

Моделирование восстановления тетраэдров с данным набором длин ребер

Совертков Петр Игнатьевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. Россия, г. Санкт-Петербург. E-mail: psovertkov@mail.ru

Аннотация. В работе исследована задача, простая по формулировке и понятная для учащихся и учителей, о восстановлении тетраэдров по заданному набору длин ребер. В настоящей статье рассматривается моделирование восстановления тетраэдров с данным набором длин ребер, что позволяет применить компьютерное моделирование для поиска всех тетраэдров с предлагаемым набором ребер и найти среди них равные тетраэдры в частных случаях при равенстве некоторых ребер. Предлагается другой метод определения максимального количества тетраэдров и расширен диапазон наборов длин ребер, для которых можно построить максимальное число тетраэдров.

Ключевые слова: нагруженный однородный граф с шестью ребрами и четырьмя вершинами.

Если существует треугольник с тремя данными сторонами, то он единственный с точностью до движения.

А если существует тетраэдр с шестью данными ребрами, то существуют ли неравные ему тетраэдры с такими же ребрами?

На рис. 1–4 изображены все различные тетраэдры (с точностью до движения) с одним и тем же набором ребер длиной 3, 4, 4, 5, 5, 5.

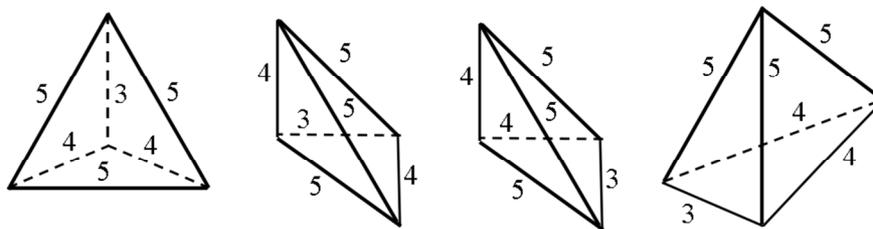


Рис. 1–4. Различные тетраэдры с набором ребёр 3, 4, 4, 5, 5, 5

Граф называется нагруженным (взвешенным), если каждому ребру x поставлено в соответствие некоторое действительное число $l(x)$, называемое весом ребра [1, с. 252].

Любой тетраэдр с данными длинами ребер можно назвать нагруженным графом с положительными числами. В действительности мы изображаем тетраэдр в виде графа на плоскости, но выделяя одно или три ребра пунктиром.

Не всякий нагруженный граф с четырьмя вершинами и шестью ребрами является изображением тетраэдра, т. к. может нарушаться условие треугольника: сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Итак, всякий тетраэдр является нагруженным однородным графом степени три [1, с. 161] с четырьмя вершинами.

Найдем максимальное количество различных однородных нагруженных графов, имеющих четыре вершины с шестью различными ребрами a, b, c, d, e и f , степени вершин которых равны трем. С точки зрения топологии все ненагруженные однородные графы с четырьмя вершинами и шестью ребрами изоморфны [1, с. 282]. Под различными нагруженными графами в дальнейшем будем подразумевать неизоморфные графы [1, с. 151] с учетом весов ребер.

Вначале будем использовать комбинаторный способ определения количества различных графов. К каждому ребру графа прилегают две грани. Рассмотрим произвольное ребро c графа, к которому подстроим две треугольные грани (рис. 5). К полученному графу с пятью ребрами недостающее шестое ребро добавляется единственным образом.

Добавить два ребра из пяти оставшихся ребер в левую треугольную грань можно $C_5^2 = 10$ способами. Отметим, что порядок крепления этих двух ребер к ребру c не имеет значения.

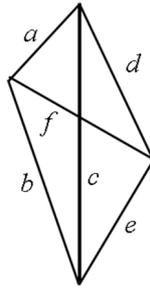


Рис. 5. Расположение рёбер перед склейкой

Добавить два ребра из трех оставшихся ребер в правую треугольную грань можно $C_3^2 = 3$ способами.

Каждый треугольник справа к концам ребра c уже построенного левого треугольника можно прикладывать двумя способами, поэтому количество правых треугольников нужно удвоить.

С другой стороны, рассмотрим две возможности. Пусть слева были приложены ребра a и b , а справа ребра d и e . Но могла возникнуть ситуация, когда слева d и e , а справа a и b . Эти два случая приводят к двум изоморфным графам, поэтому эти графы нужно отождествить, т. е. количество всех вышеприведенных ситуаций нужно уменьшить вдвое.

