

№ 1 (32) 2025

ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК Вятского государственного университета

MATHEMATICAL
BULLETIN
of Vyatka State University

Вятский государственный университет

**Математический вестник
Вятского государственного
университета**

Н а у ч н ы й ж у р н а л

№ 1 (32)

Киров
2025

Главный редактор

Е. М. Вечтомов, доктор физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3490-2956

Заместители главного редактора

С. И. Калинин, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5439-9414;

Д. Е. Прозоров, доктор технических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3577-8838

Ответственный секретарь

В. И. Варанкина, кандидат физико-математических наук, доцент,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-4166-1182

Состав редакционной коллегии:

Н. А. Беляева, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Н. А. Бояринцева, кандидат педагогических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров);

И. В. Игнатушина, доктор педагогических наук, доцент, Оренбургский государственный педагогический университет (г. Оренбург);

С. Н. Ильин, доктор физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань);

И. Б. Кожухов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва), ORCID: 0000-0002-1918-6197;

Е. В. Котельников, доктор технических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-9745-1489;

Е. Н. Лубягина, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5071-6208;

А. А. Махнев, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург);

Н. Н. Непейвода, доктор физико-математических наук, профессор, Институт программных систем РАН (г. Переславль-Залесский), ORCID: 0000-0002-7869-8053;

В. П. Одинец, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург);

Е. А. Перминов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный профессионально-педагогический университет (г. Екатеринбург);

Н. И. Петров, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

И. М. Смирнова, доктор педагогических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

О. А. Сотникова, доктор педагогических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Т. Н. Суворова, доктор педагогических наук, доцент, Московский городской педагогический университет (г. Москва);

В. А. Тестов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Вологодский государственный университет (г. Вологда);

А. А. Фомин, доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

В. В. Черных, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар), ORCID: 0000-0002-8650-4554;

Д. В. Чупраков, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-0042-3700;

А. В. Шатров, доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров);

А. В. Ястребов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского (г. Ярославль)

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»

**как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)**

Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Редактор **А. В. Мариева**

Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**

Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**

Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Коднянко Владимир Александрович. Минимизация унимодальных функций методом оптимизации.....</i>	<i>4</i>
<i>Совертков Петр Игнатьевич. Моделирование восстановления тетраэдров с данным набором длин ребер</i>	<i>10</i>

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

<i>Когаловский Сергей Рувимович. О восхождениях от представлений к базисным математическим понятиям.....</i>	<i>19</i>
--	-----------

ПЕРСОНАЛИИ

<i>Варанкина Вера Ивановна, Вечтомов Евгений Михайлович, Фролкина Ольга Дмитриевна. Памяти выдающегося философа математики Василия Яковлевича Перминова (1938–2024).....</i>	<i>27</i>
<i>Варанкина Вера Ивановна, Вечтомов Евгений Михайлович, Калинин Сергей Иванович. Юбилей замечательных геометров – выпускников Кировского государственного педагогического института имени В. И. Ленина</i>	<i>31</i>

Минимизация унимодальных функций методом оптисекции

Коднянко Владимир Александрович

доктор технических наук, профессор кафедры стандартизации, метрологии и управления качеством,
Сибирский федеральный университет. Россия, г. Красноярск. E-mail: kowlad@rambler.ru

Аннотация. Представлен названный оптисекцией новый метод минимизации унимодальных функций, основанный на оптимальном отсечении отрезков. Показано, что во всех случаях метод работает быстрее аналогичных классических методов своего семейства – метода бисекции и метода золотого сечения. При минимизации строго унимодальных функций оптисекция работает на 15–25 % быстрее метода золотого сечения и в 1,5–2 раза быстрее метода бисекции. Метод находит минимум монотонных функций за 5 обращений к ним. Функции-константы распознаются оптисекцией за 3 вычисления. При минимизации функций с плоским дном быстроедействие метода сопоставимо со скоростью распознавания монотонных функций.

Ключевые слова: метод бисекции, метод золотого сечения, метод оптисекции, унимодальная функция, быстроедействие метода.

Введение. Одномерной минимизации обычно подвергают унимодальные функции. Под унимодальной будем понимать функцию, отвечающую определению [4; 5], согласно которому на отрезке $G = [a, b]$ существуют делящие его на три сегмента числа α и β , $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, такие, что:

- 1) при $a < \alpha$ на отрезке $[a, \alpha]$ функция $f(x)$ монотонно убывает;
- 2) при $\beta < b$ на отрезке $[\beta, b]$ она монотонно возрастает;
- 3) на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция постоянна и достигает своего минимума.

На практике чаще всего применяются численные методы семейства отсечения отрезков, суть которых состоит в последовательном отбрасывании на каждой итерации части отрезка неопределенности, способствуя тем самым его сжатию до тех пределов, пока не выполнится условие останова процесса оптимизации

$$b - a < \varepsilon,$$

где ε – малое положительное число, определяющее точность расчетов.

В семействе данных методов наибольшей известностью пользуются ставшие классическими *метод бисекции* (МБ) (другое название «метод дихотомии») и *метод золотого сечения* (МЗС) [4; 5; 7]. Качество таких методов определяется не только их надежностью, что свойственно обоим методам, но и быстроедействием, под которым понимают необходимое для решения задачи количество обращений к функции. Чем меньше таких обращений, тем быстрее работает метод.

На каждой итерации методу бисекции требуется два вычисления целевой функции, при этом отрезок неопределенности уменьшается в два раза. Второй метод только на первой итерации требует два ее вычисления, на остальных итерациях необходимо только одно. Хотя сокращаемый отрезок меньше, за счет этого быстроедействие метода золотого сечения оказывается выше.

Считается, что в данном семействе методов им нет конкурентов с точки зрения лучшего быстроедействия [7]. Действительно, метод золотого сечения не имеет ресурсов для улучшения. Метод бисекции можно было бы улучшить, если бы удалось довести количество обращений к функции до одного на каждой итерации или хотя бы уменьшить их. Однако, как считается, в рамках концепции метода такое улучшение невозможно. Тем не менее есть работы, в которых показано, что при определенных условиях количество обращений к функции можно уменьшить. Этот алгоритм назван методом экономной дихотомии [2; 3; 8].

В настоящей работе предложен новый метод отсечения отрезков, который на каждой итерации требует только одно вычисление функции. Метод быстро распознает монотонные функции и функции-константы, быстро работает при поиске экстремума функций с плоским дном ($\alpha < \beta$). Проведена оптимизация метода и выполнено сравнение методов с точки зрения их быстроедействия на примерах минимизации функций различного типа – монотонных, констант, функций с плоским дном и строго унимодальных функций.

1. Описание метода. В основу метода, который предназначен для нахождения абсциссы минимума унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $G = [a, b]$ с точностью до e , положен принцип оптимального сечения отрезка в заданном отношении.

Для краткости по аналогии с бисекцией назовем метод оптисекцией.

В рамках метода сначала вычислим три точки $w[0]$, $w[1]$, $w[2]$ по формулам

$$w[i].x = a + (i+1)(b-a)/4, w[i].y = f(w[i].x), \quad i = 0, 1, 2. \quad (1)$$

Следующим шагом является проверка функции $f(x)$ на монотонность. Ниже приведен код логической функции *Mnt*, которая предназначена для такой проверки.

Логическая алгоритм-функция *Mnt*.

// Проверка функции на монотонность.

Входные данные:

a, b – границы отрезка, f – имя функции, e – точность расчетов, k – текущее количество обращений к функции,

$w[0]$, $w[1]$, $w[2]$ – три вычисленные точки.

Выходные данные:

x – решение, если функция монотонна, k – счетчик обращений к функции,

Result – значение функции *Mnt*: истина или ложь.

1. *Result* := false;

2. **if** ($w[0].Y < w[1].Y$) **and** ($w[1].Y < w[2].Y$) **then** $t[-1] := 1$ **else** $t[-1] := 0$;

3. **if** ($w[0].Y > w[1].Y$) **and** ($w[1].Y > w[2].Y$) **then** $t[1] := 1$ **else** $t[1] := 0$;

4. **if** $t[-1] = 1$ **then** // монотонное возрастание

begin $i := 0$; $g := a0$; $j := -1$; **end**

else

if $t[1] = 1$ **then** // монотонное убывание

begin $i := 1$; $g := b0$; $j := 1$; **end**

else exit; // монотонность не подтвердилась

5. **begin**

$z1.x := g$; $z1.y := f(g)$; $k := k+1$;

$w[1] := w[0]$; $w[1] := w[2]$; $w[2] := z1$;

end;

6. **if** $\text{Sign}(w[i].y - z1.y) = 1$ **then**

begin

$z2.x := g - j * e$; $z2.y := f(z2.x)$; $k := k+1$;

$w[1] := w[0]$; $w[1] := w[2]$; $w[2] := z2$;

if $\text{Sign}(z2.Y - z1.y) = 1$ **then**

begin $x := g$; *Result* := true; **end**;

end;

Если ординаты трех упомянутых точек образуют монотонную последовательность – возрастающую или убывающую (блоки 2, 3), то алгоритм *Mnt* подвергает функцию $f(x)$ окончательной проверке на монотонность. Если такая последовательность возрастающая, то вычисляется значение $f(a)$. Если эта точка вписывается в гипотезу, то вычисляется значение $f(x+e)$. Если $f(x+e) \geq f(a)$, то в силу унимодальности функция $f(x)$ является монотонно неубывающей. В этом случае *Mnt* = true и решением задачи будет $x = a$. Аналогичны рассуждения для монотонно убывающей функции. Для нее решением будет $x = b$.

Таким образом, для установления факта монотонности функции $f(x)$ методу требуется пять обращений к ней.

Если функция не монотонна, то выполняется проверка условия

$$w[0].Y = w[1].Y = w[2].Y. \quad (2)$$

Если условие (2) выполнено, то в силу унимодальности функция $f(x)$ является константой, либо у нее сразу обнаружено плоское дно. В таких случаях решением будет абсцисса любой из этих точек. Если таковое не обнаружено при первых трех вычислениях функции, то не исключено, что плоское дно может быть обнаружено в процессе поиска на последующих итерациях.

