УДК 37.016:514 DOI 10.25730/VSU.0536.24.004

О задачах повышенной трудности по элементарной геометрии

Тимшина Лариса Вячеславовна
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. Статья имеет практический характер. Представлен опыт организации познавательной деятельности студентов-математиков, будущих педагогов, при решении задач элементарной геометрии повышенной трудности. В качестве задач выбраны олимпиадные геометрические задачи для 8 класса уровня региональной олимпиады. Работа с такими задачами происходит на основе опорных планиметрических задач, которые предъявляются студентам при организации повторения школьной математики.

Ключевые слова: элементарная геометрия, опорная задача, задачи повышенной трудности.

Традиционным направлением внеурочной работы в общеобразовательной школе являются предметные олимпиады. Проведение олимпиад повышает интерес обучающихся к школьным дисциплинам и задает высокие требования к качеству их преподавания. В настоящее время роль предметных олимпиад возросла в связи с новыми правилами приема в высшие учебные заведения. Успешно выступившие на олимпиадах обучающиеся имеют преимущества при поступлении в вузы.

Подготовка школьников к математическим олимпиадам разного уровня – один из видов профессиональной деятельности педагога. Этот вид деятельности характеризуется особыми требованиями к содержанию обучения, формам и методам учебной работы. Эффективность от осуществляемого педагогического руководства деятельностью школьников зависит, в частности, от умения учителя решать олимпиадные задачи, которые являются задачами повышенной трудности. Учитель должен сам уметь решать задачи более высокого уровня, чем школьная программа, и предложить определенный подход к освоению олимпиадных задач школьникам. Мы считаем, что студентов, будущих учителей математики, необходимо приближать в той или иной мере к олимпиадной математике, соответствующим образом организуя их познавательную деятельность. Основной ориентир в такой деятельности – сформировать умения по решению олимпиадных задач.

Изучение различной литературы подходящей тематики [4; 7; 13; 14] позволяет сделать вывод, что важнейшим содержанием подготовки является анализ олимпиадных заданий прошлых лет. Он ориентирует студентов на олимпиадный уровень, способствует умению применять знания в новых нестандартных ситуациях. Работая с олимпиадными задачами, студенты совершенствуют свои математические умения, формируют базу олимпиадных заданий. Успешность в самостоятельном решении олимпиадных задач способствует положительной мотивации, развивает интерес.

Особенности каждого предмета обусловливают специфику освоения предметных знаний и умений. Для решения математических олимпиадных задач большое значение имеет развитый математический кругозор, владение математическим аппаратом, знание основных приемов, способов решения задач [6; 8; 9]. В предыдущих публикациях нами была затронута тема опорных планиметрических задач, с использованием которых можно организовать повторение теоретического и практического материала школьной геометрии [11]. В качестве опорных приведены следующие геометрические факты и приемы решения: равенство отрезков касательных, проведенных к окружности, описанный четырехугольник; взаимное расположение окружностей; свойства выпуклого четырехугольника; медианы и площадь, метод площадей; переход к другой фигуре. В дальнейшем опорные задачи позволяют осуществлять более целенаправленный поиск решения задач элементарной геометрии или дают возможность найти более рациональный способ решения. Работа с опорными задачами имеет для студентов определенную новизну в актуализации геометрических знаний. На основе опорных задач можно выстраивать серии взаимосвязанных задач, тем самым создавая определенный методический багаж для будущей педагогической деятельности.

Кроме того, что метод опорных задач способствует осознанию информации, формирует умения и навыки решения, он также создает основу для творческого применения знаний в новой ситуации. Хорошей тренировкой является здесь работа с олимпиадными геометрическими задачами.

Совместно со студентами педагогами была поставлена задача. Решить или рассмотреть предложенные решения и проанализировать олимпиадные геометрические задачи для 8 класса из книги [4]. Решение таких задач, а также некоторых задач для 9 класса регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике показало, что выявленные нами ранее опорные задачи и геометрические конфигурации позволяют придумать, понять направление поиска решения.

Приведем следующие примеры.

