
МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 159.955

DOI 10.25730/VSU.0536.23.002

О диалогах Платона и методах восхождения от житейских понятий к научным

Когаловский Сергей Рувимович

кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики,
информатики и методики обучения, Шуйский филиал, Ивановский государственный университет.
Россия, г. Иваново. E-mail: askogal@yandex.ru

Аннотация. Диалоги Платона являются прекрасными образцами обсуждений учителя и ученика, ведущих ученика от наивных представлений к зрелому понятию. В заметке раскрываются используемые в них когнитивные механизмы. На этих механизмах основывается продуктивная стратегия приобщения учащихся к фундаментальным математическим понятиям. В заключительной части заметки мы обращаемся к образу пещеры как к метафорическому выражению состояния сознания познающего субъекта, в котором обострение его «внутреннего зрения» открывает возможность «увидеть» с позиции вненаходимости не только предмет исследования, но и себя как его познающего.

Ключевые слова: диалоги Платона, когнитивный диссонанс, обращенность к целому, понятие математической структуры, категория количества, образ пещеры как состояния обостренного «внутреннего зрения».

Диалоги Платона являются прекрасными образцами обсуждений учителя и ученика, ведущих ученика от наивных представлений, от житейского понятия к зрелому понятию. Рассмотрение их с метапредметных позиций позволяет усмотреть общую схему их построения и тем раскрыть используемые в них когнитивные механизмы. Эта схема такова:

1. Обсуждение исследуемого житейского понятия на обыденном уровне.

2. Осуществление собеседником-учителем столкновений с пограничными ситуациями, то есть с такими, в которых выявляется размытость содержания житейского понятия. Они создаются обращениями к таким предметам, в отношении которых выявляется принципиальная неразрешимость вопросов об их вхождении в объем этого понятия. Это порождает у собеседника-ученика когнитивный диссонанс, а с ним осознание необходимости уточнения исследуемого понятия и энергию направленности на его поиск.

3. Процесс уточнения этого понятия осуществляется как процесс восхождения к такому целому, в рамках которого, с позиций которого это понятие необходимо или, по крайней мере, целесообразно рассматривать. Находимое в рамках этого целого уточнение является, по сути, продуктивной моделью исходного житейского понятия, представляющей компонент или аспект этого целого. Оно исследуется как предмет освоения.

Эта схема не просто раскрывает используемые в платоновских диалогах когнитивные механизмы. Она раскрывает их в рамках раскрываемой ею логики процесса уточнения житейского понятия как логики процесса восхождения к подходящему целому и погружения рассмотрения исследуемого житейского понятия в рамки этого целого, исследование его с позиций этого целого, а тем самым как логики восхождения к системному подходу (диалоги Платона демонстрируют его начальные проявления). Абстрактной формой такого целого является понятие математической структуры по Бурбаки (точнее говоря, его элементарный вариант, обычно рассматриваемый в общей теории систем). Обращение к этому понятию есть «овнешнение» такой «внутренней» направленности описываемых процессов.

Понятие математической структуры относится к категории количества. И уже это говорит о месте и роли количественных (в современном понимании) планов в исследовательской деятельности, о том, что восхождение к конкретному, постижение сущности осуществимо (и выразимо) через обращения к количественным планам¹. Это метафорически выражает пифагорейский тезис «все есть число».

© Когаловский Сергей Рувимович, 2023

¹ Говоря здесь о количественных планах во множественном числе, мы имеем в виду в первую очередь то, что изучение объекта состоит в изучении не только его «собственных» свойств, но и его связей и отношений с внешними по отношению к нему объектами. К тому же и его «собственные» свойства познаваемы посред-