Не прошедшие данные фильтры функции являются строго унимодальными с точкой текущего минимума и новыми границами отрезка

$$m = \underset{x}{\text{Min}}(w[i]), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

$$a = w[0]x, b = w[2]x.$$

где k – количество обращений к функции.

Далее выполняется поиск, основанный на сечении отрезка в заданном отношении c .

Процедура *Ratio* поиска минимума функции $f(x)$ методом деления отрезка в заданном отношении

// Поиск минимума унимодальной функции

Входные данные:

a, b – границы отрезка, f – имя функции, e – точность расчетов, k – текущее количество обращений к функции, c – параметр деления отрезка в заданном отношении.

Выходные данные:

x – решение, если функция монотонна, k – счетчик обращений к функции,

repeat // цикл итераций

1. **if** $(m.x - a) > (b - m.x)$ **then** $p.x := c*a + (1.0 - c)*m.x$ **else** $p.x := c*b + (1.0 - c)*m.x$; // абсцисса новой точки
 $p.y := f(p.x)$; $k := k + 1$; // вычисление ординаты и обновление количества обращений к функции

2. **if** $m.y > p.y$ **then** // если найден новый минимум

begin

if $m.x < p.x$ **then** $a := m.x$ **else** $b := m.x$; // сжатие отрезка

$m := p$; $n := 1$;

end

else

begin

if $m.y = p.y$ **then** // найдена точка с повторившимся минимумом

begin

$n := n + 1$; // новое количество последних точек с одинаковыми ординатами

if $n = 3$ **then Goto** Fin; // если таких точки 3, то обнаружено плоское дно

end;

if $m.x < p.x$ **then** $b := p.x$ **else** $a := p.x$; // сжатие отрезка

end;

3. $e0 := \text{abs}(m.x) * e + 1.0e-10$;

until $\text{abs}(m.x - (a+b)/2.0) \leq 2.0 * e0 - 0.5 * (b-a)$; // конец цикла при выполнении условия сходимости

Fin: $x := m.x$;

Суть метода такова. Точка m текущего минимума функции делит отрезок $[a, b]$ на два сегмента $[a, m.x]$ и $[m.x, b]$. Из них выбирается тот, который длиннее, и он делится в отношении c , образуя на сегменте точку p вычислениями по одной из формул оператора 1. При $c = 0.5$ это соответствует бисекции, когда p будет расположена в середине наиболее длинного сегмента. При $c < 0.5$ она будет ближе к точке минимума, при $c > 0.5$ дальше от него. Представляется разумным располагать такую точку ближе к точке текущего минимума, то есть полагать $c < 0.5$. Однако слишком близко к ней располагать нельзя, ибо тогда процесс поиска решения может замедлиться. Это наводит на мысль, что существует оптимальное значение параметра c , которое для разных функций и отрезков неопределенности будет разным. Найти оптимальное значение параметра c можно на основании результатов анализа вычислительного эксперимента.

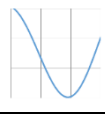
В качестве условия останова процесса использован оператор 3. Условие заимствовано из работы [6]. Ее автор предупреждает, что оно иногда может давать ошибку. В результате проведенных вычислительных экспериментов установлено, что такое иногда имеет место при минимизации монотонных функций. Однако рассматриваемый метод, как упомянуто выше, быстро находит решение для функций такого типа, поэтому при использовании данного условия останова ошибок он не должен давать.

2. Оптимизация метода по параметру c . Для определения оптимального значения параметра c были проведены вычислительные эксперименты на примерах минимизации 45-ти строго унимодальных функций без плоского дна. При этом для каждой функции варьировали значения границ a, b интервалов неопределенности так, что получилось около 1000 задач. Кроме того, эксперименты проводились для различных значений параметра точности e – от относительно больших, которые используются в большинстве практических расчетов, до весьма малых, которые обычно используются для исследования метода на надежность и вычислительную устойчивость.

Для проведения вычислений использовали среду Delphi, оперируя числами с 19–20 значащими цифрами [9]. Наиболее показательными оказались результаты, соответствующие весьма высокой точности расчетов $e = 10^{-10}$. Примеры расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Зависимости количества k обращений к функции $f(x)$ от параметра c

1	$f(x) = 1 + \ln(x) \cos[2(4 - x^2)], \quad G = [2.7, 3.1]$									
c	0.01	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	
k	116	71	45	40	38	35	39	47	55	
2	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 8, \quad G = [1.0, 5.0]$									
c	0.01	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	
k	99	65	53	41	35	39	44	52	61	
3	$f(x) = 1.2 + \text{Max}[\exp(-x), \cos(x), x^4, x^2], \quad G = [-0.6, 1.1]$									
c	0.01	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	
k	248	135	59	48	49	43	43	51	57	

Как видно из таблицы 1, при оптимизации функции 1 минимум количества k обращений к функции обнаружен при $c = 0.2$. Для второй функции оптимальным является $c = 0.15$. Для третьей функции оптимальны $c = 0.2$ и $c = 0.3$.

Аналогичные результаты с отклонением не более чем на 0.1 в ту или другую сторону от значения $c = 0.2$ имели место для большинства экспериментов. Каких-либо значительных отклонений от обнаруженных оптимальных значений не выявлено. Поэтому на практике можно использовать любое число из диапазона $c = [0.1, 0.3]$. Средним является $c = 0.2$, которое использовалось в качестве оптимального в дальнейших расчетах.

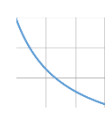
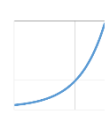
Отметим, что при относительно небольшой точности диапазон значений параметра несколько шире, но обнаруженное оптимальное значение остается прежним.

3. Сравнительный анализ быстродействия метода. Для сравнительного анализа быстродействия метода выполнены расчеты функций различных типов методами бисекции, золотого сечения и оптисекции.

В таблице 2 приведены данные для двух строго монотонных функций.

Таблица 2

Сравнительные данные о быстродействии методов при минимизации строго монотонных функций

1	$f(x) = 29 + 16/x, \quad G = [1.5, 4.5]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	26	21	5	60	45	5	
2	$f(x) = 1.5 + \exp(x), \quad G = [1.5, 4.5]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	34	26	5	66	49	5	

Из таблицы 2 видно, что при минимизации строго монотонных функций даже при относительно невысокой точности $e = 10^{-4}$ метод работает быстрее бисекции примерно в 5 раз, а золотого сечения в 4 раза. При высокой точности $e = 10^{-9}$ метод работает еще быстрее: в сравнении с бисекцией примерно в 12 раз и золотым сечением в 9 раз.

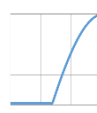
В таблице 3 приведены результаты минимизации трех функций с плоским дном.

Таблица 3

Сравнительные данные о быстродействии методов при минимизации функций с плоским дном

1	$f(x) = 1, \quad G = [1.9, 3.1]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	26	20	3	60	44	3	

Окончание табл. 3

2	$f(x) = 1.5 + \text{Max}[\cos(4 - x^2), 0.5]$, $G = [2.9, 3.2]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	22	17	8	54	41	8	
3	$f(x) = 3 + \text{Max}[4\cos(x), -3]$, $G = [0.1, 4.9]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	30	22	8	62	46	8	

Как видно из таблицы 3, в сравнении с бисекцией и золотым сечением при минимизации функций с плоским дном метод демонстрирует существенно более высокое быстродействие. Для функции-константы в 7–20 раз, для функций с плоским дном в 3–7.

Приведенные примеры минимизации хотя и встречаются в практических задачах, и для них высокое быстродействие метода тоже важно, однако такие функции нетипичны: больший интерес представляют результаты минимизации строго унимодальных функций ($a < b$, $\alpha = \beta$). В таблице 4 приведены сравнительные результаты расчетов для таких функций.

Таблица 4

Сравнительные данные о быстродействии методов при минимизации строго унимодальных функций

1	$f(x) = 0.2 + (x - 1.5)^2 \quad G = [0.3, 3.2]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	30	23	19	62	47	38	
2	$f(x) = 12 + 1000(x - 2.8)^4, \quad G = [1.5, 4.3]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	28	22	17	60	46	24	
3	$f(x) = \text{Max}[x + 4, 6\sin(x)], \quad G = [1.6, 1.9]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	32	18	15	56	42	36	
4	$f(x) = 1.2 + \text{Max}[\exp(-x), \cos(x), x^4, x^2], \quad G = [-0.6, 1.1]$						
e	10^{-4}			10^{-9}			
Метод	МБ	МЗС	МОС	МБ	МЗС	МОС	
k	32	18	15	56	42	36	

Основной вывод, который вытекает из анализа представленных в таблице 4 данных, состоит в том, что во всех случаях при минимизации строго унимодальных функций оптимизация работает быстрее упомянутых классических методов. Анализ многочисленных расчетных данных показал, что независимо от характера минимизируемых функций – гладких (в таблице 4 это функции 1 и 2) или функций с изломами (функции 3, 4), оптимизация работает быстрее метода золотого сечения на 15–25 % и в 1,5–2 раза быстрее метода бисекции.

Закключение. В работе представлен названный оптимизацией новый метод минимизации унимодальных функций, основанный на оптимальном отсечении отрезков. В результате многочисленных вычислительных экспериментов по минимизации строго унимодальных функций показано, что метод работает быстрее самого быстрого из своего семейства метода золотого сечения на 15–25 % и в 1,5 – 2 раза быстрее метода бисекции. Метод оптимизации быстро находит минимум монотонных функций за 5 обращений к каждой из них. Функции-константы распознаются оптимизацией за 3 вычисления. Метод демонстрирует высокое быстродействие и при минимизации функций с плоским дном.

Список литературы

1. Аббасов М. Э. Методы оптимизации. СПб.: ВВМ, 2014. 263 с.
2. Коднянко В. А. Метод экономной дихотомии: программный код и сравнительная эффективность. Аллея науки. 2018. № 8.

