифметическим задачам, при решении которых используются выделенные схемы математического мышления. Потребовалось более двух десятков лет почти безраздельного господства в школе алгебры, чтобы учителя и преподаватели вузов осознали: без арифметического фундамента обучение математике оказывается неэффективным.

Система занятий по решению развивающих задач может стать эффективным средством совершенствования всей постановки математического образования современных школьников. Такая система занятий служит достижению основной цели – развитию мышления учащихся. Поэтому решение развивающих задач в какой-то форме должно присутствовать в учебных программах по крайней мере до достижения учащимися возраста 15 лет.

Особое внимание на развивающие (поисковые, проблемные, нестандартные и т. п.) задачи обращали многие ученые. В современных учебных пособиях такие задачи тоже встречаются. В частности, В. А. Смирнов и И. М. Смирнова в свою книгу [5] включили проблемные задачи, направленные на развитие критического мышления учащихся. В этих задачах требуется распознать конфигурацию геометрических фигур по их изображениям и описаниям; сравнить и оценить геометрические величины; установить верность или неверность утверждений; найти ошибки в формулировках и доказательствах; привести контрпримеры; решить задачи с неоднозначным ответом.

Важным является использование в обучении исследовательских задач, порождающих проблемные ситуации, для разрешения которых обучающимся требуется экспериментирование с динамическими моделями математических объектов. В ходе исследовательской деятельности учащиеся не только находят способы решения тех или иных задач, но и побуждаются к самостоятельной их постановке, к уточнению цели своей работы.

В последнее время усилилось внимание к решению практико-ориентированных задач. В математике возникло целое новое направление – теория обратных и некорректных задач. Некорректной, согласно Адамару, называется задача, для которой нарушается хотя бы одно из трех условий: существование решения, единственность решения, устойчивость решения.

В школьных программах и учебниках стало больше внимания уделяться обратным задачам и задачам с недостающими (недоопределенными) или избыточными (переопределенными) данными. Такие задачи относятся к некорректным, их раньше всячески избегали в школьной, да и в вузовской математике. Эти задачи имеют ярко выраженную практическую направленность, поскольку в практической деятельности часто возникает необходимость принятия решений в условиях избытка, недостатка данных или их противоречивости. Каждая инженерная задача представляет собой пример некорректной задачи ввиду того, что условий дано в избытке, а среди данных могут присутствовать и противоречивые [4].

Примеры обратных задач можно найти в медицине, прежде всего в компьютерной томографии. В последнее время интенсивно развиваются методы исследования обратных задач в экономике. Не единственность решения таких задач не противоречит действительности, а характеризует с различных сторон многообразную картину описываемых явлений.

Таким образом, решение математических задач является основой формирования наиболее плодотворного способа теоретического мышления, креативного потенциала личности, нелинейного мышления, которые являются важнейшими составляющими компетенций специалиста в цифровую эпоху.

Пронизывая все основные компоненты методической системы обучения математике (цели, содержание, методы и средства обучения), задачи придают этой системе интегративные качества, которые обеспечивают целостность и преемственность учебного процесса. Эффективность обучения математике, в конечном счете, определяется тем, какие именно задачи и в какой последовательности предлагались учащимся, какими способами они решались. А также тем, как велика была доля активности, самостоятельности ученика в процессе их решения. Прослеживаются факторы взаимозависимости сложности математических задач и самоорганизации обучающегося, использования синергетических эффектов в математическом образовании.

Таким образом, при разработке стандартов, школьных и вузовских образовательных программ совершенно необходимо учитывать роль математики и решения задач в образовании. Особенно велика эта роль в подготовке учителей математики и информатики. К сожалению, за последнее время в вузовских образовательных программах большая доля учебного времени отводится изучению новых мелких дисциплин, а фундаментальные дисциплины (математика, физика и др.) оказались урезанными. Необходимо вернуть этим дисциплинам и особенно решению математических задач подобающее им место в вузовских образовательных программах в соответствии с их ролью в обучении.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М., Суслопарова (Петухова) Я. В.* Решение логических задач как основа развития мышления // Концепт. 2012. № 8 (август). С. 11–15. ART 12109. 1,2 п. л. URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm.

