

О восхождениях от представлений к базисным математическим понятиям

Когаловский Сергей Рувимович

кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики, информатики и методики обучения, Шуйский филиал, Ивановский государственный университет. Россия, г. Иваново. E-mail: askogal@yandex.ru

Аннотация. Проясняются место и роль внерациональных форм мышления в обучении математике в старшей школе. Статья приводит к осознанию смысловых скачков как необходимого механизма восхождения на рациональный уровень мышления. Она помогает понять и то, что теоретический уровень мышления, строгость в полной мере реализуют свою продуктивность во взаимодействии с «наивными» формами мышления, в развивающемся деятельностном диалоге с ними.

Ключевые слова: строгое понятие, определение понятия, процесс формирования базисного понятия, от представлений к строгому понятию, смысловые скачки, «высшие» и «низшие» формы мышления, теоретическое мышление, диалог разных форм и уровней мышления.

Может ли решение искусственным интеллектом (ИИ) математической проблемы основываться на использовании открываемого им нового *метода*? А если может, то как этот метод «экстрагировать» из ее решения, состоящего, может быть, из миллионов элементарных операций? Можно ли научить ИИ выделять *структуру* полученного им решения в виде схемы, хорошо обозримой для человека? И всегда ли это возможно? Возможно ли ИИ с его фантастическими возможностями преодоления ограниченности объема памяти человека, объема используемой им информации, уровней сложности исследуемых им систем успешно направлять на открытие новых эффективных *методов* и *принципов* исследовательской деятельности и делать эти методы и принципы доступными для человеческого понимания?

Но не уступает ли ИИ со своими потенциальными возможностями в том, что связано с методами и принципами исследования, человеку, мышление которого способно превращать свои слабости, ограниченность своих возможностей в свою силу, выразительно демонстрируемую «непостижимой» эффективностью математики? И не являются ли такой силой способности к схематизации, к идеализации, к трансцендированию? Не несет ли такую силу диалогическая природа человеческого мышления? Не несет ли ее способность к рефлексии, рождающая развитие мышления, его преобразования? Не является ли такой силой многопоколенная исследовательская деятельность с развивающейся ее методологией?

Отнюдь не беспочвенна надежда на то, что исследования таких вопросов будут стимулировать исследования глубинных механизмов мышления. Антропологические планы, прежде всего связанные с человеческим мышлением, с его особенностями, не могут не быть существенным компонентом исследований вопросов, связанных с развитием возможностей ИИ, вопросов о его принципиальных возможностях. Ведь ИИ создан и развивается как образ человеческого мышления (но не как его подобие).

К этим вопросам мы обращаемся здесь не как к предмету исследования, а как к рождающим такой контекст, в рамках которого откроются возможности более далеко идущего «овнешнения» вопросов, казалось бы, с ИИ не связанным, а именно вопросов методологии и методики развивающего обучения. Во всяком случае, даже начало погружения в такой контекст несет освежающий взгляд на эти вопросы.

1. Рассмотрим следующую задачу: вычислить $A2025^2 - A2024 \cdot A2026$, где A обозначает $10^{10000000000}$ раз повторенную цифру 1. Очевидна невозможность непосредственного вычисления такого выражения, строящегося из столь необозримо огромных чисел. А попытки использования

компьютера сталкиваются уже с задачей ввода в него этого выражения. Но даже шестиклассник легко решит эту задачу: он *усмотрит форму=структуру* заданного выражения, представляемую алгебраическим выражением $a^2-(a-1)(a+1)$, являющимся *схемой*, а значит, *моделью* заданного выражения и тождественно равным 1. За этим усмотрением скрывается восхождение на *надпредметный уровень* рассмотрения. Это восхождение, эта обращенность к надпредметному, а с ним к метапредметному уровню, приведшая к простому решению задачи, является продуктом «овнешнения»¹ «внутренних» механизмов мышления.

Можно ли научить ИИ *схематизациям* как средствам нахождения и использования эффективных *моделей* исследуемых объектов и тем самым приблизить его к *подобию* человеческого интеллекта? Этот вопрос сводится к вопросу о том, в какой мере представима в рациональной форме работа механизмов мышления, осуществляющих схематизации.

Не поможет ли прояснению этого вопроса использование, хотя бы в качестве полезных намеков, методов обучения школьников схематизации? Каковы же эти методы? И насколько они способствуют формированию способностей к построению и использованию эффективных моделей исследуемых объектов, являющемуся необходимым компонентом поисково-исследовательской деятельности?