Задача 1. Внутри острого угла расположен выпуклый четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, выполняется условие: сумма расстояний от вершин A и C до этой прямой равна сумме расстояний от вершин B и D до этой же прямой. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Решение. Построим отрезки, длины которых равны расстояниям от вершин данного четырехугольника до сторон угла (рис. 1).

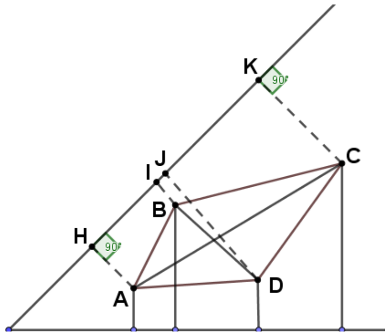

Рис. 1. Чертеж к задаче 1

Например, AH, CK, BI, DJ. Каждый из этих отрезков перпендикулярен стороне HK угла. Запишем условие задачи $AH+CK=BI+DJ$ – суммы расстояний от вершин A и C, а также от вершин B и D до одной из сторон угла равны. Рассматривая полученный чертеж, замечаем, что фигура $AHKC$ является в общем случае прямоугольной трапецией. Выражение $AH+CK$ определяет сумму оснований. Аналогично для прямоугольной трапеции $BIJD$: сумма $BI+DJ$ является суммой оснований. Половины указанных сумм равны длине средних линий трапеций $AHKC$ и $BIJD$ соответственно. В данной задаче длина средней линии отражает расстояние от стороны угла до середины каждой из диагоналей четырехугольника $ABCD$. Таким образом, середины диагоналей находятся на прямой, параллельной одной из сторон угла. Рассуждая аналогично, заключаем, что по отношению ко второй стороне угла середины диагоналей данного четырехугольника также расположены на параллельной этой стороне прямой. Такая ситуация возможна, когда середины диагоналей совпадают. Но в этом случае данный четырехугольник является параллелограммом.

Задача 2. Пусть A_1 и C_1 – проекции вершин A и С треугольника ABC на биссектрису внешнего угла при вершине B соответственно. Докажите, что отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются на биссектрисе угла ABC треугольника ABC. *Решение.* При изображении проекций вершин A и C на биссектрису внешнего угла при вершине B замечаем, что ACC_1A_1 прямоугольная трапеция (рис. 2).

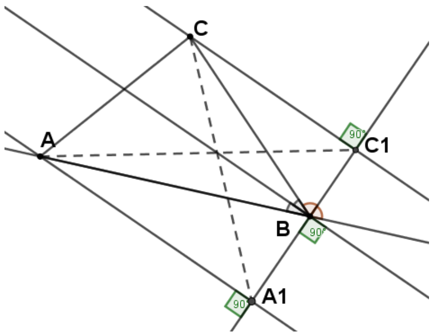

Рис. 2. Чертеж к задаче 2

Так как биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине треугольника перпендикулярны, получаем, что биссектриса внутреннего угла при вершине B параллельна основаниям трапеции. Замечаем, из подобия треугольников ABA_1 и CBC_1 следует, точка B делит сторону A_1C_1 в отношении прилежащих оснований. Значит, расстояния от точек биссектрисы внутреннего угла до оснований трапеции относятся как длины оснований. Отрезки AC_1 и CA_1 являются диагоналями трапеции и при пересечении образуют подобные треугольники при каждом основании трапеции. Коэффициент подобия этих треугольников равен отношению оснований. Общая вершина треугольников является точкой пересечения диагоналей и отношение расстояний от этой вершины до оснований трапеции равно отношению оснований трапеции. Значит, точка лежит на биссектрисе внутреннего угла B треугольника.

Направление поиска решений в рассмотренных задачах определилось стандартной конфигурацией (рис. 3), состоящей из двух касающихся внешним образом окружностей и их общей касательной.