Итак, получаем $\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot 2}{2} = 10 \cdot 3 = 30$ различных графов.

В дальнейшем, при добавлении некоторых условий на ребра, эти графы окажутся изображениями тетраэдров, поэтому изобразим часть из них, т. е. рассмотрим геометрический способ перечисления всех неизоморфных графов.

Рассмотрим три ребра a, b и c на графе. Возможны три различных случая расположения этих ребер: а) ребра образуют замкнутую ломаную, которую назовем основанием, б) ребра имеют общую вершину и с) образуют незамкнутую связную трехзвенную ломаную линию.

а) Пусть три ребра a, b и c образуют замкнутую линию, тогда остальные три ребра d, e и f имеют общую вершину. На рис. 6–11 изображены 6 различных нагруженных графов для этого случая.

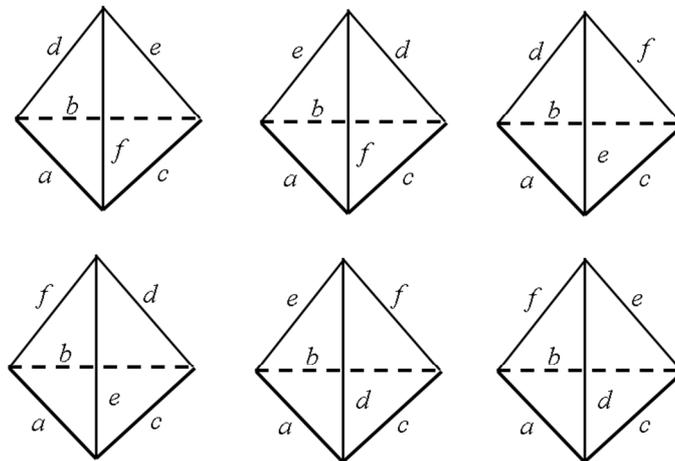


Рис. 6–11. Виды графов с рёбрами a, b и c в основании

б) Если три ребра a, b и c имеют общую вершину, то остальные три ребра d, e и f образуют треугольник. Получаем двойственную ситуацию к предыдущему случаю, в которой роли основания и трех ребер с общей вершиной поменялись. Снова получаем 6 различных нагруженных графов. Предлагаем читателю изобразить графы для этого случая с изображением весов ребер.

в) Рассмотрим последний случай, когда три ребра a, b и c образуют трехзвенную ломаную незамкнутую линию, тогда остальные три ребра d, e и f также образуют трехзвенную ломаную незамкнутую линию. Каждое из трех ребер a, b и c на трехзвенной ломаной может находиться между двумя другими, поэтому получаем три случая расположения этих ребер на ломаной для дальнейшего изучения.

Пусть средним ребром на ломаной линии a, b и c оказалось ребро b . На второй ломаной три ребра d, e и f можно расположить шестью способами, представленными на рис. 12–17.

Выбирая аналогично средним ребром a или c на ломаной из трех звеньев $\{a, b, c\}$, получим для третьего способа расположения 18 различных взвешенных графов.

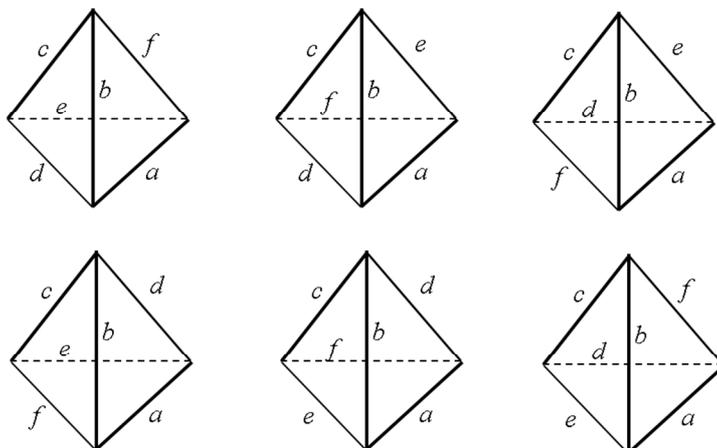


Рис. 12–17. Виды графов, если ребра a, b и c образуют ломаную линию

Снова получили 30 различных нагруженных графов.

