МАТЕМАТИКА

УДК 519.175.3 DOI 10.25730/VSU.0536.24.001

Об экспоненциальном росте числа конечных асимметричных гамильтоновых графов

Перминов Евгений Александрович[1], Капленко Алексей Владимирович[2]
[1]доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры высшей математики и физики, Уральский технический институт связи и информатики.
Россия, г. Екатеринбург. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru
[2]студент, Уральский технический институт связи и информатики.
Россия, г. Екатеринбург. E-mail: kaplenko595@gmail.com

Аннотация. Комбинаторный анализ различных алгебраических систем и их свойств является актуальной проблемой современной алгебры. В ряде работ изучалась функция роста алгебраических систем, которая для заданного натурального n указывает число n-элементных конечных алгебраических систем заданного вида.

Во многих работах исследовалась также актуальная проблема изучения различных преобразований алгебраических систем. В частности, исследовалось, насколько «богаты» или, наоборот, «бедны» рассматриваемые алгебраические системы преобразованиями того или иного вида.

В статье изучаются асимметричные гамильтоновы графы, обладающие только тождественным автоморфизмом. В статье доказано, что является экспоненциальной функция роста асимметричных гамильтоновых графов.

Ключевые слова: конечные асимметричные графы, функция роста.

Введение. Одной из актуальных проблем современной алгебры является изучение различных комбинаторных характеристик алгебраических систем. Наиболее известной из них является функция роста, которая для заданного натурального n указывает число -элементных конечных алгебраических систем заданного вида. В монографии Ф. Харари [5] можно найти много примеров функций роста, указывающих для каждого натурального n число n-элементных графов того или иного вида. О. А. Степанянц изучались функции роста конечных подгрупп разрешимых групп [3]. А. В. Мелешкиным исследовалась асимптотика роста инверсных и вполне регулярных полугрупп [1]. И. Трофимовым изучались другие интересные аналоги функций роста групп, луп, полугрупп, графов (см. [4]).

Для многих классов алгебраических систем задача нахождения функций роста оказалась очень трудной и нерешенной до сих пор. Например, не найдены такие функции, указывающие для каждого натурального n число -элементных различных конечных полугрупп, групп, колец, решеток, различных видов графов (гамильтоновых графов, турниров и др.). Поэтому вместо нахождения функции роста решается задача нахождения достаточно «хороших» нижней или верхней оценок числа -элементных алгебраических систем. А именно, устанавливается, что для данного натурального n существует не менее $g(n)$ или не более $h(n)$ алгебраических систем из заданного класса с n элементами, где $g(n)$ и $h(n)$ – некоторые функции натурального аргумента n.

Далее, во многих работах исследовалась также актуальная проблема изучения различных преобразований алгебраических систем, являющихся одним из эффективных средств их изучения. Одна из точек зрения здесь состоит в том, чтобы интересоваться, насколько богаты рассматриваемые алгебраические системы преобразованиями того или иного вида. На одном полюсе находятся алгебраические системы, имеющие много эндоморфизмов или автоморфизмов фиксированного вида (типичный пример – системы с транзитивной группой автоморфизмов), на другом – системы, любой их эндоморфизм или автоморфизм тривиален в некотором смысле. Например, известно более 10 работ, в которых изучались алгебраические системы, обладающие одним инъективным автоморфизмом. Такое условие для автоморфизмы линейно упорядоченных множеств исследовалось А. Г. Пинусом [2], для булевых алгебр S. Shelah [10].

Граф называется *асимметричным* [9], если он обладает только тождественным автоморфизмом. Из работы [8] следует, что для любого кардинала $\alpha \geq 7$ существует асимметричный неориентированный граф мощности α. В работах [6] и [7] установлено наименьшее и наибольшее число ребер, который может иметь конечный асимметричный граф того или иного вида с заданным числом вершин.

Важными видами графов являются гамильтоновы графы. В статье найдена нижняя оценка $g(n)$ числа асимметричных n-вершинных гамильтоновых графов. А именно доказана:

Теорема. Для любого натурального $n \geq 8$ существует 2^{n-8} асимметричных гамильтоновых графов с n вершинами.

Эта оценка свидетельствует о том, что является экспоненциальной функция роста числа n-вершинных асимметричных гамильтоновых графов.

Обозначим через $AutG$ группу всех автоморфизмов графа, через $|AutG|$ – число элементов этой группы.

Пусть K – некоторый класс графов. Граф G с n вершинами из класса K называется *симметричным* в этом классе, если не существует другого графа D из K с n вершинами такого, что $|Aut\mathrm{D}| > |AutK|$. Доказано:

Предложение. Для любого натурального n существует симметричный n-вершинный гамильтонов граф.