2. Члены гармонического ряда $1+1/2+1/3+\dots$ становятся как угодно малыми. А значит, чем больше номер n , тем меньше его частная сумма $S_{n+1}=1+1/2+1/3+\dots+1/n+1$ отличается от частной суммы $S_n=1+1/2+1/3+\dots+1/n$. Такое отличие с возрастанием n стремится к 0. Сходится ли этот ряд?

Последовательность частных сумм этого ряда является неограниченно возрастающей. Вот как просто это можно *усмотреть*:

$$S_{n+k}-S_n=1/(n+1)+1/(n+2)+\dots+1/(n+k)>k/(n+k), \text{ в частности, } S_{2n}-S_n>n/2n=1/2.$$

Отсюда неограниченное возрастание этой последовательности выводится очевидным образом. Это усмотрение является продуктом «овнешнения» «внутренних» механизмов мышления, рациональным продуктом, в сотворении которого участвовали не только механизмы рационального мышления.

Можно ли научить ИИ таким «усмотрениям»? Можно ли выразить в рациональной форме участвующую в усмотрениях работу внерациональных форм мышления, выразить так, чтобы это могло служить средством обучения ИИ таким «усмотрениям»?

В какой мере сегодняшние методы обучения школьников математике способствуют формированию их способностей к подобным продуктивным усмотрениям? За этим и сформулированным выше вопросом «прячется» и вопрос о том, в какой мере методы обучения математике соотносятся с участием в математической деятельности механизмов внерационального мышления.

3. Попутно обратимся к следующему вопросу: возможно ли научить ИИ решать задачи намного более высокого уровня, подобные, например, обнаружению невыводимости пятого постулата из остальных аксиом евклидовой геометрии, и возможно ли научение такому их решению, которое не использовало бы логическую семантику?

При всех различиях характеров и уровней сложности рассмотренных трех задач, относящихся к ИИ, общей для них является предельно рациональная форма их постановок. Существенно иной является постановка задачи, подобная следующей: отправляясь от визуальных представлений о касательной к кривой, сформировать такое строгое понятие касательной, которое было бы эффективным орудием решения широкого класса задач. (Под строгим математическим понятием понимается такое, определение которого выразимо на языке исчисления предикатов первой или более высокой ступени). О значимости таких постановок задач говорит уже то, что истоками базисных понятий математического анализа, не говоря уже о таких первичных математических понятиях, как понятия натурального числа, линии, прямой, поверхности, являются обыденные визуальные представления. Как поставить перед ИИ такую задачу? За этим вопросом скрывается целый ряд отнюдь не простых вопросов о возможности построения работоспособных ИИ-моделей таких интеллектуальных механизмов, как *обобщение*, *идеализация* и *трансцендирование*. За такими вопросами стоит и вопрос о том, можно ли от ИИ ожидать математических результатов новой «природы».

Было бы общим местом говорить о способности человека усматривать аналогию и соотноситься с ней, о способности к продуктивному ассоциированию далеких фактов, далеких идей, о способности рождать общие представления и общие понятия на базе даже незначительного количества образцов. Но отнюдь не общим местом является задача «вложения» этих способностей в ИИ. Ее решение привело бы к существенно большим его возможностям.

Отнюдь не проходными являются и вопросы о том, каковы сегодняшние методы обучения математике, способствующие развитию у школьников механизмов обобщения, идеализации и трансцендирования.

¹ Этот выразительный термин принадлежит М. К. Мамардашвили.

Исследование вопросов о принципиальных возможностях ИИ не может не предполагать исследования вопросов, связанных с *диалогической природой человеческого мышления*, с его способностью к рефлексии и критичности, а с ними способности к развитию поисково-исследовательской деятельности, несущие ее преобразование. Диалогическая природа мышления проявляется уже в том, что мышление – это «*процесс непрерывно совершающегося взаимного перевода с языка образов на символически-операторный язык*» [3, с. 134]. Согласно Ю. М. Лотману [12, с. 36], всякое мыслящее устройство должно включать в себя «разноязычные» и взаимонепереводимые знаковые образования. Напрашивается использование в качестве «мыслящего» устройства взаимодействие двух ИИ с различающимися интеллектуальными «начинками». Однако принципиально важно то, что человеческое мышление представляет взаимодействие таких «начинок», одна из которых мыслит аналитически, а другая – целостными образами.