Здесь нелишне подчеркнуть, что категория количества представляется далеко не единственно понятиями числа, вычисления, измерения, величины. Вместе с другими философскими категориями она представляет формирующиеся и развивающиеся всеобщие формы действительного и возможного, бытия и мышления, знания, деятельности. И потому к ней должно относиться не только соответствующие онтологические (в традиционном понимании) планы, но и общие методы, характерные для исследований количественных планов, а значит, общие методы, общие формы математических исследований, не в последнюю очередь такие, как абстрагирование, схематизация, трансцендирование, идеализация, моделирование. Все это высвечивает место и роль гуманитарного плана во всякой научно-исследовательской деятельности. Роль субъектного начала в математической деятельности, в формировании фундаментальных математических понятий заставляет видеть в математике гуманитарную область знания. Как никакие другие области знаний математика использует радикальные абстрагирования, радикальные идеализации, радикальные трансцендирования, обращенности к возможным мирам. Идеальные методы исследования идеальных объектов способствуют обращенности к возможным мирам, а с нею обращенности к проблемам формирования и развития орудий исследований в таких мирах и «средств производства» таких орудий. В условиях использования идеальных способов изучения идеальных объектов, погруженных в идеальные миры, и приложений его результатов, в условиях нарастания разнообразия рассматриваемых объектов и методов их исследования происходит развитие субъектов такой деятельности, рождается новый тип мышления, новый тип рефлексии. Их развитие сопровождается развитием воображения, нарастанием дальновидения и дальнодействия мышления, нарастанием его многомерности и многоуровневости [3]. Нарастающее разнообразие исследуемых идеальных миров способствует и более глубокому постижению миров, ставших классическими, усмотрению их уникальности. Обращения к возможным мирам обогащают математику и как «часть физики» и ведут к далеко идущему ее развитию. Достижения математики в области формирования, развития и широкого использования идеальных орудий исследовательской деятельности и «средств производства» таких орудий делают ее важной «частью» эпистемологии. Как никакая другая область знаний математика использует и развивает способность человека «выходить за свои собственные границы и находить основания своего бытия вне той или иной культуры, идеологии, этноса, общества... Подлинное бытие личности... заключается... в постоянном преодолении любых границ, любых форм предметно-сущего» [1, с. 80].

Вбирая в себя предметное богатство, относящееся к категории количества, математика преобразует его в метапредметное богатство и развивает его, превращая в эффективные и широко используемые орудия поисково-исследовательской деятельности, в орудия восхождения от абстрактного предметного к конкретному метапредметному, в «средства производства» таких орудий. Выступая в качестве «средств производства» разнообразных орудий исследовательской деятельности, фигурируя в необозримо широком разнообразии научных и общекультурных контекстов и в предметных, и в орудийных ролях, фундаментальные понятия математики являют ее метапредметную и метаорудийную природу.

Но не слишком ли общим является такое понимание категории количества? Сообразуется ли оно с тем, что эта категория связана с «отображением общего в качественно однородных вещах и явлениях», с тем, что «чтобы выявить в них это общее, необходимо, во-первых, установить их однородность, т. е. показать, в каком именно отношении они эквивалентны между собой, во-вторых, выделить то свойство или отношение, по которому рассматриваемые вещи сравниваются, и абстрагироваться от других их свойств» [9]? Но разве любые объекты, рассматриваемые как принадлежащие какому-нибудь множеству, не качественно однородны в отношении принадлежности этому множеству? Да и «поскольку все явления в природе и человеческой истории существуют в пространстве и изменяются во времени, постольку они и могут рассматриваться... со стороны лишь количественных различий, а категория количества является универсальной, т. е. логической категорией, необходимой ступенькой познания действительности» [8]. Здесь уместно отметить и относимость логик к категории количества.

При исследовании проблем обучения математике обращение к диалогам Платона напрашивается как обращение к продуктивной стратегии восхождений к фундаментальным математическим понятиям, образующим несущий каркас математических знаний и арсенал несомых ими орудийных средств, к стратегии восхождений от эмпирического, или рассудочного уровня мышления на теоретический, на уровень разумного мышления, и его освоения. Эта стратегия выражается схемой, приведенной в начале статьи².

ством изучения его связей и отношений с внешними по отношению к нему объектами, а значит, посредством изучения этого объекта как компонента тех или иных математических структур.

² Средства реализации такой стратегии представлены, в частности, в [4; 5, с. 23–35; 7]. См. также [2, с. 39–48].