3. Коднянко В. А. О вычислительной избыточности метода дихотомии и условной минимизации унимодальных функций методом экономной дихотомии. Системы и средства информатики. 2019. Т. 29. № 1. С. 164–173. DOI: 10.14357/08696527190113.
4. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума / пер. с англ. М. : Наука, 1967. 268 с.
5. Федоров В. В. Численные методы максимина. М. : Наука, 1979. 272 с.
6. Brent R. P. Algorithms for minimization without derivatives. Courier Corporation. 2013. 195 p.
7. Kiefer J. K. Sequential minimax search for a maximum. Proceedings of the American Mathematical Society. 1953. Vol. 4. No. 3. Pp. 502–506.
8. Kodnyanko V. A. Economical dichotomous search for minimizing one-variable functions. Radio Electronics, Computer Science, Control. 2019. No. 3. Pp. 34–39. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-3-4.
9. Delphi 7 and Its IDE. URL: https://flylib.com/books/en/2.37.1/delphi_7_and_its_ide.html.

Minimization of unimodal functions by optisection method

Kodnyanko Vladimir Aleksandrovich

Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Standardization, Metrology and Quality Management, Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk. E-mail: kowlad@rambler.ru

Abstract. A new method for minimizing unimodal functions based on optimal segment cutting, called optisection, is presented. It is shown that in all cases the method is faster than similar classical methods of the segment cutting family – the bisection method and the golden section method. When minimizing strictly unimodal functions, optisection is 15–25 % faster than the golden section method and 1,5–2 times faster than the bisection method. The method finds the minimum of monotone functions in 5 calls to them. Constant functions are recognized by optisection in 3 calculations. When minimizing functions with a flat bottom, the speed of the method is comparable to the speed of recognizing monotone functions.

Keywords: bisection method, golden section method, optisection method, unimodal function, speed of the method.

References

1. Abbasov M. E. *Metody optimizacii* [Optimization methods]. SPb. VVM. 2014. 263 p.
2. Kodnyanko V. A. *Metod ekonomnoj dihotomii: programmnyj kod i sravnitel'naya effektivnost'*. Alleya nauki [Method of economical dichotomy: program code and comparative efficiency. Alley of Science]. No. 8. 2018.
3. Kodnyanko V. A. *O vychislitel'noj izbytochnosti metoda dihotomii i uslovnoj minimizacii unimodal'nyh funkcij metodom ekonomnoj dihotomii. Sistemy i sredstva informatiki* [On the computational redundancy of the dichotomy method and conditional minimization of unimodal functions by the economical dichotomy method. Systems and Tools of Informatics]. 2019. Vol. 29. No. 1. Pp. 164–173. DOI: 10.14357/08696527190113.
4. Wild D. J., *Metody poiska ekstremuma* [Methods of searching for an extremum] / transl. from English. M. Nauka (Science). 1967. 268 p.
5. Fedorov V. V. *Chislennye metody maksimina* [Numerical methods of maximin]. M. Nauka (Science). 1979. 272 p.
6. Brent R. P. Algorithms for minimization without derivatives. Courier Corporation. 2013. 195 p.
7. Kiefer J. K. Sequential minimax search for a maximum. Proceedings of the American Mathematical Society. 1953. Vol. 4. No. 3. Pp. 502–506. DOI: 10.1090/S0002-9939-1953-0055639-3.
8. Kodnyanko V. A. Economical dichotomous search for minimizing one-variable functions. Radio Electronics, Computer Science, Control. 2019. No. 3. Pp. 34–39. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-3-4.
9. Delphi 7 and Its IDE. Available at: https://flylib.com/books/en/2.37.1/delphi_7_and_its_ide.html.

Поступила в редакцию: 15.04.2025

Принята к публикации: 19.05.2025

Моделирование восстановления тетраэдров с данным набором длин ребер

Совертков Петр Игнатьевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. Россия, г. Санкт-Петербург. E-mail: psovertkov@mail.ru

Аннотация. В работе исследована задача, простая по формулировке и понятная для учащихся и учителей, о восстановлении тетраэдров по заданному набору длин ребер. В настоящей статье рассматривается моделирование восстановления тетраэдров с данным набором длин ребер, что позволяет применить компьютерное моделирование для поиска всех тетраэдров с предлагаемым набором ребер и найти среди них равные тетраэдры в частных случаях при равенстве некоторых ребер. Предлагается другой метод определения максимального количества тетраэдров и расширен диапазон наборов длин ребер, для которых можно построить максимальное число тетраэдров.

Ключевые слова: нагруженный однородный граф с шестью ребрами и четырьмя вершинами.

Если существует треугольник с тремя данными сторонами, то он единственный с точностью до движения.

А если существует тетраэдр с шестью данными ребрами, то существуют ли неравные ему тетраэдры с такими же ребрами?

На рис. 1–4 изображены все различные тетраэдры (с точностью до движения) с одним и тем же набором ребер длиной 3, 4, 4, 5, 5, 5.

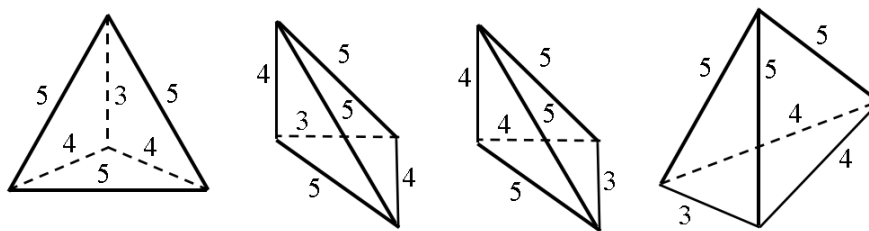


Рис. 1–4. Различные тетраэдры с набором ребёр 3, 4, 4, 5, 5, 5

Граф называется нагруженным (взвешенным), если каждому ребру x поставлено в соответствие некоторое действительное число $l(x)$, называемое весом ребра [1, с. 252].

Любой тетраэдр с данными длинами ребер можно назвать нагруженным графом с положительными числами. В действительности мы изображаем тетраэдр в виде графа на плоскости, но выделяя одно или три ребра пунктиром.

Не всякий нагруженный граф с четырьмя вершинами и шестью ребрами является изображением тетраэдра, т. к. может нарушаться условие треугольника: сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Итак, всякий тетраэдр является нагруженным однородным графом степени три [1, с. 161] с четырьмя вершинами.

Найдем максимальное количество различных однородных нагруженных графов, имеющих четыре вершины с шестью различными ребрами a, b, c, d, e и f , степени вершин которых равны трем. С точки зрения топологии все ненагруженные однородные графы с четырьмя вершинами и шестью ребрами изоморфны [1, с. 282]. Под различными нагруженными графами в дальнейшем будем подразумевать неизоморфные графы [1, с. 151] с учетом весов ребер.

Вначале будем использовать комбинаторный способ определения количества различных графов. К каждому ребру графа прилегают две грани. Рассмотрим произвольное ребро c графа, к которому подстроим две треугольные грани (рис. 5). К полученному графу с пятью ребрами недостающее шестое ребро добавляется единственным образом.

Добавить два ребра из пяти оставшихся ребер в левую треугольную грань можно $C_5^2 = 10$ способами. Отметим, что порядок крепления этих двух ребер к ребру c не имеет значения.

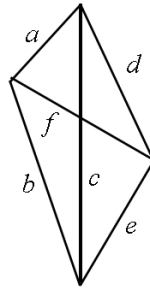


Рис. 5. Расположение рёбер перед склейкой

Добавить два ребра из трех оставшихся ребер в правую треугольную грань можно $C_3^2 = 3$ способами.

Каждый треугольник справа к концам ребра c уже построенного левого треугольника можно прикладывать двумя способами, поэтому количество правых треугольников нужно удвоить.

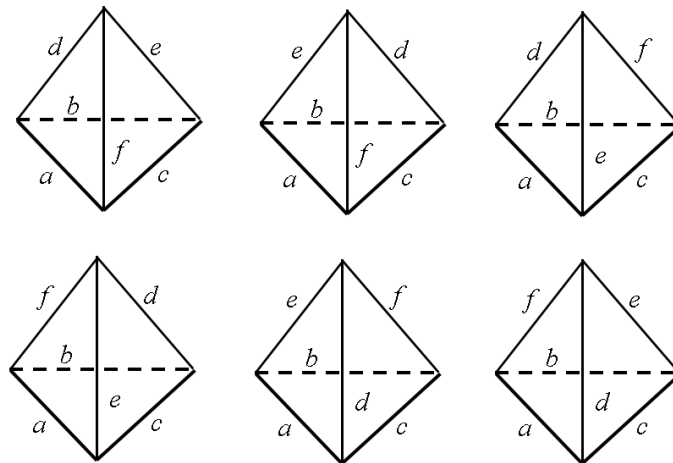
С другой стороны, рассмотрим две возможности. Пусть слева были приложены ребра a и b , а справа ребра d и e . Но могла возникнуть ситуация, когда слева d и e , а справа a и b . Эти два случая приводят к двум изоморфным графам, поэтому эти графы нужно отождествить, т. е. количество всех вышеприведенных ситуаций нужно уменьшить вдвое.

Итак, получаем $\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot 2}{2} = 10 \cdot 3 = 30$ различных графов.

В дальнейшем, при добавлении некоторых условий на ребра, эти графы окажутся изображениями тетраэдров, поэтому изобразим часть из них, т. е. рассмотрим геометрический способ перечисления всех неизоморфных графов.

Рассмотрим три ребра a , b и c на графе. Возможны три различных случая расположения этих ребер: а) ребра образуют замкнутую ломаную, которую назовем основанием, б) ребра имеют общую вершину и с) образуют незамкнутую связную трехзвенную ломаную линию.

а) Пусть три ребра a , b и c образуют замкнутую линию, тогда остальные три ребра d , e и f имеют общую вершину. На рис. 6–11 изображены 6 различных нагруженных графов для этого случая.


 Рис. 6–11. Виды графов с рёбрами a , b и c в основании

б) Если три ребра a , b и c имеют общую вершину, то остальные три ребра d , e и f образуют треугольник. Получаем двойственную ситуацию к предыдущему случаю, в которой роли основания и трех ребер с общей вершиной поменялись. Снова получаем 6 различных нагруженных графов. Предлагаем читателю изобразить графы для этого случая с изображением весов ребер.