Существует ли такое *единое, целостное* средство обучения школьников математике, которое эффективно способствовало бы развитию у них всех названных выше качеств человеческого мышления и тем способствовало развитию их математического мышления, а с ним и общего их интеллектуального развития?

Говоря о математическом мышлении, мы имеем в виду такой его важный компонент, который выступает как ведущий компонент, как ведущее орудие математической деятельности. Это не просто рациональное, не просто понятийное, но *предельно рациональное мышление*, воплощающее *строгость*. Оно отключает неявные знания и неявные контексты, что делает его мышлением в рамках всеобщего и направляет математическую деятельность на движение к «первоначалам». Оно обращено к идеальным объектам и идеальным орудиям деятельности, то есть к таким, которые выразимы на языке исчисления предикатов какой-либо ступени, или, что равносильно, на языке расселовской теории типов. Оно подчинено законам формальной логики (логики предикатов, или, что равносильно, логики теории типов).

Предельно рациональное мышление преобразует понятийную форму мышления в продуктивную орудийную форму мышления, несущую в себе потенцию далеко идущего развития.

Строгость воплощается прежде всего в строгой форме фундаментальных математических понятий, являющихся базисными понятиями изучаемого курса математики и образующих его несущий каркас, то есть в выразимости этих понятий на языке исчисления предикатов. Их освоение – это ведущее, это ядерное начало освоения курса математики. Приобщение учащихся к этим понятиям как к строгим понятиям в форме прямого участия в процессах их *формирования* и освоения является искомым целостным средством, средством настолько же эффективным, насколько и природосообразным. Оно активизирует креативность учащихся как в «техническом» плане, так и в плане мета-идей. Это средство реализуемо не только на вузовском уровне обучения, но и в старшей общеобразовательной школе².

Приобщение учащихся к базисному математическому понятию обычно осуществляют посредством обращения к его *определению*, а обращения к представлениям, явившимся его интуитивным истоком, используются лишь в качестве пояснений к определению. В результате в их сознании вводимое понятие подменяется его интуитивным истоком и обращение к определению воспринимается как мертвый ритуал. Так происходит потому, что определение строгого понятия предстает как *внеконтекстное*. Оно не раскрывает ни способы использования этого понятия, ни его орудийный смысл. (Ситуация еще более осложняется, если определение имеет высокий уровень логической сложности). Такое приобщение подобно приобщению к лекарству, описание которого выражено на не очень знакомом языке и является лишь описанием его состава, оставляя в неведении относительно показаний к его применению и способов применения. Такое приобщение есть следование буквалистски понимаемому тезису «Математика – это логика», уводящее и от логики, и от самих целей обучения математике.

Что же может быть воспринято из буквалистски прочитываемого определения такого понятия, как выразимого на языке исчисления предикатов (первой или более высокой ступени)? Такое определение – это, по сути, описание формально-логического «скелета» *модели* интуитивных представлений, послуживших истоком этого понятия. Язык его определения – это логико-«анатомический» язык, язык логического описания этой модели. Если обыденный, житейский язык выражает интуитивные или полуинтуитивные представления или намекает на них и обращает к привычным контекстам, а тем способствует пониманию или хотя бы пред-пониманию выражаемого на нем, то язык определения выражает мета-план, логический план, выступающий как предшествующий содержательному плану. Это отнюдь не способствует работе механизмов понимания учащихся. А «поясняющие» примеры, сколько

² [см. 6; 7; 9].

бы их ни было, не только не помогают делу, но вводят учащихся в заблуждение как кричаще неадекватные «переводы» с языка исчисления предикатов на житейский язык.

Конечно, определение, например, строгого понятия предела последовательности, можно выразить в более свернутой форме, не как обычно на языке узкого исчисления предикатов, а на языке расширенного исчисления предикатов, что в какой-то мере помогает рождению образного его представления. Это несколько облегчает схватывание смысла понятия, но как рассматриваемого изолированно, автономно, «самого по себе», а не как орудия поисково-исследовательской деятельности.

Строгость определения базисного математического понятия воплотима во внеконтекстной форме, за которой скрывается его над-контекстность, представляющая его поли-контекстность. Это порождает, казалось бы, непреодолимые трудности освоения понятия. В действительности трудности порождает сам укоренившийся способ приобщения к таким понятиям, не отвечающий ни их природе, ни ролям, ни характеру математического мышления.

Какой же способ открывает пути освоения учащимися такого понятия, как строгого понятия, освоения возможностей, несомых его строгостью?