Необходимые определения. Далее всюду рассматриваются только обыкновенные (простые) графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Пусть дан граф $G =< V, E >$, где V – множество вершин и E – множество его ребер. Через (a, b) будем обозначать ребро, соединяющее в графе G инцидентные вершины $a, b \in E$.

Определение 1. Граф называется *гамильтоновым*, если существует цикл, содержащий все вершины графа.

Определение 2. Если при биекции φ множества вершин V_1 графа $G_1 = < V_1, E_1 >$ в множество вершин V_2 графа $G_2 =< V_2, E_2 >$ для любых вершин $a, b \in G_1$ ребро (a, b) отображается в ребро $(\varphi a, \varphi b)$, то биекция φ называется изоморфизмом графа G_1 в граф G_2. При этом графы G_1 и G_2 называются изоморфными.

Определение 3. Изоморфизм графа G в этот же граф G называется *автоморфизмом* этого графа.

Свойство автоморфизма. Вершина графа степени n при автоморфизме графа отображается в вершину той же степени.

Доказательство очевидно.

Определение 4. *Тождественным* называется автоморфизм φ графа $G =< V, E >$ такой, что $\varphi a = a$ для любой вершины $a \epsilon V$.

Определение 5. Пусть в графе G имеется вершина a такая, что при любом автоморфизме φ графа $\varphi a = a$. Таким образом, φ на вершине a действует как тождественный автоморфизм. Будем называть такую вершину кратко *неподвижной*.

Доказательства результатов. Теорема. Для любого натурального $n \geq 8$ существует 2^{n-8} асимметричных гамильтоновых графов G_n с n вершинами.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\} \cup \{b_i \text{ и } 1 \leq i \leq k\}.$$

Определим на A обыкновенный граф $G_k^m =< V, E >$ следующим образом:

1) Подмножеством E_1 множества ребер E графа G_k^m является следующее подмножество: $\{(a_1, a_2), (a_1, a_5), (a_1, a_6), (a_1, a_4), (a_1, a_8), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_3, a_6), (a_4, a_7), (a_7, b_n), (a_8, b_1)\} \cup \{(b_i, b_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq i+1 \leq k\}$.

2) Выберем в k-элементном множестве ребер $B = (b_i \mid i \in N \text{ и } 1 \leq i \leq k)$ произвольное его непустое подмножество M. Тогда дополним множество E_1 ребер графа G_k^m следующим подмножеством:

$$E_2 = (a_1, b_j), \text{ где вершина } b_j \text{ принадлежит } M.$$

Таким образом, множеством всех ребер полученного таким образом графа G_k^M является множество

$$E = E_1 \cup E_2.$$

Заметим, что для любого j вершина b_j из множества M его ребер является вершиной степени 3.

Далее для удобства доказательства теоремы ребро (a_1, b_j) будем обозначать более просто (a_1, j).

Как известно, множество всех подмножеств -элементного множества

равно $\mathrm{C}_k^0 + \mathrm{C}_k^1 + \cdots + \mathrm{C}_k^{k-1} + \mathrm{C}_k^k = 2^k$. Поэтому множество всех подмножеств множества ребер B равно 2^k. Следовательно, число всех графов G_k^M тоже равно 2^k.

Из определения графа G_k^M следует, что в цепи этого графа с вершинами 1, 2, …, k−1, k все вершины, кроме вершин из M, имеют степень 2.

Граф G_k^M при $k = 3$ и $M = \{2, 3\}$ изображен на рис. 1.

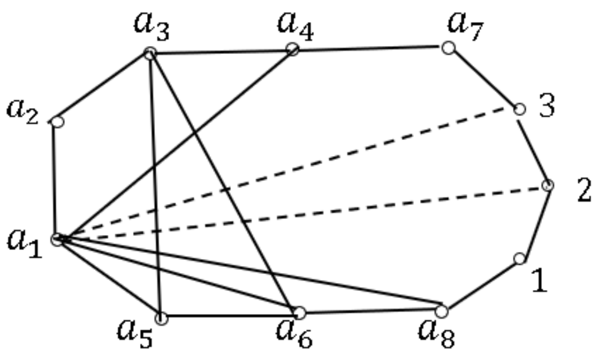

Рис. 1. Граф G_k^M при $k = 3$ и $M = \{2, 3\}$

Очевидно, на G_k^M существует цикл, полностью определяемый последовательностью своих вершин a_1, a_5, a_6, a_8, 1, 2, … $k-1, k, a_7, a_4, a_3, a_2$. Поэтому граф G_k^M является гамильтоновым.

Договоримся далее ребро (u, v) графа G_k^M обозначать более удобно для рассуждений как $u \leftrightarrow v$. Символ $\leftrightarrow$ обозначает, что вершины u, v инцидентны.

Докажем, что граф G_k^M – асимметричный для любого множества M. Для доказательства введем понятие неподвижной вершины графа, а именно вершины c, на которую любой автоморфизм φ графа действует как тождественный (т. е. $\varphi c = c$).

