УДК 517.926 DOI 10.25730/VSU.0536.23.001

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом понижения порядка

Коледин Виктор Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры гуманитарных,
естественно-научных и технических дисциплин, Южно-Уральский государственный университет, филиал.
Россия, г. Нижневартовск. ORCID: 0000-0002-8410-918X. E-mail: vikoled@mail.ru

Аннотация. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами традиционно является по ряду причин непростой задачей для студентов. В статье предлагается метод понижения порядка дифференциальных уравнений этого типа, сводящий задачу к дифференциальным уравнениям первого порядка, способы решения которых хорошо известны.

Ключевые слова: линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, интегрирующий множитель, понижение порядка дифференциального уравнения.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами традиционно вызывает у студентов большое количество вопросов и, как показывает опыт, 80–90 % студентов не могут справиться до конца с данным заданием. Причин, из-за которых так происходит, крайне много: от школьных пробелов в математике до чисто психологических проблем. Стандартный подход, прописанный в учебниках высшей математики, использующий метод неопределенных коэффициентов, довольно громоздок. Нахождение решения линейного неоднородного дифференциального уравнения требует выучивания макета частного решения дифференциального уравнения, выяснения кратности корня характеристического уравнения, работы с тригонометрическими функциями и комплексными числами, а также понимания, в каких случаях частное решение нужно искать так, а не иначе [3]. Возник вопрос, как упростить решение дифференциального уравнения, чтобы студенту было проще справиться с заданием. Ответом служит метод понижения порядка дифференциального уравнения: после некоторых преобразований с помощью замены переменной получается дифференциальное уравнение первого порядка, способов решения которого довольно много [1–3].

Пусть требуется решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

где p и q – постоянные коэффициенты.

Составим характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения: $k^2 + pk + q = 0$.

Рассмотрим случай, когда дискриминант характеристического уравнения неотрицателен, а значит, k_1 и k_2 – действительные числа. Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1k_2y = f(x) \text{ или } y'' - k_1y' - k_2(y' - k_1y) = f(x). \tag{2}$$

В результате получаем

$$(y' - k_1y)' - k_2(y' - k_1y) = f(x). \tag{3}$$

Уравнение (3) после замены g(x)= $y' - k_1y$ принимает вид

$$g'(x) - k_2g(x) = f(x). \tag{4}$$

Уравнение свелось к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка, которое можно решить, например, с помощью метода интегрирующего множителя $\mu(x)$.

$$\mu(x)g'(x) - k_2\mu(x)g(x) = \mu(x)f(x). \tag{5}$$

Интегрирующий множитель будем искать в таком виде, чтобы $k_2\mu(x) = \mu'(x)$. Тогда левую часть (5) можно преобразовать по формуле производной произведения:

$$\mu(x)g'(x) - \mu'(x)g(x) = \mu(x)f(x), \tag{6}$$

где

$$\mu(x) = e^{\int k_2 dx} = e^{k_2 x}. \tag{7}$$

Уравнение (6) перепишем в виде

$$\left(\mu(x)g(x)\right)' = \mu(x)f(x). \tag{8}$$

Интегрируя левую и правую часть (8) и выражая искомую функцию, имеем

$$g(x) = \frac{\int \mu(x)f(x)dx}{\mu(x)}. \tag{9}$$

Вернувшись к переменной y, получим линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$$y' - k_1 y = \frac{\int \mu(x)f(x)dx}{\mu(x)}. \tag{10}$$

Таким образом, с помощью замены переменной линейное дифференциальное уравнение второго порядка свели к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Рассмотрим приведенную теорию на примере.

Пример. Необходимо найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 2y' - 3y = x^2.$$

Решая характеристическое уравнение, находим его корни $k_1 = 3,\ k_2 = -1$. Зная корни, уравнение можно переписать в виде

$$y'' - 3y' + y' - 3y = x^2.$$

Сгруппируем слагаемые

$$\left(y'' + y'\right) - 3\left(y' + y\right) = x^2$$

и перепишем уравнение в виде

$$\left(y' + y\right)' - 3\left(y' + y\right) = x^2.$$

Сделаем замену

$$g = y' + y.$$

Тогда уравнение примет вид

$$g' - 3g = x^2.$$

Будем решать уравнение методом интегрирующего сомножителя, используя

$$\mu(x) = e^{-3x}.$$

Получаем

$$e^{-3x}g' - 3e^{-3x}g = e^{-3x}x^2.$$

Левая часть сворачивается по формуле производной произведения

$$\left(e^{-3x}g\right)' = e^{-3x}x^2.$$

Интегрируя обе части, получим

$$e^{-3x}g = \int e^{-3x}x^2 dx.$$

Применив метод интегрирования по частям и выразив g, имеем

$$g = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} + C_1 e^{3x}.$$

Возвращаемся к замене:

$$y' + y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} + C_1 e^{3x}.$$

Решая данное уравнение, получаем ответ:

$$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}+\frac{C_1}{4}e^{3x}+C_2e^{-x}.$$

Из этого решения нетрудно выделить, как общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, так и частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$$y_{чр}=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{14}{27} \text{ и } y_{о.о}=\frac{C_1}{4}e^{3x}+C_2e^{-x}.$$

Если решать данное дифференциальное уравнение стандартным образом, то отличие от данного ответа будет только в общем решении, а именно в виде произвольной постоянной C_1.

В заключении отметим, что предложенная идея понижения порядка линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами помогает, во-первых, закрепить методы решения дифференциальных уравнений первого порядка, а во-вторых, позволяет повысить процент студентов, доведших до конца решение дифференциального уравнения, поскольку действия при решении сводятся к элементарным. Алгоритм этих действий хорошо запоминается, а через практику хорошо усваивается.

Список литературы

1. Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М. : ЮНИТИ, 2002.

2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. пособие для втузов. Т. 1. М. : Интеграл-Пресс, 2002. 416 с.

3. *Шипачев В. С.* Высшая математика : учеб. пособие для вузов. Изд. 8-е, перераб. и доп. М. : Юрайт, 2021. 447 с.

Solution of a linear inhomogeneous differential equation of the second order with constant coefficients by the method of decreasing the order

Koledin Viktor Vladimirovich

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Humanities, Natural Sciences and Technical Disciplines, South Ural State University (branch).
Russia, Nizhnevartovsk. ORCID: 0000-0002-8410-918X. E-mail: vikoled@mail.ru

Abstract. Solving a linear inhomogeneous second-order differential equation with constant coefficients is traditionally a difficult task for students for a number of reasons. The article proposes a method for lowering the order of differential equations of this type, reducing the problem to differential equations of the first order, the methods of solving which are well known.

Keywords: linear inhomogeneous differential equation of the second order with constant coefficients, integrating factor, lowering the order of the differential equation.

References

1. *Vysshaya matematika dlya ekonomistov : ucheb. dlya vuzov* – Higher Mathematics for economists : studies. for universities / ed. by prof. N. S. Kremer. M. UNITY. 2002.

2. *Piskunov N. S. Differencial'noe i integral'noe ischislenie : ucheb. posobie dlya vtuzov. T. 1* [Differential and integral calculus : textbook manual for higher education institutions]. Vol. 1. M. Integral-Press. 2002. 416 p.

3. *Shipachev V. S. Vysshaya matematika : ucheb. posobie dlya vuzov. Izd. 8-e, pererab. i dop.* [Higher mathematics : textbook manual for universities. Ed. 8th, reprinted and exp.]. M. Yurayt. 2021. 447 p.