Процессу освоения базисного понятия должно предшествовать прежде всего обретение учащимися начального опыта наивной поисковой деятельности, использующей интуитивные представления, которым предстоит играть роль истока, роль прообраза этого понятия как начала такого конструируемого «исторического», которое отвечает задаче освоения учащимися соответствующего логического [см. 8; 9; 10].

Столкновение с ситуациями, в которых обнаруживается размытость этих представлений, будет для учащихся служить средством осознания необходимости их уточнения.

Определение базисного математического понятия представляет *результат* его опредмечивания как продукта исторического процесса его становления. И потому естественным средством его освоения является его распредмечивание в форме процесса восхождения к нему от представлений, послуживших его истоком. Такой процесс не должен воспроизводить исторический процесс его становления. Более того, он должен быть иным, зримо проявляющим не просто логику формирования этого понятия, но и мета-логику подобных процессов, и тем самым способствующим постижению учащимися характера математического мышления [см. 8; 9].

Природосообразно организованные процессы восхождений к базисным математическим понятиям осуществимы как не только несущие их освоение, но и как являющиеся эффективными средствами освоения продуктивных стратегий поисково-исследовательской деятельности. Этому способствуют и несомые такими процессами восхождения на метатеоретические уровни, необходимые для осознанного освоения учащимися понятийного уровня мышления, для осознания места и роли *моделирования* в математической деятельности.

В таком процессе, отвечающем природе фундаментальных математических понятий, их ролям, формируемое понятие обретает смысл, выступая как осваиваемое орудие математической деятельности и как «средство производства» таких орудий. При активном участии в нем учащихся его объективная сложность перестает быть для них сложностью непонимательной. Она становится подобной объективной сложности физиологического процесса усвоения пищи.

Процесс восхождения к базисному математическому понятию эффективно и природосообразно осуществим как диалог между формируемым понятием и развивающимися интуитивными представлениями, послужившими его истоком и представляющим его «предысторию». Процесс освоения сформированного понятия осуществляется как деятельностный диалог между развивающимся представлением об исследуемом объекте и его развивающейся рациональной моделью как развивающийся диалог в рамках расширяющегося и развивающегося контекста. Участие учащихся в таких процессах является не просто эффективным, но продуктивным средством развития диалогичности их мышления, продуктивным средством их математического развития.

Орудийный смысл базисного математического понятия раскрывается только посредством погружений в широкое многообразие отвечающих ему контекстов, в широкое многообразие форм математической деятельности (что требует многообразия форм его представления). Только такие погружения несут освоение его как эффективного орудия математической деятельности. Только такие погружения несут раскрытие и реализацию возможностей, несомых строгостью этого понятия. Они несут развитие процесса освоения этого понятия.

Такой процесс не может не соотносываться с тем, что, согласно Х. Вернеру, «*более продвинутое состояние требует для своего появления примитивного фона, из которого оно ... никогда полностью не отделяется*» и что «*возврат ... к примитивным формам познания в определенных условиях является необходимым механизмом дальнейшего развития*» [см. 15, с. 86]. Такие возвраты к отправным представлениям естественны и целесообразны и как обращенности к начальным ориентирам в новом, предельно рациональном «мире» [см. 9]. К тому же возможности, несомые строгим

понятием, не исчерпывают тот орудийный потенциал, который заложен в его истоках. Рациональный язык не может выразить его в полной мере. (С другой стороны, рациональный уровень мышления несет новые возможности открытия эффективных орудийных средств, недоступные для до-рационального уровня мышления). Поэтому представления должны участвовать в процессе формирования и освоения базисного понятия не только на начальных этапах этого процесса, но на всем его протяжении, развиваясь и взаимодействуя с осваиваемым понятием, в диалоге с ним. «Наивные» формы мышления должны участвовать в становлении, функционировании и развитии теоретического мышления как его неотъемлемые компоненты, развиваясь и взаимодействуя в диалоге с его «высшим» компонентом.

Описанный способ освоения школьниками базисных математических понятий с 60-х гг. использовался автором в обучении и школьников, и студентов вузов, и в занятиях с учителями математики в Ивановском областном институте повышения квалификации учителей. Впервые он был опубликован в [5]. В более развитой форме он представлен, в частности, в монографиях [6; 7]. В названных здесь качествах он представлен в [9]. Если во всех этих работах он предстает как целостный, как один из целостных, то все сказанное выше показывает его необходимость как способа распределения понятия в форме процесса восхождения к нему от представлений, послуживших его истоком. Но, конечно, сам этот способ может быть реализован в разных формах.