в) Рассмотрим последний случай, когда три ребра a , b и c образуют трехзвенную ломаную незамкнутую линию, тогда остальные три ребра d , e и f также образуют трехзвенную ломаную незамкнутую линию. Каждое из трех ребер a , b и c на трехзвенной ломаной может находиться между двумя другими, поэтому получаем три случая расположения этих ребер на ломаной для дальнейшего изучения.

Пусть средним ребром на ломаной линии a , b и c оказалось ребро b . На второй ломаной три ребра d , e и f можно расположить шестью способами, представленными на рис. 12–17.

Выбирая аналогично средним ребром a или c на ломаной из трех звеньев $\{a, b, c\}$, получим для третьего способа расположения 18 различных взвешенных графов.

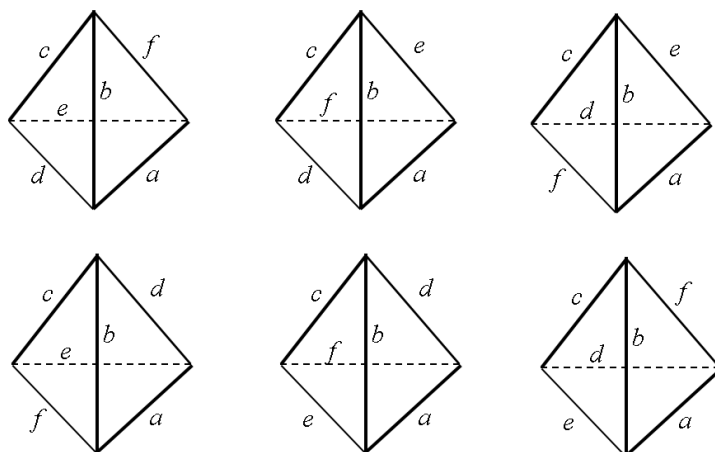


Рис. 12–17. Виды графов, если рёбра a, b и c образуют ломаную линию

Снова получили 30 различных нагруженных графов.

Если среди чисел a, b, c, d, e и f найдутся равные числа, то количество различных нагруженных графов уменьшается. Например, рассмотрим набор чисел a, a, c, d, e и f .

Пусть два равных ребра a и a имеют общую вершину A (рис. 18), тогда ребро BD можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами, а ребро AC можно выбрать $C_3^1 = 3$ способами. Неизоморфные нагруженные графы с четырьмя вершинами и четырьмя ребрами указанного типа можно выбрать двенадцатью способами. Добавить два ребра CB и CD до однородного графа из двух оставшихся ребер можно двумя способами, но это приводит к изоморфным графам.

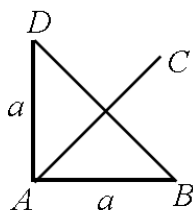


Рис. 18. Два равных ребра на графе имеют общую вершину

Пусть два ребра a и a не имеют общих вершин. На графе существует ребро c , соединяющее вершины равных ребер (рис. 19). Замкнуть трехзвенную ломаную линию с помощью ребра AC из трех оставшихся ребер можно $C_3^1 = 3$ способами. Добавить два ребра CD и AB до однородного графа из двух оставшихся ребер можно двумя способами, но это снова приводит к изоморфным графам.

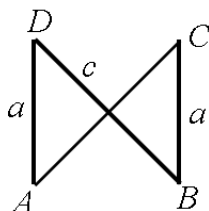


Рис. 19. Два равных ребра на графе не имеют общую вершину

Итак, для множества чисел a, a, c, d, e и f существует 15 неизоморфных однородных графов. Аналогично рассматриваются другие случаи равенства чисел в наборе. Доказана следующая теорема из раздела дискретной математики.

Теорема 1. Пусть заданы шесть положительных различных чисел a, b, c, d, e и f . Количество неизоморфных однородных нагруженных графов с четырьмя вершинами и шестью ребрами, длины которых равны этим числам, определяется из таблицы 1.

Таблица 1

Соответствие ребер и числа тетраэдров

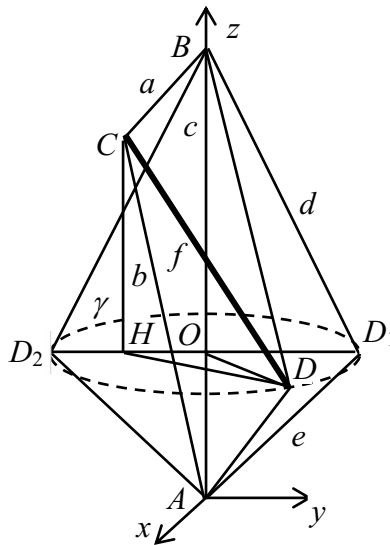
Ребра						Число тетраэдров
a	b	c	d	e	f	30
a	a	c	d	e	f	15
a	a	c	c	e	f	9
a	a	c	c	e	e	6
a	a	a	d	e	f	5
a	a	a	d	d	f	4
a	a	a	d	d	d	3
a	a	a	a	e	f	2
a	a	a	a	a	f	1
a	a	a	a	a	a	1

Кстати, для набора чисел a, a, a, d, d, f существует только четыре неизоморфных графа, которые приведены на рис. 1–4 для конкретных длин ребер, и для такого набора чисел графы являются тетраэдрами.

Произвольный тетраэдр является графом с дополнительными условиями на длины ребер, поэтому максимальное число тетраэдров с данным набором ребер не может быть больше, чем число графов, указанных в таблице 1.

Перейдем от графов к тетраэдрам. Рассмотрим процесс построения тетраэдра из шести ребер, если каждая тройка ребер из них удовлетворяет неравенству треугольника.

Пусть треугольник ABC со сторонами a, b и c , а также треугольник ABD_1 со сторонами c, e и d построены в одной плоскости (рис. 20), причем C и D_1 расположены по разные стороны от прямой AB . Пусть треугольник ABD_2 симметричен треугольнику ABD_1 относительно прямой AB . Вращая треугольник ABD_1 вокруг прямой AB , можно получить тетраэдр $ABCD$, если зафиксировать перекладину CD .

Рис. 20. Поиск перекладины CD для тетраэдра

Пусть точка H является проекцией точки C на луч $[OD_2]$, тогда в прямоугольном треугольнике CHD получаем $CD^2 = CH^2 + HD^2$. Для фиксированных точек C и D_1 максимальное значение длины отрезка CD достигается при максимальном значении проекции HD этого отрезка, а значит, когда точка D совпадает с точкой D_1 . Минимальное значение длины отрезка CD достигается при минимальном значении проекции HD этого отрезка, а значит, когда точка D совпадает с точкой D_2 . Поэтому длина ребра CD тетраэдра удовлетворяет условию $CD_2 < CD < CD_1$.

Итак, при построении тетраэдра указанным способом последний шестой отрезок f должен удовлетворять условию

$$CD_2 < f < CD_1 \quad (1)$$

Укажем способ определения длин отрезков CD_1 и CD_2 .

Пусть точка O является проекцией вершины D_1 на луч $[AB]$.

Из треугольников AOD_1 и ABD_1 получаем $AO = e \cos \angle D_1 AB = e \cdot \frac{e^2 + c^2 - d^2}{2ec}$, $AO = \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2c}$.

$$OD_1 = \frac{2S_{\triangle ABD_1}}{c} = \frac{2\sqrt{p_1(p_1 - c)(p_1 - e)(p_1 - d)}}{c}, p_1 = \frac{c + e + d}{2}.$$

Рассмотрим декартову систему координат $Axyz$, $Ay \parallel OD_1$, приведенную на рис. 20, тогда для точки D_1 получаем координаты

$$x_{D_1} = 0, y_{D_1} = \frac{2\sqrt{p_1(p_1 - c)(p_1 - e)(p_1 - d)}}{c}, z_{D_1} = \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2c}, p_1 = \frac{c + e + d}{2}.$$

Аналогично для точки C находим координаты

$$x_C = 0, y_C = -\frac{2\sqrt{p_2(p_2 - c)(p_2 - b)(p_2 - a)}}{c}, z_C = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}, p_2 = \frac{c + a + b}{2}.$$

$$CD_1 = \sqrt{(y_C - y_{D_1})^2 + (z_C - z_{D_1})^2}, CD_2 = \sqrt{(y_C + y_{D_1})^2 + (z_C - z_{D_1})^2}.$$

Замечание 1. Длины отрезков CD_1 и CD_2 можно вычислить другим способом, используя соотношение Бретшнайдера [2, с. 85–86]:

– для не самопересекающегося четырехугольника $ACBD_1$ с диагоналями AB и CD_1 :

$$c^2 CD_1^2 = a^2 e^2 + b^2 d^2 - 2abed \cos(\angle C + \angle D_1);$$

– для четырехугольника $ACDD_2$ с диагоналями AB и CD_2 :

$$c^2 CD_2^2 = a^2 e^2 + b^2 d^2 - 2abed \cos(\angle C - \angle D_1).$$

Пусть угол D_1OD равен u , тогда $D(y_{D_1} \sin u, y_{D_1} \cos u, z_{D_1})$,

$$CD = \sqrt{(y_{D_1} \sin u - 0)^2 + (y_{D_1} \cos u - y_C)^2 + (z_{D_1} - z_C)^2},$$

$$\frac{\partial(CD)}{\partial u} = \frac{y_C y_{D_1} \sin u}{\sqrt{y_C^2 + y_{D_1}^2 + (z_C - z_{D_1})^2 - 2y_C y_{D_1} \cos u}}.$$

Производная обращается в ноль, если $u=0$ или $u=\pi$. Легко проверяется, что величина CD достигает своих экстремальных значений, если точка D совпадает с точкой D_1 или с точкой D_2 . Это утверждение было обосновано выше геометрически.

При повороте треугольника ABD_1 вокруг AB длина отрезка CD непрерывно изменяется. Для получения тетраэдра необходимо выбрать число f из интервала $(|CD_2|; |CD_1|)$, тогда найдется тетраэдр с ребрами a, b, c, d, e и f .