2. *Гарднер М.* Есть идея! М. : Мир, 1982.

3. *Клековкин Г. А., Максютин А. А.* Задачный подход в обучении математике. М.; Самара : МГПУ, 2009.

4. *Селютин В. Д., Яремко Н. Н.* Обучение бакалавров математике на основе понятия «корректность». Орел : Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, 2019.

5. *Смирнов В. А., Смирнова И. М.* Геометрические задачи на развитие критического мышления. Москва : МЦНМО, 2021.

6. *Тестов В. А.* Стратегия обучения математике : монография. М. : Технологическая школа бизнеса, 1999.

7. *Тестов В. А.* Математическая одаренность и ее развитие // Перспективы науки и образования : международный электронный научно-практический журнал. 2014. № 6. С. 60–67. URL: http://pnojournal.wordpress.com.

8. *Тестов В. А.* Использование потенциала математических задач для развития мышления учащихся // Развивающий потенциал математического образования: школа – вуз : коллективная монография / Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «ПГНИУ». Соликамск : СГПИ, 2015. С. 28–39.

9. *Тестов В. А., Перминов Е. А.* Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. 2021. Т. 23. № 3. С. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.

Problem solving as the main means of developing mathematical thinking

V. A. Testov

Doctor of Pedagogical Sciences, professor, professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Vologda State University. Russia, Vologda. ORCID: 0000-0002-3573-574X. E-mail: vladafan@inbox.ru

Abstract. In the modern era, the role of mathematics in science and education has increased. In education, the role of mathematics is, first of all, in the development of students' thinking. The article shows that the main means of developing mathematical thinking at all times is the solution of problems. Digital technologies will never be able to replace problem-solving activities. When studying mathematics, priority should be given not to memorizing some formulas and facts, but to the formation of schemes (means, general techniques, methods) of mathematical thinking, mathematical activity. The article highlights the types of such schemes (cognitive structures). For each type of such mathematical thinking schemes, the most effective way to develop in the younger and in adolescence is to solve a system of some specially selected tasks, primarily non-standard (search) ones. The same tasks are an effective means of diagnosing the level of formation of mathematical thinking schemes and mathematical abilities.

The article shows that the use of research tasks that generate problematic situations is important in teaching. The role of inverse and incorrect problems with a pronounced practical orientation is also considered.

Keywords: digital transformation, mathematical thinking schemes, non-standard tasks, incorrect tasks.

References

1. *Vechtomov E. M., Susloparova (Petuhova) Ya. V. Reshenie logicheskih zadach kak osnova razvitiya myshleniya* [Solving logical problems as a basis for the development of thinking] // *Koncept* – Concept. 2012. No. 8 (August). Pp. 11–15. ART 12109. 1,2 Pp. Available at: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12109.htm.

2. *Gardner M. Est' ideya!* [I have an idea!] M. Mir (World). 1982.

3. *Klekovkin G. A., Maksyutin A. A. Zadachnyj podhod v obuchenii matematike* [Problem approach in teaching mathematics]. M.; Samara. Moscow State Pedagogical University. 2009.

4. *Selyutin V. D., Yaremko N. N. Obuchenie bakalavrov matematike na osnove ponyatiya "korrektnost'"* [Teaching bachelors mathematics based on the concept of "correctness"]. Orel. Orel State University n. a. I. S. Turgenev. 2019.

5. *Smirnov V. A., Smirnova I. M. Geometricheskie zadachi na razvitie kriticheskogo myshleniya* [Geometric problems for the development of critical thinking]. M. ICNMO. 2021.

6. *Testov V. A. Strategiya obucheniya matematike : monografiy* [Strategy of teaching mathematics : monograph]. M. Technological Business School. 1999.