Сформированное понятие вначале воспринимается учащимися как продукт уточнения представлений, послуживших его истоком. Но уже в процессе его начальных испытаний на работоспособность обнаруживается существенное отличие его объема и содержания от объема и содержания этих представлений [см. 9]. Последующие его испытания показывают не просто существенно большую его эффективность, но продуктивность. Все эти качества сформированного понятия открываются как неожиданные, как не отвечающие его «пренатальной» стадии, как не отвечающие логике процесса его формирования. Иначе говоря, оно рождается как агенетичный продукт этого процесса, как творческий продукт в смысле А. Ф. Лосева [11]. Его рождение – это скрытый смысловой скачок, обнаруживаемый учащимися, как уже сказано, в процессе испытаний понятия на работоспособность. В полной мере масштаб несомых их преобразований усматривается в процессе освоения понятия, сопровождаемом и другими смысловыми скачками.

Каковы же участвующие в таких процессах механизмы рождения смысловых скачков, не только приводящих к поставленным целям, но и сопровождающихся преобразованиями их мышления? Представляется значимой задача овладения этими механизмами и использования их как эффективных дидактических средств.

Из сказанного выше следует значимость роли внерациональных форм мышления в обучении математике и в старшей школе, и в вузе. Эта роль не может не быть важным предметом исследований.

Так как мышление есть *процесс непрерывно совершающегося взаимного перевода с языка образов на символически-операторный язык* [3, с. 134], то всегда компонентом мышления является мышление образами, мышление представлениями. А значит, нет чисто рационального мышления. То, что называют рациональным мышлением, есть *взаимодействие* рационального мышления и мышления внерационального, нередко осуществляющегося в скрытой форме.

Всегда ли при этом ведущую роль играет рациональный компонент мышления? Разве не устремляет дионисийское начало в познавательной деятельности к началу аполлоническому? И разве аполлоническое начало, представляющее в совершенной форме, не рождает дионисийское начало? Какое же из этих начал является ведущим? Разве эйдос рождается без меонального начала и разве он сам не порождает меональное начало? Какое же из этих начал является ведущим, если *«благодаря единству или синтезу меона и эйдетики только и возможен акт творения»* [13, с. 84]?

Здесь было бы неестественно пройти мимо того, что человек погружен в символический мир и что естественно *«определить человека как animal symbolicum»* [4, с. 32], мимо того, что раскрыть смысл символа возможно *«только при помощи другого (изоморфного) символа. Растворить его в понятиях невозможно»* [2, с. 210], что *«смысл символа... не дан, а задан»* [1, с. 157].

Возможно ли развитие рационального мышления без развития внерациональных его форм? Возможно ли оно без рождения идей, мета-идей, таких, которые становятся движущими силами деятельности творческих личностей, творческих коллективов, таких, которые становятся движущими силами развития культуры, развития социума, таких, которые рождаются в до-рациональной форме и обретают над-рациональное начало? Таковы идеи, рождаемые высокой поэзией и высокими произведениями искусства. Таковы рожденные высокой наукой идеи относительности, дополненности, системности. Таковы высокие математические идеи, истоками которых являются прото-идеи, рожденные уже начальным жизненным опытом.

Такова, в частности, идея становящейся все большей близости, становящегося как угодно малого отличия, или идея предельного перехода. Послужившая еще в Античности истоком метода ис-

черпывания, в последующие века она вела к анализу бесконечно малых, современной формой которого является нестандартный анализ. В начале XIX в. эта идея послужила истоком математического анализа, основывающегося на понятии предела функции. Далеко идущее развитие математического анализа, демонстрирующее продуктивность этой идеи и способ продуктивного рационального ее воплощения как орудия математической деятельности и как «средства производства» таких орудий, превратило ее в символ. Продуктом развития идеи предельного перехода явилось и понятие предела последовательности функций, на базе которых развился функциональный анализ. Продуктом ее развития явилась и теория метрических пространств, и теория нормированных пространств, и общая топология.

На протяжении двух с половиной тысячелетий идея предельного перехода развивалась, служила и поныне продолжает служить истоком высоких творческих продуктов в смысле А. Ф. Лосева [11], предстающих в предельно рациональной форме. Но сама она не обрела рациональную форму. Всякая попытка понятийного, всякая попытка рационального ее представления рождает разве лишь какой-то частный вариант ее воплощения, но не может воплотить в себе всего ее потенциального богатства. Исторический процесс развития этой идеи, представавшей вначале в форме частных ее представлений, превратил ее в над-рациональную идею, в мета-идею.