Если среди чисел a, b, c, d, e и f найдутся равные числа, то количество различных нагруженных графов уменьшается. Например, рассмотрим набор чисел a, a, c, d, e и f .

Пусть два равных ребра a и a имеют общую вершину A (рис. 18), тогда ребро BD можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами, а ребро AC можно выбрать $C_3^1 = 3$ способами. Неизоморфные нагруженные графы с четырьмя вершинами и четырьмя ребрами указанного типа можно выбрать двенадцатью способами. Добавить два ребра CB и CD до однородного графа из двух оставшихся ребер можно двумя способами, но это приводит к изоморфным графам.

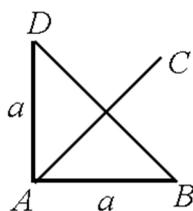


Рис. 18. Два равных ребра на графе имеют общую вершину

Пусть два ребра a и a не имеют общих вершин. На графе существует ребро c , соединяющее вершины равных ребер (рис. 19). Замкнуть трехзвенную ломаную линию с помощью ребра AC из трех оставшихся ребер можно $C_3^1 = 3$ способами. Добавить два ребра CD и AB до однородного графа из двух оставшихся ребер можно двумя способами, но это снова приводит к изоморфным графам.

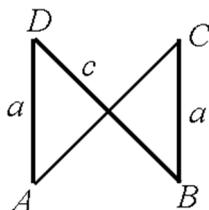


Рис. 19. Два равных ребра на графе не имеют общую вершину

Итак, для множества чисел a, a, c, d, e и f существует 15 неизоморфных однородных графов. Аналогично рассматриваются другие случаи равенства чисел в наборе. Доказана следующая теорема из раздела дискретной математики.

Теорема 1. Пусть заданы шесть положительных различных чисел a, b, c, d, e и f . Количество неизоморфных однородных нагруженных графов с четырьмя вершинами и шестью ребрами, длины которых равны этим числам, определяется из таблицы 1.

Соответствие ребер и числа тетраэдров

Ребра						Число тетраэдров
a	b	c	d	e	f	30
a	a	c	d	e	f	15
a	a	c	c	e	f	9
a	a	c	c	e	e	6
a	a	a	d	e	f	5
a	a	a	d	d	f	4
a	a	a	d	d	d	3
a	a	a	a	e	f	2
a	a	a	a	a	f	1
a	a	a	a	a	a	1

Кстати, для набора чисел a, a, a, d, d, f существует только четыре неизоморфных графа, которые приведены на рис. 1–4 для конкретных длин ребер, и для такого набора чисел графы являются тетраэдрами.

Произвольный тетраэдр является графом с дополнительными условиями на длины ребер, поэтому максимальное число тетраэдров с данным набором ребер не может быть больше, чем число графов, указанных в таблице 1.

Перейдем от графов к тетраэдрам. Рассмотрим процесс построения тетраэдра из шести ребер, если каждая тройка ребер из них удовлетворяет неравенству треугольника.

Пусть треугольник ABC со сторонами a, b и c , а также треугольник ABD_1 со сторонами c, e и d построены в одной плоскости (рис. 20), причем C и D_1 расположены по разные стороны от прямой AB . Пусть треугольник ABD_2 симметричен треугольнику ABD_1 относительно прямой AB . Вращая треугольник ABD_1 вокруг прямой AB , можно получить тетраэдр $ABCD$, если зафиксировать перекадину CD .

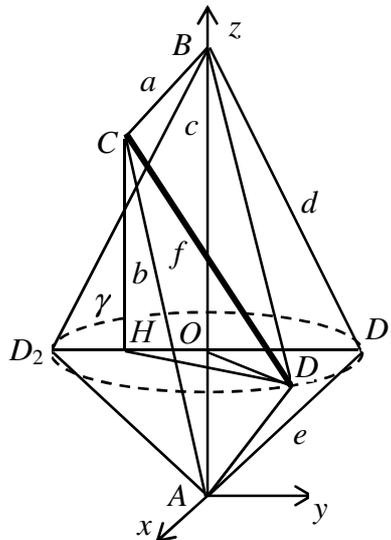


Рис. 20. Поиск перекадины CD для тетраэдра

Пусть точка H является проекцией точки C на луч $[OD_2)$, тогда в прямоугольном треугольнике CHD получаем $CD^2 = CH^2 + HD^2$. Для фиксированных точек C и D_1 максимальное значение длины отрезка CD достигается при максимальном значении проекции HD этого отрезка, а значит, когда точка D совпадает с точкой D_1 . Минимальное значение длины отрезка CD достигается при минимальном значении проекции HD этого отрезка, а значит, когда точка D совпадает с точкой D_2 . Поэтому длина ребра CD тетраэдра удовлетворяет условию $CD_2 < CD < CD_1$.