Величина угла u поворота треугольника ABD_1 до грани ABD тетраэдра $ABCD$ определяется по формуле $\cos u = \frac{y_C^2 + y_{D_1}^2 + (z_C - z_{D_1})^2 - f^2}{2y_C y_{D_1}}$, если $-1 < \frac{y_C^2 + y_{D_1}^2 + (z_C - z_{D_1})^2 - f^2}{2y_C y_{D_1}} < 1$. Укажем алгоритм построения тетраэдра согласно рис. 20.

Пусть заданы числа a, b, c, d, e и вычислены значения CD_1 и CD_2 и пусть число f удовлетворяет условию (1), тогда вычисляется угол поворота и строится тетраэдр.

Исследуем вопрос о максимальном количестве графов с шестью различными числами.

Пусть ε малая величина, значительно меньшая, чем некоторое положительное число g . Читатель в этот момент может считать $g = 100$, $\varepsilon = 0,01$. Рассмотрим произвольный набор из шести чисел

$$N = \{g, g + \varepsilon, g + 2\varepsilon, g + 3\varepsilon, g + 4\varepsilon, g + 5\varepsilon\}, \quad (3)$$

причем каждая тройка из них удовлетворяет неравенству треугольника. Осталось доказать, что из ребер с такими длинами можно образовать 30 тетраэдров.

Докажем, что если любые пять отрезков из набора (3) выбраны произвольно, то существует шестое ребро из этого набора, удовлетворяющее условию (1).

Пусть для треугольника ABC (рис. 21) из набора (1) выбраны отрезки $AB = a + m\varepsilon$, $AC = a + n\varepsilon$, $BC = a + k\varepsilon$, тогда высота треугольника к стороне AB равна

$$h_2 = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{\sqrt{(3a + (m + n + k)\varepsilon)(a + (m + n - k)\varepsilon)(a + (m + k - n)\varepsilon)(a + (n + k - m)\varepsilon)}}{2(a + m\varepsilon)}.$$

Причем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда найдется такая достаточно малая величина ε_1 , для которой выполняется неравенство $h_2 > \frac{a}{2} + 3\varepsilon_1$.

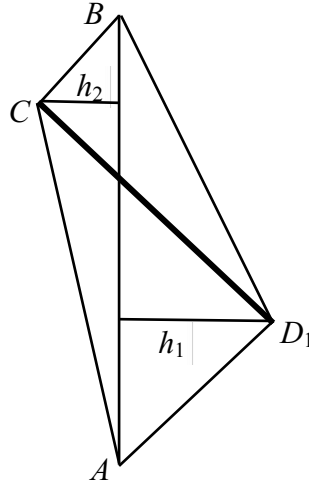


Рис. 21. Оценка длины перекладины CD1

Аналогично, для треугольника ABD_1 найдется такая достаточно малая величина ε_1 , для которой выполняется неравенство $h_1 > \frac{a}{2} + 3\varepsilon_1$.

Длину отрезка CD_1 можно оценить снизу. Найдется такая достаточно малая величина ε_1 , для которой выполняется неравенство $CD_1 \geq h_1 + h_2 > a + 6\varepsilon_1$. В качестве перекладины f для ребра CD тетраэдра можно выбрать оставшийся шестой отрезок из набора (2), и он удовлетворяет условию $f < a + 6\varepsilon_1 < CD_1$.

Аналогично доказывается, что расстояние CD_2 стремится к нулю при достаточно малых значениях ε , а значит, шестой отрезок f , выбранный в качестве перекладины, удовлетворяет условию $CD_2 < f$.

Рассмотрим произвольный треугольник, стороны которого a, b и c равны некоторым числам из последовательности (1), например, $a = g + n\varepsilon, b = g + k\varepsilon, c = g + m\varepsilon$, тогда для одного из углов

треугольника получаем $\cos \varphi = \frac{(g + n\varepsilon)^2 + (g + k\varepsilon)^2 - (g + m\varepsilon)^2}{2(g + n\varepsilon)(g + k\varepsilon)}$ или

$$\cos \varphi = \frac{g^2 + 2\varepsilon(n + k - m) + \varepsilon^2(n^2 + k^2 - m^2)}{2(g^2 + \varepsilon g(n + k) + \varepsilon^2 nk)}, \text{ причем } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos u = \frac{1}{2}.$$

Для двух других углов треугольника получаем аналогичные равенства с пределами.

Равенство с пределом означает, что для любого сколь угодно малого числа $\delta_1 > 0$ существует такое число ε_2 , что из неравенства $\varepsilon < \varepsilon_2$ следует неравенство $\left| \cos \varphi - \frac{1}{2} \right| < \delta_1$. Последнее неравенство означает, что для достаточно малых значений ε угол треугольника мало отличается от угла величиной $\pi/3$. Это утверждение справедливо для любого угла треугольника и для любого треугольника развертки.

Сумма трех углов в любой вершине треугольника меньше 2π и сумма любых двух углов в вершине развертки больше третьего угла в этой вершине. Следовательно, сгибая развертку тетраэдра (рис. 22) вдоль CA и CB , можно получить трехгранный угол.

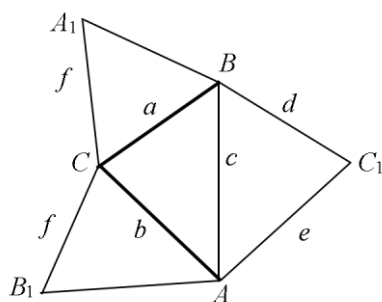


Рис. 22. Подготовка к сгибанию модели по рёбрам CA и CB

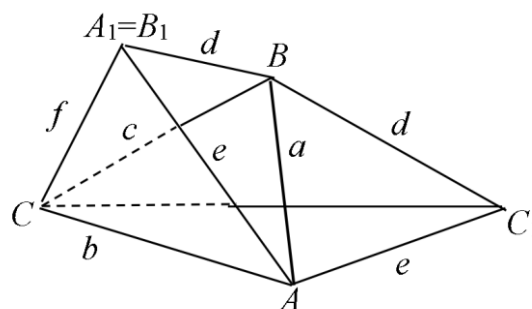


Рис. 23. Вид модели после склейки CA_1 и CB_1

На рис. 23 представлена фигура в виде капюшона после склейки ребер CA_1 и CB_1 .

Далее сгибая модель по прямой AB , получим тетраэдр. На рис. 24 построен правильный тетраэдр с параметрами $a = b = c = d = e = f = 120$. Компьютер сообщил информацию $CD_1 = 207,85$, $CD_2 = 0,00$, $u = 109,47^\circ$ с точностью до двух десятичных знаков. Для полученного угла u поворота $\cos u = -1/3$, а, следовательно, для двугранного угла φ между гранями тетраэдра получаем $\cos \varphi = 1/3$.

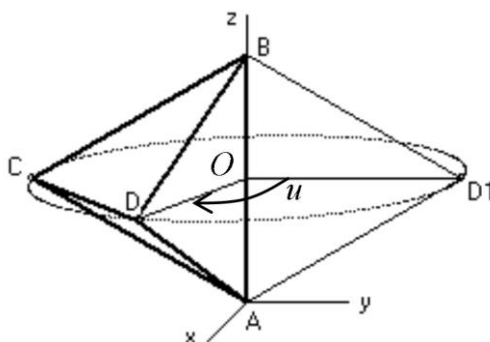


Рис. 24. Изображение правильного тетраэдра

На рис. 25 построены 30 тетраэдров и радиусы OD_1 и OD , показывающие угол поворота, для набора чисел $\{40, 35, 60, 55, 45, 50\}$. Длины отрезков CD_1 и CD_2 и угол поворота u для каждого тетраэдра отличаются от этих величин остальных тетраэдров.

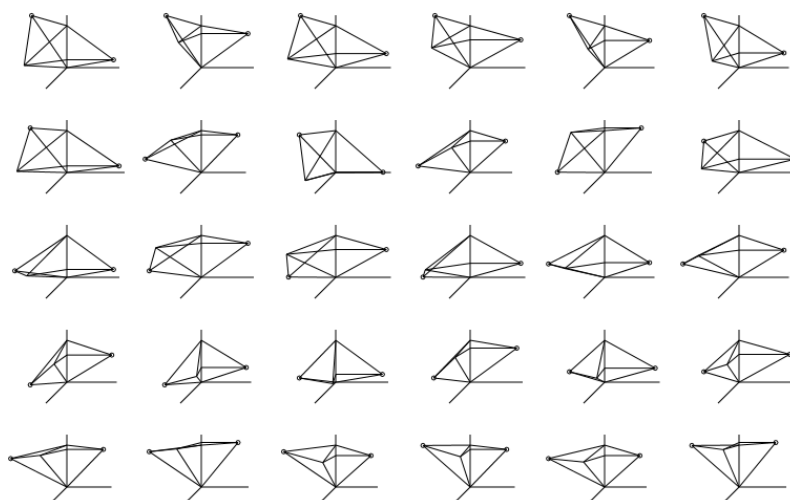


Рис. 25. Изображение тридцати тетраэдров с данным набором рёбер

Итак, доказана теорема.

Теорема 2. Существует шесть различных положительных чисел, таких что найдется 30 неравных тетраэдров, длины ребер которых равны этим числам.

Замечание 2. Обращаем внимание, что проекции на плоскость двух равных тетраэдров визуально могут отличаться (рис. 26, 27).

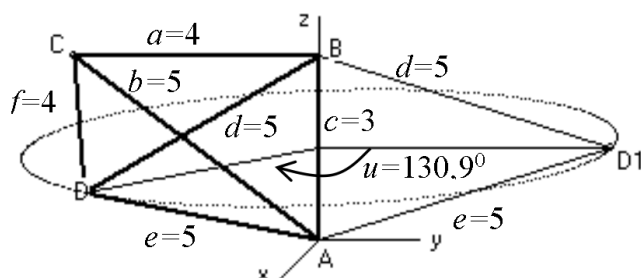


Рис. 26. Различные изображения одного и того же тетраэдра

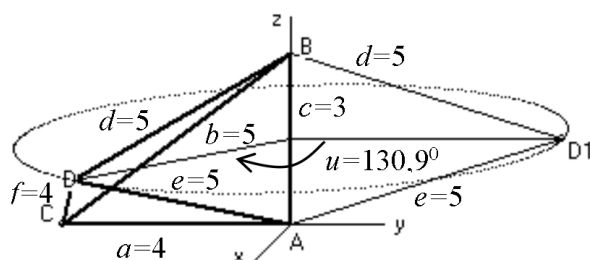


Рис. 27. Различные изображения одного и того же тетраэдра

Замечание 3. Условие о том, что малая величина ε значительно меньше, чем некоторое положительное число g для существования 30 неравных тетраэдров, можно ослабить. Например, компьютерная программа показывает, что для набора $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ и вообще для наборов $g, g+1, g+2, g+3, g+4, g+5$, где $g \geq 7, g \in \mathbb{N}$, существует 30 различных тетраэдров, длины ребер которых равны данным числам.