Процесс формирования какого-либо варианта понятия предела, воплощающего идею предельного перехода и становящегося продуктивным орудием математической деятельности, как и процесс его эффективного освоения, осуществляется как направляемый не на преодоление допонятийных, до-рациональных представлений, послуживших его истоком, а на такое вызревание рационального начала в лоне этих представлений, которое рождает смысловые скачки, несущие его преобразование. Такой процесс осуществляется посредством развивающегося взаимодействия-диалога становящегося понятия с развивающимися представлениями и рождений новых представлений.

Использование формально-логических средств порождает метаморфозу сформированного строгого понятия, выступавшего как продукт уточнения представлений, послуживших его истоком, превращая его в продукт трансцендирования, в агенетичный продукт творческого акта, в понятие, имеющее существенно иное содержание, в понятие, предполагающее существенно иную позицию рассмотрения, в понятие, относящееся к существенно иному, необозримо широкому смысловому пространству, в понятие, обретшее мощную потенцию развития. Тем самым совершается смысловой скачок, несущий преобразование внутренней формы математической деятельности. И это ведет не к преодолению работы представлений, а к их преобразению вместе с преобразованием характера их взаимодействий со сформированным понятием, с рациональным планом.

В сказанном усматривается ответ на вопрос о том, почему смысловой скачок, несомый сформированным понятием, не усматривается или почти не усматривается сразу, а обнаруживается только в процессе освоения этого понятия. Смысловой скачок как результат восхождения на рациональный уровень мышления рождается в потенциальной форме. Осуществленность его проявляется как продукт несомых им актуализированных преобразений мышления. В особой форме это проявляется в случае восхождения на предельно рациональный уровень. Формальное, буквалистское использование определения базисного понятия отключает контроль смысла. Это несет абстрагирование от всего того, что имелось в виду, но явно не выражалось, уводит от этого имевшегося в виду как присутствующего в нашем опыте, выводит за его пределы, за пределы рождаемых им представлений и смыслов. Оно навязывает иной способ рассмотрения, делая предметом рассмотрения формальные стороны дела. Тем самым формальное использование определения рождает существенно новый контекст и существенно новый смысл сформированного понятия. И отправные представления начинают играть поводыря, лучше сказать – подсказчика, развивающегося вместе с освоением этого нового «мира».

Такое восхождение к строгости, открывая возможность полнокровного использования формально-логических средств, подготавливает более далеко идущий смысловой скачок, рождаемый их реализацией.

Определение, например, понятия предела числовой последовательности на языке исчисления предикатов представляет его как строгое понятие, как понятие предельно рационального характера. Но, как уже было сказано, использование этого определения как определения, как дефиниции, становится возможным только посредством процесса формирования этого понятия и как предмета рассмотрения в его «самости», каковым оно предстает в определении, и как орудия математической деятельности. В своей роли определение, как и само сформированное понятие, выступает как продукт этого процесса, как его итог, но не как его начало. А процесс формирования понятия существенно использует погружение в представления, служащие его истоком. Тем самым он основывается на использовании внерациональных средств. Таков природосообразный и эффективный процесс освоения этого понятия как процесс, отвечающий и законам психологии познания, и природе этого понятия как продукта исторического процесса *развития представлений* о предельном переходе.

Сформированность базисного математического понятия как понятия строгого, как понятия предельно рационального открывает возможность исследования его средствами формальной логики. Далеко не в последнюю очередь это средства логической семантики. А значит, это и средства, используемые вместе с логической семантикой. Это образы, это представления. Это и средства, несомые над-рациональным мышлением, обогащенным эффективными орудиями рационального мышления. Обретая предельно рациональную форму, рациональное мышление само становится мощным орудием мышления. За предельно рациональной формой, в которой рассматриваемое понятие предстает в его определении, «прячется» его надрациональная природа, прячется роль непосредственно с ним связанных, представляемых им «низших», допонятийных форм мышления, превращаемых в «высшие» посредством их взаимодействий с понятийным мышлением. Да и за «звучанием» самого понятийного мышления при таком взаимодействии начинают «звучать» надпонятийные обертоны, обертоны развивающейся мета-идеи.

Важно отметить отличие процессов приобщения учащихся к фундаментальным математическим понятиям от процессов приобщения их к научным понятиям, состоящее в пронизывании их напряженными рефлексированиями, соотношениями с мета-теоретическим уровнем, в рождении и развитии мета-идей, в предельной рациональности этих понятий, открывающей возможность реализации преобразующей роли формально-логических средств.