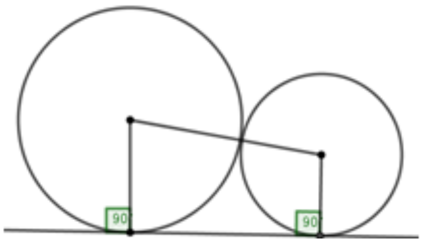

Рис. 3. Общая касательная двух окружностей

Особенности этой конфигурации ранее рассматривались нами в [4]. Радиусы окружностей, проведенные в точки касания, перпендикулярны касательной и являются основаниями прямоугольной трапеции. Именно рассмотрение трапеции явилось удачным началом решения задач. Кроме этого во второй задаче использовалось свойство перпендикулярности биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине треугольника.

Заметим, что сложными для решения оказались задачи, в которых необходимо было доказать какое-нибудь геометрическое неравенство. Опорные задачи такого типа ранее мы не использовали, что явилось стимулом к их созданию. Можно рекомендовать, например, [3; 5]. Здесь предлагаются задачи, связанные с использованием неравенства треугольника в различных ситуациях, и задачи для самостоятельного решения по данной теме. Также для работы со студентами на начальном этапе освоения олимпиадной геометрии можно рекомендовать учебно-методические пособия [1; 2; 5; 12].

Отметим, что решение олимпиадных геометрических задач 8 класса позволило выделить некоторые их особенности. Часто решение задачи можно получить, построив серединный перпендикуляр к отрезку, который в большинстве случаев возникает в задаче как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию. Работает теорема Фалеса, признаки и свойства параллелограмма. В отдельных случаях помогает дополнительная окружность или поворот плоскости.

Продемонстрируем полученные выводы на примере двух задач.

Задача 3. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Точка, симметричная середине стороны AC относительно прямой BC, обозначена через A_2, а точка, симметричная той же середине относительно прямой AB, – через C_2. Докажите, что отрезки A_1A_2 и C_1C_2 параллельны.

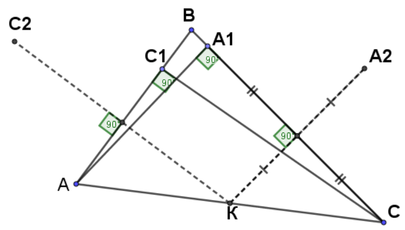

Рис. 4. Чертеж к задаче 3

Решение. Пусть точка K – середина стороны AC (рис. 4). Из построения точек, симметричных точке K относительно сторон следует, что прямая KA_2 параллельна высоте AA_1 треугольника. Можно применить теорему Фалеса для этих прямых и угла ACB. На стороне CB образуются два равных отрезка. Также из построения симметричных точек следует, что отрезок KA_2 делится стороной BC на два равных отрезка. В четырехугольнике KA_1A_2C диагонали делятся точкой пересечения пополам, значит, это параллелограмм. По свойству параллелограмма получаем, что стороны KC и A_1A_2 параллельны. Аналогично докажем, что прямая C_1C_2 параллельна прямой AK. Таким образом, прямые A_1A_2 и C_1C_2 параллельны одной прямой AC, а значит, они являются параллельными прямыми.

Задача 4. В треугольнике ABC ($AB \neq BC$) проведена биссектриса BD. На прямой BD отметили точку E, отличную от D, такую, что $CE = CD$. Докажите, что прямая, содержащая среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне AB, проходит через середину отрезка DE.

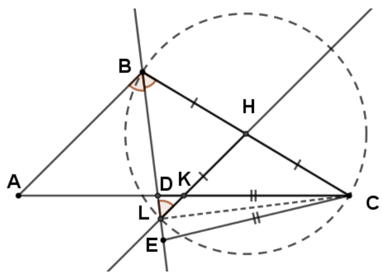

Рис. 5. Чертеж к задаче 4

Решение. Пусть HK – средняя линия треугольника, параллельная стороне AB (рис. 5).

И пусть далее она пересекает отрезок DE в некоторой точке L. Из параллельности прямых AB и HK следует равенство углов ABD и DLK. А значит и углов DBH и DLK. Из равенства последних углов треугольник LBH равнобедренный. Можно построить окружность на отрезке BC как на диаметре, которая будет проходить через точку L. Угол BLC прямой, так как вписанный в окружность и опирается на диаметр. Значит, отрезок CL является высотой в равнобедренном треугольнике и медианой. Таким образом, L – середина отрезка DE.