7. *Testov V. A. Matematicheskaya odarennost' i ee razvitie* [Mathematical giftedness and its development] // *Perspektivy nauki i obrazovaniya : mezhdunarodnyj elektronnyj nauchno-prakticheskij zhurnal* – Prospects of science and education : international electronic scientific and practical journal. 2014. No. 6. Pp. 60–67. Available at: http://pnojournal.wordpress.com.

8. *Testov V. A. Ispol'zovanie potenciala matematicheskih zadach dlya razvitiya myshleniya uchashchihsya* [Using the potential of mathematical problems for the development of students' thinking] // *Razvivayushchij potencial matematicheskogo obrazovaniya: shkola – vuz : kollektivnaya monografiya* – Developing the potential of mathematical education: school – university : collective monograph / Solikamsk State Pedagogical Institute (branch) FSBEI VPO "PGNIU". Solikamsk. SSPI. 2015. Pp. 28–39.

9. *Testov V. A., Perminov E. A. Rol' matematiki v transdisciplinarnosti soderzhaniya sovremennogo obrazovaniya* [The role of mathematics in the transdisciplinarity of the content of modern education] // *Obrazovanie i nauka* – Education and Science. 2021. Vol. 23. No. 3. Pp. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34.

УДК 37.016:514 DOI 10.25730/VSU.0536.22.009

Совершенствование профессиональной подготовки будущих учителей математики при изучении геометрии

Л. В. Тимшина
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. Новые стандарты среднего образования уделяют большое внимание проектному методу. Актуальным становится поиск новых тем для проведения учебных исследований школьниками и подготовка к организации такой деятельности будущего педагога. Накопление образовательных ресурсов студентами – будущими учителями – возможно в рамках изучения курса «Геометрия», который напрямую связан с их профессиональной деятельностью. Нами предложены индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов при изучении раздела «Геометрические преобразования». Такие задания в дальнейшем можно адаптировать для работы со школьниками.

Ключевые слова: самостоятельная работа, профессиональная подготовка, геометрические преобразования.

Ведущей формой деятельности в вузе является учение, которое традиционно реализуется в форме лекций, практических занятий, семинаров и самостоятельной работы. На лекции, как правило, выносится наиболее важный в смысловом и структурном значении материал. Практические и семинарские занятия призваны углублять, расширять, детализировать знания, полученные на лекции, являться средством оперативной обратной связи, содействовать выработке навыков профессиональной деятельности.

В современных условиях проектная деятельность является одним из видов профессиональной деятельности, к которой по завершении обучения должен быть подготовлен выпускник – будущий педагог. Способность к проектной деятельности предполагает умение анализировать проблемы, ставить цели, разрабатывать и выбирать альтернативные решения поставленной задачи, оценивать последствия принятия решений, работать в команде [11]. Решающим здесь является индивидуальность личности, ее склонности и интересы.

На наш взгляд, развитие и совершенствование перечисленных умений возможно в процессе самостоятельной работы студентов. Самостоятельная работа имеет большие, чем другие типы занятий, возможности для удовлетворения индивидуальных образовательных запросов и потребностей обучающихся, так как имеется определенная свобода в выборе форм и содержания индивидуальных заданий, средств и методов работы.

Не менее важным является определение содержания проектных тем, которые будущий учитель сможет применить в своей трудовой деятельности. Опыт работы с будущими учителями математики и информатики показывает возможность использования в рамках самостоятельной работы по дисциплине «Геометрия» различных индивидуальных заданий. Опишем некоторые из них более подробно.

1. Самоподобные фигуры. Данное задание имеет интегративный характер и затрагивает вопросы геометрического моделирования. Исследуемым объектом является самоподобная фигура. Дадим краткие пояснения.