Итак, при построении тетраэдра указанным способом последний шестой отрезок f должен удовлетворять условию

$$CD_2 < f < CD_1 \tag{1}$$

Укажем способ определения длин отрезков CD_1 и CD_2 .

Пусть точка O является проекцией вершины D_1 на луч $[AB)$.

Из треугольников AOD_1 и ABD_1 получаем $AO = e \cos \angle D_1AB = e \cdot \frac{e^2 + c^2 - d^2}{2ec}$, $AO = \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2c}$.

$$OD_1 = \frac{2S_{\triangle ABD_1}}{c} = \frac{2\sqrt{p_1(p_1 - c)(p_1 - e)(p_1 - d)}}{c}, p_1 = \frac{c + e + d}{2}.$$

Рассмотрим декартову систему координат $Axyz$, $Ay \parallel OD_1$, приведенную на рис. 20, тогда для точки D_1 получаем координаты

$$x_{D_1} = 0, y_{D_1} = \frac{2\sqrt{p_1(p_1 - c)(p_1 - e)(p_1 - d)}}{c}, z_{D_1} = \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2c}, p_1 = \frac{c + e + d}{2}.$$

Аналогично для точки C находим координаты

$$x_C = 0, y_C = -\frac{2\sqrt{p_2(p_2 - c)(p_2 - b)(p_2 - a)}}{c}, z_C = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}. p_2 = \frac{c + a + b}{2}.$$

$$CD_1 = \sqrt{(y_C - y_{D_1})^2 + (z_C - z_{D_1})^2}, CD_2 = \sqrt{(y_C + y_{D_1})^2 + (z_C - z_{D_1})^2}.$$

Замечание 1. Длины отрезков CD_1 и CD_2 можно вычислить другим способом, используя соотношение Бретшнайфера [2, с. 85–86]:

– для не самопересекающегося четырехугольника $ACBD_1$ с диагоналями AB и CD_1 :

$$c^2 CD_1^2 = a^2 e^2 + b^2 d^2 - 2abed \cos(\angle C + \angle D_1);$$

– для четырехугольника $ACDD_2$ с диагоналями AB и CD_2 :

$$c^2 CD_2^2 = a^2 e^2 + b^2 d^2 - 2abed \cos(\angle C - \angle D_1).$$

Пусть угол D_1OD равен u , тогда $D(y_{D_1} \sin u, y_{D_1} \cos u, z_{D_1})$,

$$CD = \sqrt{(y_{D_1} \sin u - 0)^2 + (y_{D_1} \cos u - y_C)^2 + (z_{D_1} - z_C)^2},$$

$$\frac{\partial(CD)}{\partial u} = \frac{y_C y_{D_1} \sin u}{\sqrt{y_C^2 + y_{D_1}^2 + (z_C - z_{D_1})^2 - 2y_C y_{D_1} \cos u}}.$$

Производная обращается в ноль, если $u=0$ или $u=\pi$. Легко проверяется, что величина CD достигает своих экстремальных значений, если точка D совпадает с точкой D_1 или с точкой D_2 . Это утверждение было обосновано выше геометрически.

При повороте треугольника ABD_1 вокруг AB длина отрезка CD непрерывно изменяется. Для получения тетраэдра необходимо выбрать число f из интервала $(|CD_2|; |CD_1|)$, тогда найдется тетраэдр с ребрами a, b, c, d, e и f .

Величина угла u поворота треугольника ABD_1 до грани ABD тетраэдра $ABCD$ определяется по

формуле $\cos u = \frac{y_C^2 + y_{D_1}^2 + (z_C - z_{D_1})^2 - f^2}{2y_C y_{D_1}}$, если $-1 < \frac{y_C^2 + y_{D_1}^2 + (z_C - z_{D_1})^2 - f^2}{2y_C y_{D_1}} < 1$. Укажем алгоритм построения тетраэдра согласно рис. 20.

Пусть заданы числа a, b, c, d, e и вычислены значения CD_1 и CD_2 и пусть число f удовлетворяет условию (1), тогда вычисляется угол поворота и строится тетраэдр.