Конечно, форма воплощения этой стратегии, «тактические» средства ее воплощения не могут не быть иными, чем в диалогах Платона. Они не могут не соотносываться с местом и ролью логического плана в математической деятельности, с природой математики, с особенностями психологии развивающейся математической деятельности, с целями и средствами развивающего обучения. К тому же если в диалогах Платона начальные представления о предметах исследования и о тех целостностях, обращения к которым проясняют сущности этих предметов, уже имеются у собеседника-ученика (в силу его социализированности), то при обучении математике необходимо формировать и начальные представления, играющие роли истоков фундаментальных понятий, как их «предыстории».

Освоение фундаментального математического понятия – это, говоря метафорически, освоение молота вместе с наковальней, в их единстве. Этому не отвечает прямое введение такого понятия посредством его определения (даже снабженное предваряющими пояснениями) [см. 6; 7].

Процесс освоения такого понятия, долженствующего играть полифункциональную роль как на предметном, так и на метапредметных уровнях, не может быть линейным, не может не сопровождаться возвращениями к его началам (тогда как процесс развертывания диалогов Платона носит линейный или почти линейный характер). О важности предваряющих стадий восхождений к таким понятиям и о непродуктивности прямого их введения говорит и то, что более поздние, более продвинутое формы познавательной деятельности «требуют для своего появления примитивного фона, из которого они дифференцируются и из которого никогда полностью не отделяются... Согласно Х. Вернеру возврат... к примитивным формам познания... является необходимым механизмом дальнейшего развития» [14, с. 86]. Такой процесс не может не предваряться формированием «предыстории» понятия и не сопровождаться обращениями к представлениям, долженствующим служить истоками этого понятия [7]. Этим создается и возможность активного участия учащихся в таком процессе как субъектов учебной деятельности. «Предыстория» должна служить пред-«наковальней» для «молота» деятельности, направленной на «выковывание» понятия как орудия математической деятельности.

Процесс продуктивного освоения фундаментального математического понятия не может не быть, прежде всего, процессом его формирования, процессом многоступенного восхождения к нему вместе с постижением логики самого этого процесса. Последнее роднит его с системой обучения Эльконина – Давыдова в плане направленности на освоение учащимися теоретического мышления. Однако в отличие от системы Эльконина – Давыдова такой процесс широко использует развивающееся эмпирическое мышление как необходимый, как всепронизывающий компонент теоретического мышления, как форму его представления, как необходимое средство его развития.

Если «предыстория» такого понятия подобна камню, служащему пред-«наковальней» для его формирования, то крепкой «наковальней», пригодной для того, чтобы овладеть его широким использованием как «молота», для того чтобы этот процесс стал образцом формирования «кузнечных» орудий, является долженствующая осознаваться учащимися используемая метатеоретическая база.

Обращенность к метатеоретическому плану необходима для видения учащимися «несущей конструкции» процесса освоения такого понятия, для того чтобы посредством этого смочь «укорениться» на уровне теоретического мышления, осваивать его и далее. Она вместе с «предысторией» понятия является и необходимым средством формирования и освоения «наковальни».

Освоение учащимися фундаментальных математических понятий становится продуктивным посредством активного их участия в процессах восхождения к ним от наивных представлений, в процессах их формирования. Такой процесс – это процесс освоения и развития необходимых когнитивных механизмов и отправных представлений учащихся, сопровождаемый их многоступенными преобразованиями. Он ведет к смысловому скачку, несущему рождение понятия как творческого продукта в смысле А. Ф. Лосева [11]. Освоение сформированного понятия – это процесс формирования сопутствующих ему понятий, это процесс наращивания его связей с уже освоенными понятиями, это процесс расширения освоенной системы знаний и ее преобразования. Это процесс построения такого целого, в рамках которого формируемое понятие предстает как широко используемое эффективное орудие исследовательской деятельности и как эффективное средство производства таких орудий. Он протекает как процесс «вызревания» теоретического мышления в лоне развивающегося эмпирического мышления и не единожды сопровождается смысловыми скачками.

Результатом такого процесса является рождение целого как двуединства следующих его форм. Одна из них – это математическая структура, такая, что сформированное понятие выступает в ней либо как одно из ее ведущих, определяющих ее отношений, либо как отношение, определяемое через определяющие ее отношения. Вторая форма – это теория (или начала теории), представляющая сформированное понятие как эффективное орудие исследовательской деятельно-

сти и эффективное «средство производства» таких орудий и как несущая эффективные формы его представления в этих качествах.