Организация познавательной деятельности студентов по решению олимпиадных геометрических задач доказала целесообразность использования выделенных ранее опорных задач и геометрических конфигураций, поскольку актуализируется их применение в новой ситуации. Работа с олимпиадными задачами выявила заинтересованность студентов, показала необходимость углубления и дополнения теоретической подготовки студентов в области элементарной геометрии материалом, выходящим за рамки обязательной школьной программы.

Таким образом, целенаправленно организованная работа студентов по решению олимпиадных задач позволяет совершенствовать их подготовку к внеурочной работе по математике в школе, а приобретенные знания являются основой для совместной творческой деятельности с обучающимися в рамках предметных олимпиад.

Список литературы

1. Вопросы обучения школьников решению олимпиадных задач и задач повышенной трудности по математике : учебно-методическое пособие для студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) математических профилей / автор-составитель Н. В. Леонтьева. Глазов : Глазовский государственный педагогический институт, 2022. 55 с.
2. *Воробьев Г. А.* Олимпиадные задачи (математика) : учебно-методическое пособие. Липецк : ЛГПУ им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, 2021. 153 с.
3. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки : пособие для внеклассной работы. Киров : АСА, 1994. 272 с.
4. Математика. Областные олимпиады. 8–11 классы / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др. М. : Просвещение, 2010. 239 с.
5. Математика : сб. олимпиад. заданий для обучающихся 8 кл. / Шадр. гос. пед. ун-т; сост. М. Ю. Пермякова, А. В. Перфильева. Шадринск : ШГПУ, 2021. 84 с.
6. *Понарин Я. П.* Геометрия : учебное пособие. Ростов н/Д : Феникс, 1997. 512 с.
7. *Прасолов В. В.* Геометрия. Задачи повышенной сложности. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М. : Просвещение, 2021. 80 с.
8. *Прасолов В. В.* Решение задач повышенной сложности по геометрии. 7–9 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М. : Просвещение, 2019. 239 с.
9. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. 1. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Наука, 1991. 320 с.
10. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. 2. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Наука, 1991. 240 с.
11. *Совертков П. И.* Олимпиадная подготовка и моделирование по математике : учеб. пособие для вузов. СПб. : Лань, 2022. 400 с.
12. *Тимшина Л. В.* Организация самостоятельной работы студентов педагогов при изучении учебной дисциплины «Элементарная геометрия» // Advanced Science. Киров : Изд-во Вятского государственного университета, 2018. № 3. С. 28–32.
13. *Фарков А. В.* Математические олимпиады: методика подготовки. 5–8 классы. Изд. 3-е. М. : ВАКО, 2018. 176 с.
14. *Фарков А. В.* Математические олимпиады. 5–6 классы : учебно-методическое пособие для учителей математики общеобразовательных школ. Изд. 3-е, стереотип. М. : Экзамен, 2008. 189 с.
15. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии (Планиметрия). Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Наука, 1986. 224 с.

On problems of increased difficulty in elementary geometry

Timshina Larisa Vyacheslavovna

senior lecturer at the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. The article is of a practical nature. The article presents the experience of organizing cognitive activities of students of mathematics, future teachers, in solving problems of elementary geometry of increased difficulty. Olympiad geometric problems for the 8th grade of the regional Olympiad level have been selected as tasks. Work with such tasks takes place on the basis of basic planimetric tasks that are presented to students when organizing the repetition of school mathematics.

Keywords: elementary geometry, reference problem, problems of increased difficulty.