Исследуем вопрос о максимальном количестве графов с шестью различными числами.

Пусть ε малая величина, значительно меньшая, чем некоторое положительное число g . Читатель в этот момент может считать $g = 100, \varepsilon = 0,01$. Рассмотрим произвольный набор из шести чисел

$$N = \{g, g + \varepsilon, g + 2\varepsilon, g + 3\varepsilon, g + 4\varepsilon, g + 5\varepsilon\}, \quad (3)$$

причем каждая тройка из них удовлетворяет неравенству треугольника. Осталось доказать, что из ребер с такими длинами можно образовать 30 тетраэдров.

Докажем, что если любые пять отрезков из набора (3) выбраны произвольно, то существует шестое ребро из этого набора, удовлетворяющее условию (1).

Пусть для треугольника ABC (рис. 21) из набора (1) выбраны отрезки $AB = a + m\varepsilon, AC = a + n\varepsilon, BC = a + k\varepsilon$, тогда высота треугольника к стороне AB равна

$$h_2 = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{\sqrt{(3a + (m + n + k)\varepsilon)(a + (m + n - k)\varepsilon)(a + (m + k - n)\varepsilon)(a + (n + k - m)\varepsilon)}}{2(a + m\varepsilon)}.$$

Причем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда найдется такая достаточно малая величина ε_1 , для которой выполняется неравенство $h_2 > \frac{a}{2} + 3\varepsilon_1$.

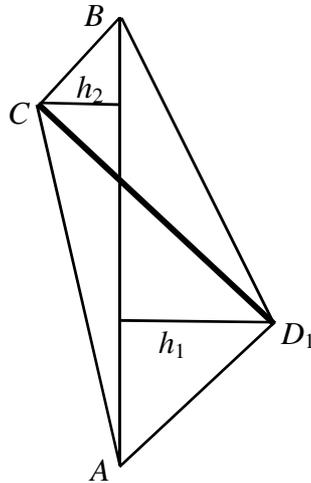


Рис. 21. Оценка длины перекладины CD1

Аналогично, для треугольника ABD_1 найдется такая достаточно малая величина ε_1 , для которой выполняется неравенство $h_1 > \frac{a}{2} + 3\varepsilon_1$.

Длину отрезка CD_1 можно оценить снизу. Найдется такая достаточно малая величина ε_1 , для которой выполняется неравенство $CD_1 \geq h_1 + h_2 > a + 6\varepsilon_1$. В качестве перекладины f для ребра CD тетраэдра можно выбрать оставшийся шестой отрезок из набора (2), и он удовлетворяет условию $f < a + 6\varepsilon_1 < CD_1$.

Аналогично доказывается, что расстояние CD_2 стремится к нулю при достаточно малых значениях ε , а значит, шестой отрезок f , выбранный в качестве перекладины, удовлетворяет условию $CD_2 < f$.

Рассмотрим произвольный треугольник, стороны которого a, b и c равны некоторым числам из последовательности (1), например, $a = g + n\varepsilon, b = g + k\varepsilon, c = g + m\varepsilon$, тогда для одного из углов

треугольника получаем $\cos \varphi = \frac{(g + n\varepsilon)^2 + (g + k\varepsilon)^2 - (g + m\varepsilon)^2}{2(g + n\varepsilon)(g + k\varepsilon)}$ или

$$\cos \varphi = \frac{g^2 + 2\varepsilon(n + k - m) + \varepsilon^2(n^2 + k^2 - m^2)}{2(g^2 + \varepsilon g(n + k) + \varepsilon^2 nk)}, \text{ причем } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos u = \frac{1}{2}.$$

Для двух других углов треугольника получаем аналогичные равенства с пределами.

Равенство с пределом означает, что для любого сколь угодно малого числа $\delta_1 > 0$ существует такое число ε_2 , что из неравенства $\varepsilon < \varepsilon_2$ следует неравенство $\left| \cos \varphi - \frac{1}{2} \right| < \delta_1$. Последнее неравенство означает, что для достаточно малых значений ε угол треугольника мало отличается от угла величиной $\pi/3$. Это утверждение справедливо для любого угла треугольника и для любого треугольника развертки.

Сумма трех углов в любой вершине треугольника меньше 2π и сумма любых двух углов в вершине развертки больше третьего угла в этой вершине. Следовательно, сгибая развертку тетраэдра (рис. 22) вдоль CA и CB , можно получить трехгранный угол.