Описанная стратегия – это не просто одна из эффективных стратегий освоения фундаментальных математических понятий, это и не просто «природосообразная» стратегия такого рода. Она необходима как стратегия, отвечающая целям развивающего обучения [7].

Если бытующие системы обучения формируют у учащихся платонистское понимание фундаментальных математических понятий и несомых ими методов как предзаданных, как имеющих онтологическую природу, то осознание того, что эти понятия имеют деятельностьную природу, что они формируются как модели представлений, имеющих деятельностьное происхождение, преобразует сознание учащихся, раскрепощает их как субъектов учебной деятельности, преобразует характер их мышления, пробуждая в них фантазию, воображение, творческое начало и необходимую для него высокую детскость [4]. Этому способствует формируемая у них описанными процессами релятивизация представлений, смыслов, оснований как на предметных, так и на метапредметных уровнях [4, глава 10].

Диалог о пещере играет особую роль в творчестве Платона. В нем «...мы имеем сокращенную транскрипцию всего платонизма. С необычайной интенсивностью используя удачно найденный образ, Платон в немногих словах запечатлевает все им постигнутое». В нем «с полной раздельностью устанавливается четыре различных духовных состояния: 1. Пребывание в узах на дне пещеры и почитание за истину теней. 2. Освобождение от уз и до мучительности трудное восхождение по крутым склонам к выходу из пещеры. 3. Постепенное, медленно завоевываемое зрение на истинные предметы, находящиеся вне пещеры и освещаемые солнцем. 4. Наконец, переход от предметов, лишь освещаемых солнцем, к самому солнцу...» – говорится в замечательной работе [15, с. 466].

Однако при всем том, что этот образ стал «столь животворным, столь властным... символом» [там же], при всем том, что «пещера навсегда стала внутренней реальностью человеческого духа» [там же], не менее естественным и не менее выразительным является использование его как метафорического выражения того состояния сознания познающего субъекта, в котором обострение его «внутреннего зрения» открывает возможность «видеть» предмет мышления с позиций вненаходимости по отношению не только к миру, в котором он пребывает, но и по отношению к самому себе как ищущему и познающему, с позиций направленности на восхождение к эйдосу³. Именно «в пещере» открывается возможность осуществления феноменологической редукции по Гуссерлю. Именно «в пещере» открывается возможность восхождений от обыденных, наивных представлений, от житейских понятий к научным понятиям как к их продуктивным моделям. «В пещере» осуществляется восхождение на теоретический уровень мышления. «Погружение в пещеру» – это погружение в «сумерки» радикального абстрагирования как средства восхождения к конкретному, как средства восхождения к сущности, открываемой и выражаемой на мета-метапредметном уровне. Такое восхождение начинается с первичного усмотрения «в сумерках входа в пещеру» формы «тени» исследуемого объекта и форм его исследования.

«Тени», отбрасываемые «извне» на вход в «пещеру», их формы, формы их «движений» – это то, что не «усматриваемо» «вне ее», «на свету». В погружении в «пещеру» начало идеи числа. В нем начало более высокой идеи, стоящей за идеей числа и метафорически выражаемой словом «число». В нем начало математической деятельности. В нем исток методологии математики. Обращенность к «теням» – это начальная форма обращенности к

категории количества, к количественным планам, являющимся всепронизывающими планами исследовательской деятельности.

«Углубление в пещеру» несет сосредоточение на количественных планах. Оно открывает возможность развития собственно математического плана, возможность формирования и развития орудий математической деятельности и отвечающих им форм исследования. «Углубление в пещеру» – это радикальное обострение «внутреннего зрения», способствующее усмотрению-открытию таких идеальных (трансцендентальных) форм и самого исследуемого предмета и методов его исследования, которые ведут к усмотрению его сущности. Это процесс, подобный феноменологической редукции (мы говорим здесь лишь о подобии феноменологической редукции, поскольку такой процесс неотделим от дидактических, прагматических, целевых и гуманитарных установок). Обращения к вопросам метаматематики, погружения в исследование ее проблематики (так же, как и усмотрения в ее достижениях орудий собственно математической деятельности) – это еще более радикальные погружения «во тьму пещеры».