Пусть φ – произвольный автоморфизм этого графа. Так как подмножество M непустое, в G_k^M имеется единственная вершина a_1 степени 5. Поэтому $\varphi a_1 = a_1$ и вершина a_1 является *неподвижной.*

Из $a_1 \leftrightarrow a_2$ следует $a_1 \leftrightarrow \varphi a_2$. Так как степень a_2 равна 2, то, очевидно, возможно только $\varphi a_2 = a_2$. Следовательно вершина a_2 также является неподвижной.

Так как $a_2 \leftrightarrow a_3$ и вершина a_2 неподвижная, справедливо $a_2 \leftrightarrow \varphi a_3$, откуда ввиду степени 4 вершины a_3 следует что $\varphi a_3 = a_3$ и вершина a_3 неподвижная.

Из $a_3 \leftrightarrow a_4$ и $\varphi a_3 = a_3$ следует $a_3 \leftrightarrow \varphi a_4$. Так как степень a_4 равна 3, то возможно только $\varphi a_4 \in \{a_4, a_5\}$.

Предположим, что $\varphi a_4 = a_5$ Тогда из $a_4 \leftrightarrow a_7$ вытекает $a_5 \leftrightarrow \varphi a_7$. Но степень вершины a_7 равна 2, поэтому обнаруживаем противоречие. Следовательно, $\varphi a_4 = a_4$, поэтому $\varphi a_5 = a_5$,и таким образом вершины a_4 и a_5 неподвижные.

Так как $a_1 \leftrightarrow a_6$ и вершина a_1 неподвижная, имеем $a_1 \leftrightarrow \varphi a_6$. Так как степень a_6 равна 4, возможно только, что $\varphi a_6 \in \{a_3, a_6\}$. Но вершина a_3 неподвижная, следовательно, $\varphi a_6 = a_6$, и вершина тоже a_6 неподвижная.

Из $a_4 \leftrightarrow a_7$ и $\varphi a_4 = a_4$ следует $a_4 \leftrightarrow \varphi a_7$. Так как степень a_7 равна 2, то возможно только $\varphi a_7 = a_7$, и вершина a_7 неподвижная.

Поскольку $a_6 \leftrightarrow a_8$ и $\varphi a_6 = a_6$, получаем, что $a_6 \leftrightarrow \varphi a_8$. Степень a_8 равна 3, то возможно только $\varphi a_8 \in \{a_5, a_8\}$. Но вершина a_5 неподвижная, вершина a_8 также неподвижная.

В силу неподвижности множества вершин $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ можно доказать по индукции, что цепь из вершин $1 \le i \le k-1$ при произвольном автоморфизме φ отображается в себя.

База индукции. Рассмотрим вершину 1 и докажем, что $\varphi 1 = 1$. Так как $1 \leftrightarrow a_8$ имеем $\varphi 1 \leftrightarrow a_8$, откуда возможно лишь $\varphi 1 \in \{1, a_6, a_1\}$. Но вершины a_6, a_1 неподвижные, поэтому $\varphi 1 = 1$.

Шаг индукции. Предположим, что доказано $\varphi(m) = m$ для некоторого m, и докажем, что $\varphi(m+1) = m+1$. Из $m \leftrightarrow m+1$ и $\varphi(m) = m$ вытекает, что

$m \leftrightarrow \varphi(m+1)$. Поэтому возможно лишь $\varphi(m+1) \in \{m, a_1\}$. Но вершины $1, a_1$ неподвижные, поэтому $\varphi(m+1) = m+1$.

Таким образом, элементы цепи из вершин $1 \le i \le k-1$ являются неподвижными. Тогда доказано, что неподвижны все вершины графа G_k^M, кроме k. Поэтому очевидно, что из $k \leftrightarrow a_7$ вытекает $\varphi k = k$.

Напомним, в графе G_k^M, кроме вершин i $(1 \le i \le k)$ в нем есть вершины a_j $(1 \le j \le 8)$. Полагая $n = k + 8$, получаем асимметричный гамильтонов граф G_n с n вершинами. Так как число подмножеств -элементного множества ребер B равно 2^k, очевидно, что число графов G_n для произвольного натурального $n \ge 8$ равно 2^{n-8}.

Теорема доказана.

Предложение. Для любого натурального n существует симметричный n-вершинный гамильтонов граф.

Доказательство. Рассмотрим полный n-вершинный граф $G =< V, E >$, где $\{V = \{a_k \mid 1 \le k \le n\}$. Очевидно, в G есть цикл $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n, a_1$, содержащий каждую вершину G. Поэтому граф G является гамильтоновым. Поскольку граф G – полный, любая подстановка на множестве его вершин является автоморфизмом графа. Следовательно, группа автоморфизмов $AutG$ графа G есть симметрическая группа S_n подстановок на множестве его вершин. Следовательно, граф G – симметричный.