Фигуру F называют ***самоподобной***, если ее можно разрезать на несколько фигур $F1$, $F2$, … , Fn, каждая из которых подобна исходной. Необходимо для предложенной конкретной фигуры выполнить ее разбиение на подобные фигуры. Так как каждая фигура Fi подобна фигуре F, то имеется преобразование подобия h_i, переводящее фигуру F в фигуру Fi . Требуется, предварительно разместив F в системе координат, определить аналитическое задание каждого преобразования подобия. Далее, используя идею игры «Хаос» [4; 5; 10], составить компьютерную программу, результатом которой является изображение данной фигуры и ее частей.

2. Инверсия плоскости. В курсе вузовской геометрии изучаются различные виды преобразований евклидовой плоскости: движения, преобразования подобия, аффинные преобразования. Инверсия представляет собой более сложное преобразование геометрических фигур. Интересный результат дает инверсия невырожденных кривых второго порядка. Их образами являются различные «замечательные кривые», такие как строфоида, циссоида Диоклеса, улитка Паскаля, кардиоида, лемниската Бернулли [6]. Целью исследования является изучение инверсных образов равносторонней гиперболы, параболы, эллипса при различном расположении центра инверсии. Необходимо выполнить визуализацию образов рассматриваемых кривых, например, в программе GeoGebra.

3. Эллипс как фигура аффинно эквивалентная окружности. Инварианты аффинных преобразований позволяют изучать свойства фигур путем рассмотрения аффинно эквивалентной фигуры. Целью данного индивидуального задания является обоснование различных свойств эллипса [12]. Приведем некоторые из рассматриваемых свойств: геометрическим местом середин параллельных хорд эллипса является некоторый диаметр эллипса; параллелограммы, построенные на парах сопряженных полудиаметров эллипса, имеют одну и ту же площадь, равную площади прямоугольника, построенного на полуосях эллипса; площадь эллипса вычисляется по формуле $S=\pi ab$, где a и b полуоси эллипса.

4. Гомотетия в доказательствах геометрических теорем. Предлагается по учебным пособиям [2; 7] рассмотреть доказательства с использованием гомотетии теорем элементарной геометрии, которые достаточно редко рассматриваются в школьном курсе. Теорема Наполеона описывает свойства конфигурации, состоящей из трех правильных треугольников, извне построенных на сторонах произвольного треугольника. Точки пересечения медиан трех правильных треугольников являются вершинами равностороннего треугольника, центроид которого находится в точке пересечения медиан произвольного треугольника. Также гомотетия позволяет установить существование *окружности девяти точек* треугольника и доказать, что в треугольнике центроид, ортоцентр и центр описанной около треугольника окружности лежат на одной прямой.

5. Группы самосовмещений геометрических фигур. Понятие группы является одним из основных понятий математики. Природа элементов группы достаточно разнообразна. Обширный и очень важный класс групп составляют группы «самосовмещений» геометрических фигур, на их основе могут быть визуализированы различные абстрактные понятия теории групп [1].

6. Геометрические построения на плоскости. При решении геометрических задач на построение с помощью циркуля и линейки используются некоторые типичные ситуации применения метода геометрических преобразований [8]. Рекомендуется изменить расположение фигуры или ее частей. Рассмотреть точку как пересечение двух фигур, из которых одна является образом некоторой данной фигуры при геометрическом преобразовании. Построить фигуру, удовлетворяющую только некоторым условиям задачи, из нее искомая фигура может быть получена с помощью геометрического преобразования определенного вида. Иногда удается заметить, что при некотором преобразовании фигура переходит сама в себя. Отмеченное свойство фигуры дает возможность построения дополнительных ее элементов, не указанных в условии.

Данное индивидуальное задание предполагает рассмотрение типичных ситуаций и подбор комплекта задач по каждой из них. Также необходимо познакомиться с компьютерной программой Euclidea (http://www.euclidea.xyz) и оценить возможности ее использования для решения задач данного типа.