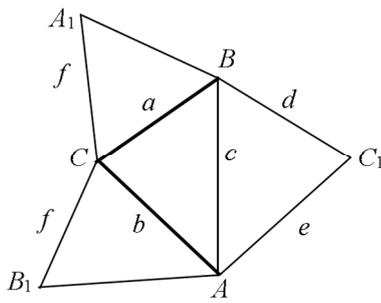


Рис. 22. Подготовка к сгибанию модели по рёбрам CA_1 и CB_1

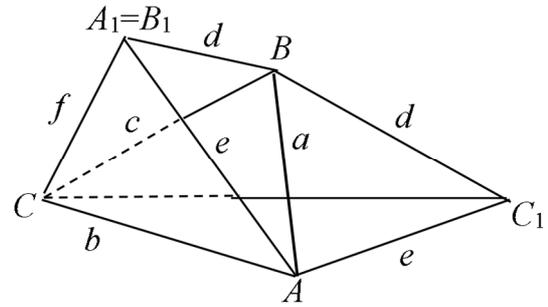


Рис. 23. Вид модели после склейки CA_1 и CB_1

На рис. 23 представлена фигура в виде капюшона после склейки ребер CA_1 и CB_1 .

Далее сгибая модель по прямой AB , получим тетраэдр. На рис. 24 построен правильный тетраэдр с параметрами $a = b = c = d = e = f = 120$. Компьютер сообщил информацию $CD_1 = 207,85$, $CD_2 = 0,00$, $u = 109,47^\circ$ с точностью до двух десятичных знаков. Для полученного угла u поворота $\cos u = -1/3$, а, следовательно, для двугранного угла φ между гранями тетраэдра получаем $\cos \varphi = 1/3$.

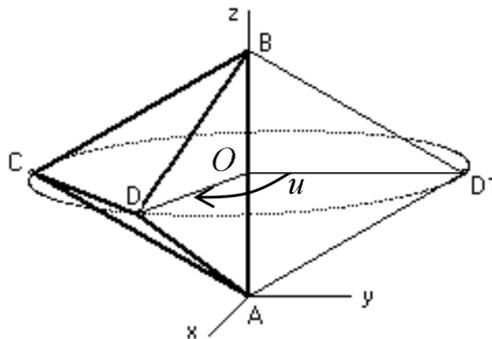


Рис. 24. Изображение правильного тетраэдра

На рис. 25 построены 30 тетраэдров и радиусы OD_1 и OD , показывающие угол поворота, для набора чисел $\{40, 35, 60, 55, 45, 50\}$. Длины отрезков CD_1 и CD_2 и угол поворота u для каждого тетраэдра отличаются от этих величин остальных тетраэдров.

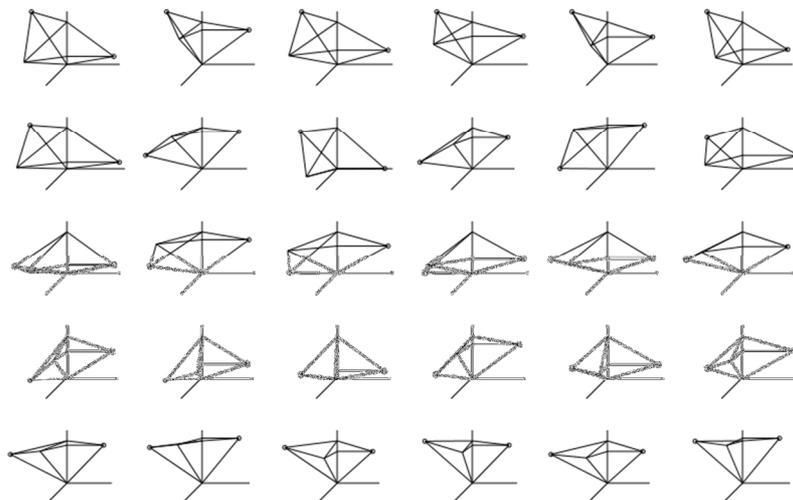


Рис. 25. Изображение тридцати тетраэдров с данным набором рёбер

Итак, доказана теорема.

Теорема 2. Существует шесть различных положительных чисел, таких что найдется 30 неравных тетраэдров, длины ребер которых равны этим числам.