Все тетраэдры для данного набора ребер имеют равные объемы $[1; 3, \text{с. } 39, 189; 4; 5]$.

Список литературы

1. Ермилов Н. О. Восстановление тетраэдров по заданному набору длин ребер // Математические заметки. 2012. Т. 91. Вып. 4. С. 530–538.
2. Кожухов С. Ф., Совертков П. И. Сборник задач по дискретной математике. СПб.: Лань, 2018. 324 с.
3. Майоров В. М., Скопец З. А. Векторное решение геометрических задач. М.: Просвещение, 1968. 252 с.
4. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1. МЦНМО, 2004.
5. Сабитов И. Х. Алгебраические методы решения многогранников // УМН. 2011. Т. 66. Вып. 3. С. 3–32.

Modeling the reconstruction of tetrahedra with a given set of edge lengths

Sovertkov Pyotr Ignatievich

PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Geometry, Herzen State Pedagogical University of Russia. Russia, St. Petersburg. E-mail: psovertkov@mail.ru

Abstract. In a simple and understandable problem for students and teachers is investigated: the reconstruction of tetrahedra from a given set of edge lengths. This article focuses on modeling the reconstruction of tetrahedra with a given set of edge lengths, which allows for the use of computer simulations to find all tetrahedra with the proposed set of edges and identify equal tetrahedra in specific cases where some edges are equal. A different method is proposed for determining the maximum number of tetrahedra, and the range of edge lengths for which the maximum number of tetrahedra can be constructed is expanded.

Keywords: A loaded homogeneous graph with six edges and four vertices.

References

1. Ermilov N. O. *Vosstanovlenie tetraedrov po zadannomu naboru dlin reber* [Restoration of tetrahedra from a given set of edge lengths] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical Notes. 2012. Vol. 91. Is. 4. Pp. 530–538.
2. Kozhukhov S. F., Sovertkov P. I. *Sbornik zadach po diskretnoj matematike* [Collection of problems on discrete mathematics]. SPb. Lan, 2018. 324 p.

3. Mayorov V. M., Skopets Z. A. *Vektornoe reshenie geometricheskikh zadach* [Vector Solution of Geometric Problems]. M. Prosveshchenie, 1968. 252 p.

4. Ponarin Ya. P. *Elementarnaya geometriya* [Elementary Geometry]. Vol. 1. MCNMO, 2004.

5. Sabitov I. Kh. *Algebraicheskie metody resheniya mnogogrannikov* [Algebraic Methods for Solving Polyhedra] // UMN. 2011. Vol. 66. Is. 3. Pp. 3–32.

Поступила в редакцию: 05.02.2025

Принята к публикации: 08.04.2025

О восхождениях от представлений к базисным математическим понятиям

Когаловский Сергей Рувимович

кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики, информатики и методики обучения, Шуйский филиал, Ивановский государственный университет.
Россия, г. Иваново. E-mail: askogal@yandex.ru

Аннотация. Проясняются место и роль внерациональных форм мышления в обучении математике в старшей школе. Статья приводит к осознанию смысловых скачков как необходимого механизма восхождения на рациональный уровень мышления. Она помогает понять и то, что теоретический уровень мышления, строгость в полной мере реализуют свою продуктивность во взаимодействии с «наивными» формами мышления, в развивающемся деятельностном диалоге с ними.

Ключевые слова: строгое понятие, определение понятия, процесс формирования базисного понятия, от представлений к строгому понятию, смысловые скачки, «высшие» и «низшие» формы мышления, теоретическое мышление, диалог разных форм и уровней мышления.

Может ли решение искусственным интеллектом (ИИ) математической проблемы основываться на использовании открываемого им нового *метода*? А если может, то как этот метод «экстрагировать» из ее решения, состоящего, может быть, из миллионов элементарных операций? Можно ли научить ИИ выделять *структуру* полученного им решения в виде схемы, хорошо обозримой для человека? И всегда ли это возможно? Возможно ли ИИ с его фантастическими возможностями преодоления ограниченности объема памяти человека, объема используемой им информации, уровней сложности исследуемых им систем успешно направлять на открытие новых эффективных *методов* и *принципов* исследовательской деятельности и делать эти методы и принципы доступными для человеческого понимания?

Но не уступает ли ИИ со своими потенциальными возможностями в том, что связано с методами и принципами исследования, человеку, мышление которого способно превращать свои слабости, ограниченность своих возможностей в свою силу, выразительно демонстрируемую «непостижимой» эффективностью математики? И не являются ли такой силой способности к схематизации, к идеализации, к трансцендированию? Не несет ли такую силу диалогическая природа человеческого мышления? Не несет ли ее способность к рефлексии, рождающая развитие мышления, его преобразования? Не является ли такой силой многопоколенная исследовательская деятельность с развивающейся ее методологией?

Отнюдь не беспочвенна надежда на то, что исследования таких вопросов будут стимулировать исследования глубинных механизмов мышления. Антропологические планы, прежде всего связанные с человеческим мышлением, с его особенностями, не могут не быть существенным компонентом исследований вопросов, связанных с развитием возможностей ИИ, вопросов о его принципиальных возможностях. Ведь ИИ создан и развивается как образ человеческого мышления (но не как его подобие).

К этим вопросам мы обращаемся здесь не как к предмету исследования, а как к рождающим такой контекст, в рамках которого откроются возможности более далеко идущего «овнешнения» вопросов, казалось бы, с ИИ не связанным, а именно вопросов методологии и методики развивающего обучения. Во всяком случае, даже начало погружения в такой контекст несет освежающий взгляд на эти вопросы.

1. Рассмотрим следующую задачу: вычислить $A_{2025^2-A_{2024} \cdot A_{2026}}$, где A обозначает $10^{10000000000}$ раз повторенную цифру 1. Очевидна невозможность непосредственного вычисления такого выражения, строящегося из столь необозримо огромных чисел. А попытки использования

компьютера сталкиваются уже с задачей ввода в него этого выражения. Но даже шестиклассник легко решит эту задачу: он *усмотрит форму=структуру* заданного выражения, представляемую алгебраическим выражением $a^2-(a-1)(a+1)$, являющимся *схемой*, а значит, *моделью* заданного выражения и тождественно равным 1. За этим усмотрением скрывается восхождение на *надпредметный уровень* рассмотрения. Это восхождение, эта обращенность к надпредметному, а с ним к метапредметному уровню, приведшая к простому решению задачи, является продуктом «овнешнения»¹ «внутренних» механизмов мышления.

Можно ли научить ИИ *схематизациям* как средствам нахождения и использования эффективных *моделей* исследуемых объектов и тем самым приблизить его к *подобию* человеческого интеллекта? Этот вопрос сводится к вопросу о том, в какой мере представима в рациональной форме работа механизмов мышления, осуществляющих схематизации.

Не поможет ли прояснению этого вопроса использование, хотя бы в качестве полезных намеков, методов обучения школьников схематизации? Каковы же эти методы? И насколько они способствуют формированию способностей к построению и использованию эффективных моделей исследуемых объектов, являющемуся необходимым компонентом поисково-исследовательской деятельности?

2. Члены гармонического ряда $1+1/2+1/3+\dots$ становятся как угодно малыми. А значит, чем больше номер n , тем меньше его частная сумма $S_{n+1}=1+1/2+1/3+\dots+1/n+1$ отличается от частной суммы $S_n=1+1/2+1/3+\dots+1/n$. Такое отличие с возрастанием n стремится к 0. Сходится ли этот ряд?

Последовательность частных сумм этого ряда является неограниченно возрастающей. Вот как просто это можно *усмотреть*:

$$S_{n+k}-S_n=1/(n+1)+1/(n+2)+\dots+1/(n+k)>k/(n+k), \text{ в частности, } S_{2n}-S_n>n/2n=1/2.$$

Отсюда неограниченное возрастание этой последовательности выводится очевидным образом. Это усмотрение является продуктом «овнешнения» «внутренних» механизмов мышления, рациональным продуктом, в сотворении которого участвовали не только механизмы рационального мышления.

Можно ли научить ИИ таким «усмотрениям»? Можно ли выразить в рациональной форме участвующую в усмотрениях работу внерациональных форм мышления, выразить так, чтобы это могло служить средством обучения ИИ таким «усмотрениям»?

В какой мере сегодняшние методы обучения школьников математике способствуют формированию их способностей к подобным продуктивным усмотрениям? За этим и сформулированным выше вопросом «прячется» и вопрос о том, в какой мере методы обучения математике соотносятся с участием в математической деятельности механизмов внерационального мышления.

3. Попутно обратимся к следующему вопросу: возможно ли научить ИИ решать задачи на много более высокого уровня, подобные, например, обнаружению невыводимости пятого постулата из остальных аксиом евклидовой геометрии, и возможно ли научение такому их решению, которое не использовало бы логическую семантику?

При всех различиях характеров и уровней сложности рассмотренных трех задач, относящихся к ИИ, общей для них является предельно рациональная форма их постановок. Существенно иной является постановка задачи, подобная следующей: отправляясь от визуальных представлений о касательной к кривой, сформировать такое строгое понятие касательной, которое было бы эффективным орудием решения широкого класса задач. (Под строгим математическим понятием понимается такое, определение которого выразимо на языке исчисления предикатов первой или более высокой ступени). О значимости таких постановок задач говорит уже то, что истоками базисных понятий математического анализа, не говоря уже о таких первичных математических понятиях, как понятия натурального числа, линии, прямой, поверхности, являются обыденные визуальные представления. Как поставить перед ИИ такую задачу? За этим вопросом скрывается целый ряд отнюдь не простых вопросов о возможности построения работоспособных ИИ-моделей таких интеллектуальных механизмов, как *обобщение*, *идеализация* и *трансцендирование*. За такими вопросами стоит и вопрос о том, можно ли от ИИ ожидать математических результатов новой «природы».