7. Задачи на нахождение геометрических мест точек. Целью выполнения данного задания является решение задач на нахождение множества, точки которого и только они обладают указанным свойством. Общий подход к решению предложенных задач состоит в том, что по условию задачи определяется множество точек, из которого искомое получается с помощью какого-либо геометрического преобразования. К таким задачам относятся, например, следующие:

1. На данном отрезке AC построены всевозможные прямоугольные треугольники с прямым углом C. Найти множество точек пересечения медиан этих треугольников.
2. На данном отрезке AC построены всевозможные треугольники ABC с одной и той же площадью. Найти множество точек пересечения медиан этих треугольников.
3. На данном отрезке AC построены всевозможные треугольники ABC, в которых медианы AF и CE взаимно перпендикулярны. Найти множество вершин B и множество оснований данных медиан.
4. Даны две точки A и B. Найти множество точек плоскости, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.
5. На данном отрезке AD построены всевозможные параллелограммы $ABCD$ так, что $AD = a$, $AB = в$. Найти множество точек пересечения диагоналей этих параллелограммов.
6. Даны прямая a и не принадлежащая ей точка C. Вершина A треугольника ABC лежит на прямой a. Треугольник вращается вокруг точки C с сохранением формы так, что вершина A скользит по прямой a. Какую линию при этом описывает вершина B?
7. Найти множество точек пересечения высот треугольников, вписанных в данную окружность.

Для индивидуальной работы по разделу «Геометрические преобразования» могут также быть предложены следующие темы [3; 7]: композиция движений, композиция гомотетий, движения пространства, алгебраическое изложение отдельных вопросов теории движений, аналитический способ задания преобразований и другие.

Достаточно редко среди заданий самостоятельной работы встречается **реферирование научной статьи или иной публикации.** Основные цели такого типа работы: научиться анализировать информацию и воспринимать научный стиль; выделять главную идею и доносить ее до слушателя в максимально сжатой форме; получить необходимые сведения об исследованиях в определенной области. Желательно предложить студенту соблюдать определенную структуру реферата.

Отражается тема и проблема работы, поставленная цель и предмет исследования.

Выполнена статья одним автором или коллективом авторов. Носит она теоретический или экспериментальный характер.

Какие в научном мире существуют точки зрения на предмет исследования.

Изложение основной сути научной работы. Используемые методы.

Какой результат достигнут. Какую ценность он имеет – теоретическую, практическую, экспериментальную или другую. Проанализировать выводы автора, привести свои умозаключения.

Из известных нам публикаций, имеющих интересующую нас тематику, будущим педагогам полезно ознакомиться, например, с очерками [9].

В процессе выполнения индивидуальных заданий происходит расширение багажа знаний и умений студентов по конкретной дисциплине, осваиваются новые методы познания, формируется индивидуальный стиль работы и личностные качества. Все это способствует профессиональному становлению будущего учителя математики.

Список литературы

1. *Александров П. С.* Введение в теорию групп. М. : Бюро Квантум, 2008. 160 с.

2. *Атанасян Л. С.* Геометрия. Доп. главы к учебнику 9 кл. : учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. Изд. 2-е, дораб. М. : Вита-Пресс, 2002. 174 с.

3. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия : в 2-х ч. Ч. I : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М. : Просвещение, 1986. 336 с.

4. *Долбилин Н.* Игра «Хаос» и фракталы // Квант. 1997. № 4. С. 2–8.

5. *Долбилин Н.* Самоподобные мозаики // Квант. 1998. № 2. С. 9–15.

6. *Лубягина Е. Н., Тимшина Л. В.* Опыт организации учебно-исследовательской деятельности студентов при изучении кривых второго порядка // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 70–84.

7. *Понарин Я. П.* Геометрия : учеб. пособие. Ростов-на-Дону : Феникс, 1997. 512 с.

8. *Рубанов И. С.* Восемь ремней для мотора, или Как применять геометрические преобразования к решению задач // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. Вып. 2. Киров : Изд-во Вятского госпедуниверситета, 2000.

9. *Скопец З. А.* Геометрические миниатюры / сост. Г. Д. Глейзер. М. : Просвещение, 1990. 224 с.

10. *Шеремет Г. Г.* Геометрические преобразования и фрактальная геометрия / Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет. Пермь, 2012. 176 с.