References

1. *Voprosy obucheniya shkol'nikov resheniyu olimpiadnyh zadach i zadach povyshennoj trudnosti po matematike : uchebno-metodicheskoe posobie dlya studentov napravleniya 44.03.05 Pedagogicheskoe obrazovanie (s dvumya profilyami podgotovki) matematicheskih profilej* – Questions of teaching schoolchildren to solve Olympiad problems and problems of increased difficulty in mathematics : an educational and methodological guide for students of the direction 44.03.05 Pedagogical education (with two training profiles) of mathematical profiles / author-compiler N. V. Leontieva. Glazov : Glazov State Pedagogical Institute, 2022. 55 p.
2. *Vorob'ev G. A. Olimpiadnye zadachi (matematika) : uchebno-metodicheskoe posobie* [Olympiad problems (mathematics) : an educational and methodological guide]. Lipetsk. LSPU n. a. P. P. Semenov-Tyan-Shansky, 2021. 153 p.
3. *Genkin S. A., Itenberg I. V., Fomin D. V. Leningradskie matematicheskie kruzhki : posobie dlya vneklassnoj raboty* [Leningrad mathematical circles : manual for extracurricular activities]. Kirov. ASA Publishing House, 1994. 272 p.
4. *Matematika. Oblastnye olimpiady. 8–11 klassy* – Mathematics. Regional Olympiads. Grades 8–11 / N. H. Agakhanov, I. I. Bogdanov, P. A. Kozhevnikov, etc. M. Prosveshchenie (Enlightenment), 2010. 239 p.
5. *Matematika : sb. olimpiad. zadanij dlya obuchayushchihsya 8 kl.* – Mathematics : coll. of Olympiads. tasks for students of the 8th grade / Shadr. state teacher. Univ.; comp. M. Y. Permyakova, A. V. Perfilieva. Shadrinsk. SHSPU, 2021. 84 p.
6. *Ponarin Ya. P. Geometriya : uchebnoe posobie* [Geometry : a textbook]. Rostov-na-Donu. Phoenix, 1997. 512 p.

7. *Prasolov V. V. Geometriya. Zadachi povyshennoj slozhnosti. 7 klass : ucheb. posobie dlya obshcheobrazovat. organizacij* [Geometry. Tasks of increased complexity. Grade 7 : manual for general education]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 2021. 80 p.

8. *Prasolov V. V. Reshenie zadach povyshennoj slozhnosti po geometrii. 7–9 klassy : ucheb. posobie dlya obshcheobrazovat. organizacij* [Solving problems of increased complexity in geometry. Grades 7–9 : manual for general education establishments]. M. Prosveshchenie (Enlightenment), 2019. 239 p.

9. *Prasolov V. V. Zadachi po planimetrii. Ch. 1. Izd. 2-e, pererab. i dop.* [Problems of planimetry. Part 1. Ed. 2nd, reprinted and add.] M. Nauka (Science). 1991. 320 p.

10. *Prasolov V. V. Zadachi po planimetrii. Ch. 2. Izd. 2-e, pererab. i dop.* [Problems of planimetry. Part 2. Ed. 2nd, reprinted and add.] M. Nauka (Science), 1991. 240 p.

11. *Sovertkov P. I. Olimpiadnaya podgotovka i modelirovanie po matematike : ucheb. posobie dlya vuzov* [Olympiad preparation and modeling in mathematics : textbook for universities]. SPb. Lan (Deer), 2022. 400 p.

12. *Timshina L. V. Organizaciya samostoyatel'noj raboty studentov pedagogov pri izuchenii uchebnoj discipliny "Elementarnaya geometriya"* [Organization of independent work of students of teachers in the study of the discipline "Elementary geometry"] // *Advanced Science* – Advanced Science. Kirov. Publishing House of Vyatka State University, 2018. No. 3. Pp. 28–32.

13. *Farkov A. V. Matematicheskie olimpiady: metodika podgotovki. 5–8 klassy. Izd. 3-e* [Mathematical Olympiads: methods of preparation. Grades 5–8. Ed. 3d]. M. WACO, 2018. 176 p.

14. *Farkov A. V. Matematicheskie olimpiady. 5–6 klassy : uchebno-metodicheskoe posobie dlya uchitelej matematiki obshcheobrazovatel'nyh shkol. Izd. 3-e, stereotip.* [Mathematical Olympiads. Grades 5–6 : an educational and methodological guide for teachers of mathematics in secondary schools. Ed. 3rd, stereotyp]. M. Exam, 2008. 189 p.

15. *Sharygin I. F. Zadachi po geometrii (Planimetriya). Izd. 2-e, pererab. i dop.* [Problems in geometry (Planimetry). 2nd ed., revised. and add.] M. Nauka (Science), 1986. 224 p.