Было бы общим местом говорить о способности человека усматривать аналогию и соотноситься с ней, о способности к продуктивному ассоциированию далеких фактов, далеких идей, о способности рождать общие представления и общие понятия на базе даже незначительного количества образцов. Но отнюдь не общим местом является задача «вложения» этих способностей в ИИ. Ее решение привело бы к существенно большим его возможностям.

Отнюдь не проходными являются и вопросы о том, каковы сегодняшние методы обучения математике, способствующие развитию у школьников механизмов обобщения, идеализации и трансцендирования.

¹ Этот выразительный термин принадлежит М. К. Мамардашвили.

Исследование вопросов о принципиальных возможностях ИИ не может не предполагать исследования вопросов, связанных с *диалогической природой человеческого мышления*, с его способностью к рефлексии и критичности, а с ними способности к развитию поисково-исследовательской деятельности, несущие ее преобразование. Диалогическая природа мышления проявляется уже в том, что мышление – это «*процесс непрерывно совершающегося взаимного перевода с языка образов на символически-операторный язык*» [3, с. 134]. Согласно Ю. М. Лотману [12, с. 36], всякое мыслящее устройство должно включать в себя «разноязычные» и взаимонепереводимые знаковые образования. Напрашивается использование в качестве «мыслящего» устройства взаимодействие двух ИИ с различающимися интеллектуальными «начинками». Однако принципиально важно то, что человеческое мышление представляет взаимодействие таких «начинок», одна из которых мыслит аналитически, а другая – целостными образами.

Существует ли такое *единое, целостное* средство обучения школьников математике, которое эффективно способствовало бы развитию у них всех названных выше качеств человеческого мышления и тем способствовало развитию их математического мышления, а с ним и общего их интеллектуального развития?

Говоря о математическом мышлении, мы имеем в виду такой его важный компонент, который выступает как ведущий компонент, как ведущее орудие математической деятельности. Это не просто рациональное, не просто понятийное, но *предельно рациональное мышление*, воплощающее *строгость*. Оно отключает неявные знания и неявные контексты, что делает его мышлением в рамках всеобщего и направляет математическую деятельность на движение к «первоначалам». Оно обращено к идеальным объектам и идеальным орудиям деятельности, то есть к таким, которые выразимы на языке исчисления предикатов какой-либо ступени, или, что равносильно, на языке расселовской теории типов. Оно подчинено законам формальной логики (логики предикатов, или, что равносильно, логики теории типов).

Предельно рациональное мышление преобразует понятийную форму мышления в продуктивную орудийную форму мышления, несущую в себе потенцию далеко идущего развития.

Строгость воплощается прежде всего в строгой форме фундаментальных математических понятий, являющихся базисными понятиями изучаемого курса математики и образующих его несущий каркас, то есть в выразимости этих понятий на языке исчисления предикатов. Их освоение – это ведущее, это ядерное начало освоения курса математики. Приобщение учащихся к этим понятиям как к строгим понятиям в форме прямого участия в процессах их *формирования* и освоения является искомым целостным средством, средством настолько же эффективным, насколько и природосообразным. Оно активизирует креативность учащихся как в «техническом» плане, так и в плане мета-идей. Это средство реализуемо не только на вузовском уровне обучения, но и в старшей общеобразовательной школе².

Приобщение учащихся к базисному математическому понятию обычно осуществляют посредством обращения к его *определению*, а обращения к представлениям, явившимся его интуитивным истоком, используются лишь в качестве пояснений к определению. В результате в их сознании вводимое понятие подменяется его интуитивным истоком и обращение к определению воспринимается как мертвый ритуал. Так происходит потому, что определение строгого понятия предстает как *внеконтекстное*. Оно не раскрывает ни способы использования этого понятия, ни его орудийный смысл. (Ситуация еще более усложняется, если определение имеет высокий уровень логической сложности). Такое приобщение подобно приобщению к лекарству, описание которого выражено на не очень знакомом языке и является лишь описанием его состава, оставляя в неведении относительно показаний к его применению и способов применения. Такое приобщение есть следование буквалистски понимаемому тезису «Математика – это логика», уводящее и от логики, и от самих целей обучения математике.

Что же может быть воспринято из буквалистски прочитываемого определения такого понятия, как выразимого на языке исчисления предикатов (первой или более высокой ступени)? Такое определение – это, по сути, описание формально-логического «скелета» *модели* интуитивных представлений, послуживших истоком этого понятия. Язык его определения – это логико-«анатомический» язык, язык логического описания этой модели. Если обыденный, житейский язык выражает интуитивные или полуинтуитивные представления или намекает на них и обращает к привычным контекстам, а тем способствует пониманию или хотя бы пред-пониманию выражаемого на нем, то язык определения выражает мета-план, логический план, выступающий как предшествующий содержательному плану. Это отнюдь не способствует работе механизмов понимания учащихся. А «поясняющие» примеры, сколько

² [см. 6; 7; 9].

бы их ни было, не только не помогают делу, но вводят учащихся в заблуждение как кричаще неадекватные «переводы» с языка исчисления предикатов на житейский язык.

Конечно, определение, например, строгого понятия предела последовательности, можно выразить в более свернутой форме, не как обычно на языке узкого исчисления предикатов, а на языке расширенного исчисления предикатов, что в какой-то мере помогает рождению образного его представления. Это несколько облегчает схватывание смысла понятия, но как рассматриваемого изолированно, автономно, «самого по себе», а не как орудия поисково-исследовательской деятельности.

Строгость определения базисного математического понятия воплотима во внеконтекстной форме, за которой скрывается его над-контекстность, представляющая его поли-контекстность. Это порождает, казалось бы, непреодолимые трудности освоения понятия. В действительности трудности порождает сам укоренившийся способ приобщения к таким понятиям, не отвечающий ни их природе, ни ролям, ни характеру математического мышления.

Какой же способ открывает пути освоения учащимися такого понятия, как строгого понятия, освоения возможностей, несомых его строгостью?

Процессу освоения базисного понятия должно предшествовать прежде всего обретение учащимися начального опыта наивной поисковой деятельности, использующей интуитивные представления, которым предстоит играть роль истока, роль прообраза этого понятия как начала такого конструируемого «исторического», которое отвечает задаче освоения учащимися соответствующего логического [см. 8; 9; 10].

Столкновение с ситуациями, в которых обнаруживается размытость этих представлений, будет для учащихся служить средством осознания необходимости их уточнения.

Определение базисного математического понятия представляет *результат* его опредмечивания как продукта исторического процесса его становления. И потому естественным средством его освоения является его распредемечивание в форме процесса восхождения к нему от представлений, послуживших его истоком. Такой процесс не должен воспроизводить исторический процесс его становления. Более того, он должен быть иным, зримо проявляющим не просто логику формирования этого понятия, но и мета-логику подобных процессов, и тем самым способствующим постижению учащимися характера математического мышления [см. 8; 9].

Природосообразно организованные процессы восхождений к базисным математическим понятиям осуществимы как не только несущие их освоение, но и как являющиеся эффективными средствами освоения продуктивных стратегий поисково-исследовательской деятельности. Этому способствуют и несомые такими процессами восхождения на метатеоретические уровни, необходимые для осознанного освоения учащимися понятийного уровня мышления, для осознания места и роли *моделирования* в математической деятельности.

В таком процессе, отвечающем природе фундаментальных математических понятий, их ролям, формируемое понятие обретает смысл, выступая как осваиваемое орудие математической деятельности и как «средство производства» таких орудий. При активном участии в нем учащихся его объективная сложность перестает быть для них сложностью понимаемой. Она становится подобной объективной сложности физиологического процесса усвоения пищи.

Процесс восхождения к базисному математическому понятию эффективно и природосообразно осуществим как диалог между формируемым понятием и развивающимися интуитивными представлениями, послужившими его истоком и представляющим его «предысторию». Процесс освоения сформированного понятия осуществляется как деятельностный диалог между развивающимся представлением об исследуемом объекте и его развивающейся рациональной моделью как развивающийся диалог в рамках расширяющегося и развивающегося контекста. Участие учащихся в таких процессах является не просто эффективным, но продуктивным средством развития диалогичности их мышления, продуктивным средством их математического развития.

Орудийный смысл базисного математического понятия раскрывается только посредством погружений в широкое многообразие отвечающих ему контекстов, в широкое многообразие форм математической деятельности (что требует многообразия форм его представления). Только такие погружения несут освоение его как эффективного орудия математической деятельности. Только такие погружения несут раскрытие и реализацию возможностей, несомых строгостью этого понятия. Они несут развитие процесса освоения этого понятия.

Такой процесс не может не соотносываться с тем, что, согласно Х. Вернеру, «*более продвинутые состояния требуют для своего появления примитивного фона, из которого они ... никогда полностью не отделяются*» и что «*возврат ... к примитивным формам познания в определенных условиях является необходимым механизмом дальнейшего развития*» [см. 15, с. 86]. Такие возвраты к отправным представлениям естественны и целесообразны и как обращенности к начальным ориентирам в новом, предельно рациональном «мире» [см. 9]. К тому же возможности, несомые строгим

понятием, не исчерпывают тот орудийный потенциал, который заложен в его истоках. Рациональный язык не может выразить его в полной мере. (С другой стороны, рациональный уровень мышления несет новые возможности открытия эффективных орудийных средств, недоступные для до-рационального уровня мышления). Поэтому представления должны участвовать в процессе формирования и освоения базисного понятия не только на начальных этапах этого процесса, но на всем его протяжении, развиваясь и взаимодействуя с осваиваемым понятием, в диалоге с ним. «Наивные» формы мышления должны участвовать в становлении, функционировании и развитии теоретического мышления как его неотъемлемые компоненты, развиваясь и взаимодействуя в диалоге с его «высшим» компонентом.