Замечание 2. Обращаем внимание, что проекции на плоскость двух равных тетраэдров визуально могут отличаться (рис. 26, 27).

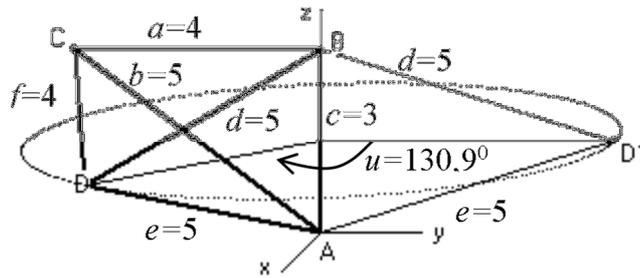


Рис. 26. Различные изображения одного и того же тетраэдра

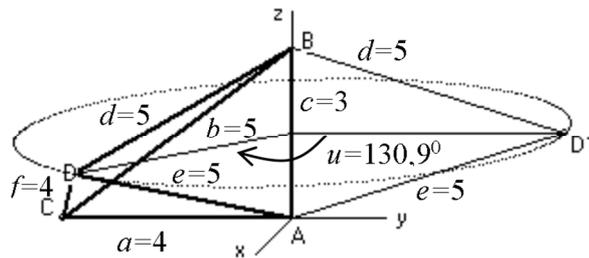


Рис. 27. Различные изображения одного и того же тетраэдра

Замечание 3. Условие о том, что малая величина ε значительно меньше, чем некоторое положительное число g для существования 30 неравных тетраэдров, можно ослабить. Например, компьютерная программа показывает, что для набора $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ и вообще для наборов $g, g+1, g+2, g+3, g+4, g+5$, где $g \geq 7, g \in \mathbb{N}$, существует 30 различных тетраэдров, длины ребер которых равны данным числам.

Все тетраэдры для данного набора ребер имеют равные объемы [1; 3, с. 39, 189; 4; 5].

Список литературы

1. Ермилов Н. О. Восстановление тетраэдров по заданному набору длин ребер // Математические заметки. 2012. Т. 91. Вып. 4. С. 530–538.
2. Кожухов С. Ф., Совертков П. И. Сборник задач по дискретной математике. СПб. : Лань, 2018. 324 с.
3. Майоров В. М., Скопец З. А. Векторное решение геометрических задач. М. : Просвещение, 1968. 252 с.
4. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1. МЦНМО, 2004.
5. Сабитов И. Х. Алгебраические методы решения многогранников // УМН. 2011. Т. 66. Вып. 3. С. 3–32.

Modeling the reconstruction of tetrahedra with a given set of edge lengths

Sovertkov Pyotr Ignatievich

PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Geometry, Herzen State Pedagogical University of Russia, Russia, St. Petersburg. E-mail: psovertkov@mail.ru

Abstract. In a simple and understandable problem for students and teachers is investigated: the reconstruction of tetrahedra from a given set of edge lengths. This article focuses on modeling the reconstruction of tetrahedra with a given set of edge lengths, which allows for the use of computer simulations to find all tetrahedra with the proposed set of edges and identify equal tetrahedra in specific cases where some edges are equal. A different method is proposed for determining the maximum number of tetrahedra, and the range of edge lengths for which the maximum number of tetrahedra can be constructed is expanded.

Keywords: A loaded homogeneous graph with six edges and four vertices.

References

1. Ermilov N. O. Vosstanovlenie tetraedrov po zadannomu naboru dlin reber [Restoration of tetrahedra from a given set of edge lengths] // Matematicheskie zametki – Mathematical Notes. 2012. Vol. 91. Is. 4. Pp. 530–538.
2. Kozhukhov S. F., Sovertkov P. I. Sbornik zadach po diskretnoj matematike [Collection of problems on discrete mathematics]. SPb. Lan, 2018. 324 p.

3. *Mayorov V. M., Skopets Z. A. Vektornoe reshenie geometricheskikh zadach* [Vector Solution of Geometric Problems]. М. Prosveshchenie, 1968. 252 p.
4. *Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya* [Elementary Geometry]. Vol. 1. MCNMO, 2004.
5. *Sabitov I. Kh. Algebraicheskie metody resheniya mnogogrannikov* [Algebraic Methods for Solving Polyhedra] // UMN. 2011. Vol. 66. Is. 3. Pp. 3–32.

Поступила в редакцию: 05.02.2025

Принята к публикации: 08.04.2025