А так как математика, говоря словами Канта, изучает не вещи, а способы изучения вещей, то математическое моделирование является существенным, всепронизывающим методом исследования и внутренних вопросов самой математики. Отсюда и саморефлексивность математики. Отсюда ясно и то, почему восхождение от абстрактного к конкретному в математической деятельности нередко осуществляется посредством движения от абстрактного предметного к конкретному метапредметному.

Если творческие продукты математической деятельности предстают (вместе с их обоснованиями) в строгой, предельно рациональной форме, то сама эта деятельность (как и деятельность, связанная с их использованием) представляет сопровождаемое смысловыми скачками активные и напряженные взаимодействия предельно рациональной и внерациональных форм мышления, сознания и подсознания⁴, их неразрывное единство.

Конечно, последнее верно далеко не только для математической деятельности, предметами которой являются способы (человеческого) познания как реальных, так и мыслимых объектов. Известный российский психолог М. И. Холодная не случайно говорит [14] о мифе о рациональной природе человеческого интеллекта.

Рациональная форма мышления и формируется, и функционирует, и развивается во взаимодействиях с «низшими» формами мышления, в развивающемся диалоге с ними, *сопровождаясь смысловыми скачками*. И в таких взаимодействиях-диалогах она полнокровно реализует свою продуктивность. В таких взаимодействиях-диалогах «низшие» формы мышления как формы до-рациональные преобразуют свой характер, становясь формами, и не только формами, но и орудиями рационального и над-рационального мышления. Они сами становятся над-рациональными формами мышления.

Таким образом, полнокровное развитие мышления учащихся и при обучении математике осуществимо не как развитие только рационального его компонента (которое нередко пытаются осуществлять как преодоление внерационального его «уровня»), а как развивающийся диалог-взаимодействие развивающихся внерационального и предельно рационального его компонентов. Такое развитие ведет к преобразованию их понятийной формы мышления в продуктивную орудийную форму мышления, несущую в себе потенцию далеко идущего развития. Оно ведет к развитию теоретического, или разумного мышления учащихся.

Список литературы

1. *Аверинцев С. С.* Символ // София-Логос : словарь. Изд. 2-е, испр. Киев : Дух і Літера, 2001. С. 155–161.
2. *Бахтин М. М.* К методологии литературоведения // Контекст 1974. М. : Наука, 1975. С. 203–212.
3. *Веккер Л. М.* Психические процессы. Т. 2. Л. : Изд. Ленинградского университета, 1976. 341 с.
4. *Кассирер Э.* Избранное. Опыт о человеке: введение в философию человеческой культуры. М. : Гардарики, 1998. 784 с.
5. *Когаловский С. Р., Шмелева Е. А., Герасимова О. В.* Путь к понятию: от интуитивных представлений – к строгому понятию (Изд. 2-е, перераб.). Иваново : Ивановский областной институт повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров, Шуйский государственный педагогический университет, 1998. 206 с.
6. *Когаловский С. Р.* Поиски метода и методы поиска. Шуя : Шуйский гос. пед. ун-т, 2006. 368 с.
7. *Когаловский С. Р.* Онтогенетический подход к обучению школьников математике. Иваново : Ивановский гос. университет, 2018. 316 с.

⁴...включающего сверхсознание.

8. Когаловский С. Р. О филогенетическом и онтогенетическом подходах к обучению // Научный поиск: личность, образование, культура. 2022. № 1. С. 3–13.
9. Когаловский С. Р. О методе восхождения учащихся к ведущим математическим понятиям // Вестник Ивановского гос. университета. Серия: Естественные и общественные науки. 2022. № 2. С. 63–84.
10. Когаловский С. Р. О системообразующих принципах развивающего обучения. Часть I / Школьные технологии. 2024. № 5. С. 8–18.
11. Лосев А. Ф. Диалектика творческого акта (краткий очерк) // Контекст 1981. М. : Наука, 1982. С. 48–78.
12. Лотман Ю. М. Избранные статьи : в 3 т. Т. I. Статьи по семиотике и топологии культуры. Таллин : Александра, 1992. 247 с.
13. Раков В. П. Меон и стиль. Иваново – Шуя : Изд-во ШГПУ, 2010. 448 с.
14. Холодная М. А. Психология интеллекта. СПб. : Питер, 2002. 272 с.
15. Чуприкова Н. И. Психология умственного развития: Принцип дифференциации. М. : Столетие, 1997. 480 с.