³ Как замечено Ю. М. Лотманом, «стоит выделиться какому-либо уровню семиотического освоения мира, как в рамках его тотчас же намечается оппозиция... Без этого данный семиотический механизм оказывается лишним внутренней динамики и способным лишь передавать, но не создавать информацию» [12, с. 38].

Но не в «видении» в «пещере» как противопоставляемом «видению» «на свету», а в активном взаимодействии этих полярностей, несущем развитие и самих таких «видений» и их взаимодействий, исток всепронизывающей роли математики. В этом исток идеи математического моделирования. Шире говоря, в этом исток общей идеи моделирования. В этом исток всепронизывающей роли категории количества, ее всепронизывающей природы. В этом природа двойственности математики, о которой говорил фон Нейман. «Двоякий лик – подлинное лицо математики» [11, с. 88–95]. Точнее говоря, подлинное лицо математики – это активные и многосторонние взаимодействия ее ликов. Более правомерно говорить не о двух, а о трех ликах математики, о ее триединстве, а не двуединстве (что согласуется с трехуровневостью научных знаний [10]). Ее третьим ликом является метаматематика, та ее область, которая одновременно является метапредметной по отношению к ней.

Трансцендентальность фундаментальных математических понятий, их недоступность чувственному опыту делают ведущим средством их исследования обострение «внутреннего зрения» «в пещере» посредством обращений к логическим средствам, к многообразным формам взаимодействий синтаксического и семантического планов, а тем самым к многообразным формам взаимодействий анализа и синтеза, формального и содержательного, взаимодействий эмпирического мышления на трансцендентальном уровне и теоретического мышления. Не просто найти такие формы взаимодействий полярных методов научной деятельности, которые не использовались бы (в соответствующем виде) в математической деятельности, в исследованиях количественных планов. И это заставляет видеть в пифагорейском тезисе «все есть число» еще более глубокий смысл, выражаемый пониманием математики как $\mu\alpha\theta\eta\sigma\iota\varsigma$.

Список литературы

1. Волков В. Н. *Онтология личности*. Иваново : Изд-во ИвГУ, 2001. 378 с.
2. Когаловский С. Р. О ведущих планах обучения математике // Педагогика. 2006. № 1. С. 39–48.
3. Когаловский С. Р. О природе математики // Философские науки. 2017. № 6. С. 80–95.
4. Когаловский С. Р. *Онтогенетический подход к обучению школьников математике*. Иваново : Ивановский гос. университет, 2018. 316 с.
5. Когаловский С. Р. Об эмпирическом компоненте теоретического мышления // Школьные технологии. 2021. № 2. С. 23–35.
6. Когаловский С. Р. О филогенетическом и онтогенетическом подходах к обучению // Научный поиск: личность, образование, культура. 2022. № 1 (43). С. 3–13.
7. Когаловский С. Р. О методе восхождения учащихся к ведущим математическим понятиям // Вестник Ивановского государственного университета. 2022. Вып. 2. С. 41–62.
8. Количество // *Философская энциклопедия*. Т. 2. М. : Советская энциклопедия, 1962. 575 с.
9. Количество // *Новая философская энциклопедия*. М. : Мысль, 2001.
10. Лебедев С. А. Уровни научного знания // *Вопросы философии*. 2010. № 1. С. 62–75.
11. Лосев А. Ф. *Диалектика творческого акта (краткий очерк)* // Контекст 1981. М. : Наука, 1982. С. 48–78.
12. Лотман Ю. М. *Избранные статьи* : в 3 т. Т. 1. Статьи по семиотике и типологии культуры. Таллинн, 1992.
13. Нейман Дж. фон. *Математик* // *Природа*. 1983. № 2. С. 88–95.
14. Чуприкова Н. И. *Психология умственного развития: Принцип дифференциации*. М. : Столетие, 1997. 480 с.
15. Эрн В. Ф. *Верховное постижение Платона* // В. Ф. Эрн. Сочинения. М. : Правда, 1991. С. 463–532.