11. *Яковлева Н. Ф.* Проектная деятельность в образовательном учреждении : учебное пособие. Изд. 2-е, стер. М. : ФЛИНТА, 2014. 144 с.

12. *Яглом И. М., Ашкинузе В. Г.* Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. Ч. I. М. : 1962.

Improving the professional training of future teachers of mathematics in the study of geometry

L. V. Timshina

senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. New standards of secondary education pay great attention to the project method. The search for new topics for conducting educational research by schoolchildren and preparing for the organization of such activities of the future teacher becomes relevant. Accumulation of educational resources by students – future teachers – is possible within the framework of studying the course "Geometry", which is directly related to their professional activities. We have proposed individual tasks for independent work of students in the study of the section "Geometric transformations". Such tasks can be adapted to work with schoolchildren in the future.

Keywords: independent work, professional training, geometric transformations.

References

1. *Aleksandrov P. S. Vvedenie v teoriyu grupp* [Introduction to the theory of groups]. M. Bureau Quantum. 2008. 160 p.

2. *Atanasyan L. S. Geometriya. Dop. glavy k uchebniku 9 kl. : ucheb. posobie dlya uchashchihsya shkol i klassov s uglubl. izuch. matematiki* [Geometry. Additional chapters to the textbook 9 grade : textbook students of schools and classes with an advances course of mathematics] / L. S. Atanasyan, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev et al. 2nd publ., add. M. Vita-Press. 2002. 174 p.

3. *Atanasyan L. S., Bazylev V. T. Geometriya : v 2-h ch. Ch. I : ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. fak. ped. in-tov* [Geometry : in 2 parts. Pt. I : textbook. for students of physics and mathematics of fac. of ped. universities]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1986. 336 p.

4. *Dolbilin N. Igra "Haos" i fraktaly* [The game "Chaos" and fractals] // *Kvant* – Kvant. 1997. No. 4. Pp. 2–8.

5. *Dolbilin N. Samopodobnye mozaiki* [Self-similar mosaics] // *Kvant* – Kvant. 1998. No. 2. Pp. 9–15.

6. *Lubyagina E. N., Timshina L. V. Opyt organizacii uchebno-issledovatel'skoj deyatel'nosti studentov pri izuchenii krivyh vtorogo poryadka* [The experience of organizing educational and research activities of students in the study of second-order curves] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2017. Is. 2 (23). Pp. 70–84.

7. *Ponarin Ya. P. Geometriya : ucheb. posobie* [Geometry : tutorial]. Rostov-na-Donu. Phoenix. 1997. 512 p.

8. *Rubanov I. S. Vosem' remnej dlya motora, ili Kak primenyat' geometricheskie preobrazovaniya k resheniyu zadach* [Eight belts for a motor, or How to apply geometric transformations to solving problems] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical Bulletin of pedagogical colleges of the Volga-Vyatka region. Is. 2. Kirov. Vyatka State University Publishing House. 2000.

9. *Skopec Z. A. Geometricheskie miniatyury* [Geometric miniatures] / comp. G. D. Glazer. M. Prpsveshchenie (Enlightenment). 1990. 224 p.

10. *Sheremet G. G. Geometricheskie preobrazovaniya i fraktal'naya geometriya* [Geometric transformations and fractal geometry] / *Permskij gosudarstvennyj gumanitarno-pedagogicheskij universitet* – Perm State Humanitarian Pedagogical University. Perm. 2012. 176 p.

11. *Yakovleva N. F. Proektnaya deyatel'nost' v obrazovatel'nom uchrezhdenii : uchebnoe posobie*[Project activity in an educational institution : textbook]. 2nd ed,, ster. M. FLINTA. 2014. 144 p.

12. *Yaglom I. M., Ashkinuze V. G. Idei i metody affinnoj i proektivnoj geometrii* [Ideas and methods of affine and projective geometry. Pt. I]. M. 1962.

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 1 (24) (2022)

16+

Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964