On ascents from representations to basic mathematical concepts

Kogalovsky Sergey Ruvimovich

PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Mathematics, Computer Science and Teaching Methods, Shuisky Branch, Ivanovo State University.
Russia, Ivanovo. E-mail: askogal@yandex.ru

Abstract. The place and role of non-rational forms of thinking in teaching mathematics in high school are clarified. The article leads to the realization of semantic leaps as a necessary mechanism for ascending to a rational level of thinking. It also helps to understand that the theoretical level of thinking and rigor fully realize their productivity in interaction with "naive" forms of thinking, in a developing active dialogue with them.

Keywords: A strict concept, definition of a concept; the process of forming a basic concept; from concepts to a strict concept; semantic leaps; "higher" and "lower" forms of thinking; theoretical thinking; dialogue of different forms and levels of thinking.

References

1. Averintsev S. S. *Simvol* [Symbol] // Sofia-Logos. Dictionary. 2nd, ispr. ed. Kiev. Dukh i Litera, 2001. Pp. 155–161.
2. Bakhtin M. M. *K metodologii literaturovedenija* [Towards the methodology of literary criticism] // Context 1974. M. Nauka (Science), 1975. Pp. 203–212.
3. Vekker L. M. *Psichicheskie processy. T. 2* [Mental processes. Vol. 2]. Publishing House of Leningrad University, 1976. 341 p.
4. Cassirer E. *Izbrannoe. Opyt o cheloveke: vvedenie v filosofiju chelovecheakoj kultury* [Favorites. The experience of man: an introduction to the philosophy of human culture]. M. Gardariki, 1998. 784 p.
5. Kogalovsky S. R., Shmeleva E. A., Gerasimova O. V. *Putj k ponjatiju: ot intuitivnyh predstavlenij k strogomu ponjatiju (izdanie vtoroe, pererabotannoe)* [The path to a concept: from intuitive concepts to a strict concept (second edition, revised)]. Ivanovo. Ivanovo Regional Institute for Advanced Training and Retraining of Teaching Staff, Shuja State Pedagogical University, 1998. 206 p.
6. Kogalovsky S. R. *Poiski metoda I metody poiska* [Method search and search methods]. Shuya. Shuya State Pedagogical University, 2006. 368 p.
7. Kogalovsky S. R. *Ontogeneticheskij podhod k obucheniju shkolnikov matematike* [An ontogenetic approach to teaching mathematics to schoolchildren]. Ivanovo. Ivanovo State University, 2018. 316 p.
8. Kogalovsky S. R. *On filogeneticheskom i ontogeneticheskom podhodah k obucheniju* [On phylogenetic and ontogenetic approaches to learning] // Scientific Search: Personality, Education, Culture. 2022. No. 1. Pp. 3–13.
9. Kogalovsky S. R. *O metode voshozhdenija ucyaschihsja k veduschim matematicheskim ponjatijam* [On the method of students' ascent to the leading mathematical concepts] // *Vestnik Ivanovskogo gos. universiteta* – Bulletin of the Ivanovo State University. Series: Natural and Social Sciences. 2022. No. 2. Pp. 63–84.
10. Kogalovsky S. R. *O sistemoobrazujuschih principah razvivajuschego obuchenija. Ch. 1* [On the system-forming principles of developing learning. Part I] / School Technologies. 2024. No. 5. Pp. 8–18.
11. Losev A. F. *Dialektika tvorcheskogo akta (kratkij ocherk)* [Dialectics of the creative act (a brief essay)] // Context 1981. M. Nauka (Science). 1982. Pp. 48–78.
12. Lotman Yu. M. *Izbrannye stat'i : v 3 t. T. 1. Stat'i po semiotike i tipologii kul'tury* [Selected articles : in 3 vols. Vol. 1. Articles on semiotics and typology of culture]. Tallinn. 1992. 247 p.
13. Rakov V. P. *Meon I stilj* [Meon and style]. Ivanovo – Shuya. SHSPU Publishing House, 2010. 448 p.
14. Holodnaja M. A. *Psichologija intellect* [Psychology of intelligence]. SPb. Piter, 2002. 272 p.
15. Chuprikova N. I. *Psichologija umstvennogo razvitija: Princip differenciacii* [Psychology of mental development: The principle of differentiation]. M. Stoletie (Century), 1997. 480 p.

Поступила в редакцию: 14.04.2025

Принята к публикации: 02.07.2025