Список литературы

1. *Мелешкин А. В.* Регулярные полугруппы полиномиального роста // Матем. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 2. С. 58–64.

2. *Пинус А. Г.* О числе попарно несравнимых порядковых типов // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 225–234.

3. *Степанянц О. А.* О росте конечных подгрупп разрешимых групп // Вестник Моск. ун-та. 2002. Сер. 1. Матем., мех. № 6. С. 15–19.

4. *Трофимов В. И.* Функции роста алгебраических систем : дисс. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск : НГУ, 1982. 10 с.

5. *Харари Ф.* Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. М. : Мир, 1977. 324 с.

6. *Baron G*. Uber asymmetrische graphen // Math. Nachr. 1970. V. 46. № 1–6. S. 25–46.

7. *Frucht R., Allan G., Quintas L.* The least number of edges for graphs having automotphism group of order three // Lect. Notes Math. 1971. Vol. 186. Pp. 25–46.

8. *Hedrlin Z., Pultr A.* Symmetric relation (undirected graph) with given semigroup // Monatsh. Math. 1965. Vol. 69. № 4. Pp. 318–322.

9. *Pultr A., Trnkowa V.* Combinatorial, algebraic and topoiogical representations of groups, semigroups and categories. Prague : Academia, 1980. 372 p.

10. *Shelah S.* Why there many nonisomorphic models unsuperstable theories // In Proceeding of the Inter. Congress of Math. Vancouver, 1974. Pp. 553–557.

On the exponential growth of the number of finite asymmetric Hamiltonian graphs

Perminov Evgeny Alexandrovich[1], Kaplenko Alexey Vladimirovich[2]

[1]Doctor of Pedagogical Sciences, PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, professor of the Department of Higher Mathematics and Physics, Ural Technical Institute of Communications and Informatics. Russia, Yekaterinburg. ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

[2]student, Ural Technical Institute of Communications and Informatics. Russia, Yekaterinburg. E-mail: kaplenko595@gmail.com

Abstract. Combinatorial analysis of various algebraic systems and their properties is an urgent problem of modern algebra. In a number of works, the growth function of algebraic systems has been studied, which, for a given natural n, indicates the number of n-element finite algebraic systems of a given type.

In many works, the actual problem of studying various transformations of algebraic systems has also been investigated. In particular, it was investigated how "rich" or, conversely, "poor" the considered algebraic systems are with transformations of one kind or another.

The paper studies asymmetric Hamiltonian graphs with only an identical automorphism. The article proves that the exponential growth function of asymmetric Hamiltonian graphs is.

Keywords: finite asymmetric graphs, growth function.

References

1. *Meleshkin A. V. Regulyarnye polugruppy polinomial'nogo rosta* [Regular semigroups of polynomial growth] // *Matem. zametki* – Matem. notes. 1990. Vol. 47. Is. 2. Pp. 58–64.

2. *Pinus A. G. O chisle poparno nesravnimyh poryadkovyh tipov* [On the number of pairwise incomparable ordinal types] // *Sib. matem. zhurn.* – Siberian mathematical journal. 1973. Vol. 14. No. 1. Pp. 225–234.

3. *Stepanyanc O. A. O roste konechnyh podgrupp razreshimyh grupp* [On the growth of finite subgroups of solvable groups] // *Vestnik Mosk. un-ta* – Herald of Moscow Univ. 2002. Ser. 1. Math., mech. No. 6. Pp. 15–19.

4. *Trofimov V. I. Funkcii rosta algebraicheskih sistem : diss. kand. fiz.-mat. nauk* [Growth functions of algebraic systems : diss. … PhD in Physical and Mathematical Sciences]. Novosibirsk. NSU, 1982. 10 p.

5. *Harari F. Perechislenie grafov* [Enumeration of graphs] / F. Harari, E. Palmer. M. Mir, 1977. 324 p.

6. *Baron G*. Uber asymmetrische graphen // Math. Nachr. 1970. V. 46. No. 1–6. Pp. 25–46.

7. *Frucht R., Allan G., Quintas L.* The least number of edges for graphs having automotphism group of order three // Lect. Notes Math. 1971. Vol. 186. Pp. 25–46.

8. *Hedrlin Z., Pultr A.* Symmetric relation (undirected graph) with given semigroup // Monatsh. Math. 1965. Vol. 69. No. 4. Pp. 318–322.

9. *Pultr A., Trnkowa V.* Combinatorial, algebraic and topoiogical representations of groups, semigroups and categories. Prague : Academia, 1980. 372 p.

10. *Shelah S.* Why there many nonisomorphic models unsuperstable theories // In Proceeding of the Inter. Congress of Math. Vancouver, 1974. Pp. 553–557.