About Plato's dialogues and methods of ascent from everyday concepts to scientific ones

Kogalovsky Sergey Ruvimovich

PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Mathematics,
Computer Science and Teaching Methods, Shuisky Branch, Ivanovo State University.
Russia, Ivanovo. E-mail: askogal@yandex.ru

Abstract. Plato's dialogues are excellent examples of discussions between a teacher and a student, leading a student from naive ideas to a mature concept. The article reveals the cognitive mechanisms used in them. These mechanisms are the basis for a productive strategy of introducing students to fundamental mathematical concepts. In the final part of the note, we turn to the image of the cave as a metaphorical expression of the state of consciousness of the cognizing subject, in which the sharpening of his "inner vision" opens up the opportunity to "see" not only the subject of the study, but also himself as his cognizer from the position of non-occurrence.

Keywords: Plato's dialogues, cognitive dissonance, appeal to the whole, the concept of mathematical structure, the category of quantity, the image of a cave as a state of acute "inner vision".

References

1. Volkov V. N. *Ontologiya lichnosti* [Ontology of personality]. Ivanovo. Publishing House of IvSU. 2001. 378 p.
2. Kogalovskij S. R. *O vedushchih planah obucheniya matematike* [About the leading plans of teaching mathematics] // *Pedagogika – Pedagogy*. 2006. No. 1. Pp. 39–48.
3. Kogalovskij S. R. *O prirode matematiki* [On the nature of mathematics] // *Filosofskie nauki – Philosophical Sciences*. 2017. No. 6. Pp. 80–95.
4. Kogalovskij S. R. *Ontogeneticheskij podhod k obucheniyu shkol'nikov matematike* [Ontogenetic approach to teaching mathematics to schoolchildren]. Ivanovo. Ivanovo State University. 2018. 316 p.
5. Kogalovskij S. R. *Ob empiricheskom komponente teoreticheskogo myshleniya* [On the empirical component of theoretical thinking] // *Shkol'nye tekhnologii – School technologies*. 2021. No. 2. Pp. 23–35.
6. Kogalovskij S. R. *O filogeneticheskom i ontogeneticheskom podhodah k obucheniyu* [On phylogenetic and ontogenetic approaches to learning] // *Nauchnyj poisk: lichnost', obrazovanie, kul'tura – Scientific search: personality, education, culture*. 2022. No. 1 (43). Pp. 3–13.
7. Kogalovskij S. R. *O metode voskhozhdeniya uchashchihya k vedushchim matematicheskim ponyatiyam* [On the method of students' ascent to the leading mathematical concepts] // *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta – Herald of Ivanovo State University*. 2022. Is. 2. Pp. 41–62.
8. *Kolichestvo – Quantity* // *Filosofskaya enciklopediya – Philosophical Encyclopedia*. Vol. 2. M. Soviet Encyclopedia. 1962. 575 p.
9. *Kolichestvo – Quantity* // *Novaya filosofskaya enciklopediya – New philosophical encyclopedia*. M. Mysl (Thought). 2001.
10. Lebedev S. A. *Urovni nauchnogo znaniya* [Levels of scientific knowledge] // *Voprosy filosofii – Questions of philosophy*. 2010. No. 1. Pp. 62–75.
11. Losev A. F. *Dialektika tvorcheskogo akta (kratkij ocherk)* [Dialectics of the creative act (a brief essay)] // *Kontekst 1981 – Context 1981*. M. Nauka (Science). 1982. Pp. 48–78.
12. Lotman Yu. M. *Izbrannye stat'i : v 3 t. T. 1. Stat'i po semiotike i tipologii kul'tury* [Selected articles : in 3 vols. Vol 1. Articles on semiotics and typology of culture]. Tallinn. 1992.
13. Neiman J. von. *Matematik* [Mathematician] // *Priroda – Nature*. 1983. No. 2. Pp. 88–95.
14. Chuprikova N. I. *Psihologiya umstvennogo razvitiya: Princip differenciacii* [Psychology of mental development: The principle of differentiation]. M. Stoletie (Century). 1997. 480 p.
15. Ern V. F. *Verhovnoe postizhenie Platona* [The supreme comprehension of Plato] // *V. F. Ern. Sochineniya* [Works]. M. Pravda (Truth). 1991. Pp. 463–532.