Описанный способ освоения школьниками базисных математических понятий с 60-х гг. использовался автором в обучении и школьников, и студентов вузов, и в занятиях с учителями математики в Ивановском областном институте повышения квалификации учителей. Впервые он был опубликован в [5]. В более развитой форме он представлен, в частности, в монографиях [6; 7]. В названных здесь качествах он представлен в [9]. Если во всех этих работах он предстает как целесообразный, как один из целесообразных, то все сказанное выше показывает его необходимость как способа распределения понятия в форме процесса восхождения к нему от представлений, послуживших его источником. Но, конечно, сам этот способ может быть реализован в разных формах.

Сформированное понятие вначале воспринимается учащимися как продукт уточнения представлений, послуживших его истоком. Но уже в процессе его начальных испытаний на работоспособность обнаруживается существенное отличие его объема и содержания от объема и содержания этих представлений [см. 9]. Последующие его испытания показывают не просто существенно большую его эффективность, но продуктивность. Все эти качества сформированного понятия открываются как неожиданные, как не отвечающие его «пренатальной» стадии, как не отвечающие логике процесса его формирования. Иначе говоря, оно рождается как агенетичный продукт этого процесса, как творческий продукт в смысле А. Ф. Лосева [11]. Его рождение – это скрытый смысловой скачок, обнаруживаемый учащимися, как уже сказано, в процессе испытаний понятия на работоспособность. В полной мере масштаб несомых их преобразований усматривается в процессе освоения понятия, сопровождаемом и другими смысловыми скачками.

Каковы же участвующие в таких процессах механизмы рождения смысловых скачков, не только приводящих к поставленным целям, но и сопровождающихся преобразованиями их мышления? Представляется значимой задача овладения этими механизмами и использования их как эффективных дидактических средств.

Из сказанного выше следует значимость роли внерациональных форм мышления в обучении математике и в старшей школе, и в вузе. Эта роль не может не быть важным предметом исследований.

Так как мышление есть *процесс непрерывно совершающегося взаимного перевода с языка образов на символически-операторный язык* [3, с. 134], то всегда компонентом мышления является мышление образами, мышление представлениями. А значит, нет чисто рационального мышления. То, что называют рациональным мышлением, есть *взаимодействие* рационального мышления и мышления внерационального, нередко осуществляющегося в скрытой форме.

Всегда ли при этом ведущую роль играет рациональный компонент мышления? Разве не устремляет дионисийское начало в познавательной деятельности к началу аполлоническому? И разве аполлоническое начало, предстающее в совершенной форме, не рождает дионисийское начало? Какое же из этих начал является ведущим? Разве эйдос рождается без меонального начала и разве он сам не порождает меональное начало? Какое же из этих начал является ведущим, если *«благодаря единству или синтезу меона и эйдетики только и возможен акт творения»* [13, с. 84]?

Здесь было бы неестественно пройти мимо того, что человек погружен в символический мир и что естественно *«определить человека как animal symbolicum»* [4, с. 32], мимо того, что раскрыть смысл символа возможно *«только при помощи другого (изоморфного) символа. Растворить его в понятиях невозможно»* [2, с. 210], что *«смысл символа... не дан, а задан»* [1, с. 157].

Возможно ли развитие рационального мышления без развития внерациональных его форм? Возможно ли оно без рождения идей, мета-идей, таких, которые становятся движущими силами деятельности творческих личностей, творческих коллективов, таких, которые становятся движущими силами развития культуры, развития социума, таких, которые рождаются в до-рациональной форме и обретают над-рациональное начало? Таковы идеи, рождаемые высокой поэзией и высокими произведениями искусства. Таковы рожденные высокой наукой идеи относительности, дополненности, системности. Таковы высокие математические идеи, истоками которых являются прото-идеи, рожденные уже начальным жизненным опытом.

Такова, в частности, идея становящейся все большей близости, становящегося как угодно малого отличия, или идея предельного перехода. Послужившая еще в Античности истоком метода ис-

черпывания, в последующие века она вела к анализу бесконечно малых, современной формой которого является нестандартный анализ. В начале XIX в. эта идея послужила истоком математического анализа, основывающегося на понятии предела функции. Далеко идущее развитие математического анализа, демонстрирующее продуктивность этой идеи и способ продуктивного рационального ее воплощения как орудия математической деятельности и как «средства производства» таких орудий, превратило ее в символ. Продуктом развития идеи предельного перехода явилось и понятие предела последовательности функций, на базе которых развился функциональный анализ. Продуктом ее развития явилась и теория метрических пространств, и теория нормированных пространств, и общая топология.

На протяжении двух с половиной тысячелетий идея предельного перехода развивалась, служила и поныне продолжает служить истоком высоких творческих продуктов в смысле А. Ф. Лосева [11], предстающих в предельно рациональной форме. Но сама она не обрела рациональную форму. Всякая попытка понятийного, всякая попытка рационального ее представления рождает разве лишь какой-то частный вариант ее воплощения, но не может воплотить в себе всего ее потенциального богатства. Исторический процесс развития этой идеи, представавшей вначале в форме частных ее представлений, превратил ее в над-рациональную идею, в мета-идею.

Процесс формирования какого-либо варианта понятия предела, воплощающего идею предельного перехода и становящегося продуктивным орудием математической деятельности, как и процесс его эффективного освоения, осуществляется как направляемый не на преодоление допонятийных, до-рациональных представлений, послуживших его истоком, а на такое вызревание рационального начала в лоне этих представлений, которое рождает смысловые скачки, несущие его преобразование. Такой процесс осуществляется посредством развивающегося взаимодействия-диалога становящегося понятия с развивающимися представлениями и рождений новых представлений.

Использование формально-логических средств порождает метаморфозу сформированного строгого понятия, выступавшего как продукт уточнения представлений, послуживших его истоком, превращая его в продукт трансцендирования, в агенетичный продукт творческого акта, в понятие, имеющее существенно иное содержание, в понятие, предполагающее существенно иную позицию рассмотрения, в понятие, относящееся к существенно иному, необозримо широкому смысловому пространству, в понятие, обретшее мощную потенцию развития. Тем самым совершается смысловой скачок, несущий преобразование внутренней формы математической деятельности. И это ведет не к преодолению работы представлений, а к их преобразению вместе с преобразованием характера их взаимодействий со сформированным понятием, с рациональным планом.

В сказанном усматривается ответ на вопрос о том, почему смысловой скачок, несомый сформированным понятием, не усматривается или почти не усматривается сразу, а обнаруживается только в процессе освоения этого понятия. Смысловой скачок как результат восхождения на рациональный уровень мышления рождается в потенциальной форме. Осуществленность его проявляется как продукт несомых им актуализированных преобразений мышления. В особой форме это проявляется в случае восхождения на предельно рациональный уровень. Формальное, буквалистское использование определения базисного понятия отключает контроль смысла. Это несет абстрагирование от всего того, что имелось в виду, но явно не выражалось, уводит от этого имевшегося в виду как присутствующего в нашем опыте, выводит за его пределы, за пределы рождаемых им представлений и смыслов. Оно навязывает иной способ рассмотрения, делая предметом рассмотрения формальные стороны дела. Тем самым формальное использование определения рождает существенно новый контекст и существенно новый смысл сформированного понятия. И отправные представления начинают играть поводыря, лучше сказать – подсказчика, развивающегося вместе с освоением этого нового «мира».

Такое восхождение к строгости, открывая возможность полнокровного использования формально-логических средств, подготавливает более далеко идущий смысловой скачок, рождаемый их реализацией.

Определение, например, понятия предела числовой последовательности на языке исчисления предикатов представляет его как строгое понятие, как понятие предельно рационального характера. Но, как уже было сказано, использование этого определения как определения, как дефиниции, становится возможным только посредством процесса формирования этого понятия и как предмета рассмотрения в его «самости», каковым оно предстает в определении, и как орудия математической деятельности. В своей роли определение, как и само сформированное понятие, выступает как продукт этого процесса, как его итог, но не как его начало. А процесс формирования понятия существенно использует погружение в представления, служащие его истоком. Тем самым он основывается на использовании внерациональных средств. Таков природосообразный и эффективный процесс освоения этого понятия как процесс, отвечающий и законам психологии познания, и природе этого понятия как продукта исторического процесса *развития представлений* о предельном переходе.

Сформированность базисного математического понятия как понятия строгого, как понятия предельно рационального открывает возможность исследования его средствами формальной логики. Далеко не в последнюю очередь это средства логической семантики. А значит, это и средства, используемые вместе с логической семантикой. Это образы, это представления. Это и средства, несомые над-рациональным мышлением, обогащенным эффективными орудиями рационального мышления. Обретая предельно рациональную форму, рациональное мышление само становится мощным орудием мышления. За предельно рациональной формой, в которой рассматриваемое понятие предстает в его определении, «прячется» его надрациональная природа, прячется роль непосредственно с ним связанных, представляемых им «низших», допонятийных форм мышления, превращаемых в «высшие» посредством их взаимодействий с понятийным мышлением. Да и за «звучанием» самого понятийного мышления при таком взаимодействии начинают «звучать» надпонятийные обертоны, обертоны развивающейся мета-идеи.

Важно отметить отличие процессов приобщения учащихся к фундаментальным математическим понятиям от процессов приобщения их к научным понятиям, состоящее в пронизывании их напряженными рефлексированиями, соотношениями с мета-теоретическим уровнем, в рождении и развитии мета-идей, в предельной рациональности этих понятий, открывающей возможность реализации преобразующей роли формально-логических средств.

А так как математика, говоря словами Канта, изучает не вещи, а способы изучения вещей, то математическое моделирование является существенным, всепронизывающим методом исследования и внутренних вопросов самой математики. Отсюда и саморефлексивность математики. Отсюда ясно и то, почему восхождение от абстрактного к конкретному в математической деятельности нередко осуществляется посредством движения от абстрактного предметного к конкретному метапредметному.

Если творческие продукты математической деятельности предстают (вместе с их обоснованиями) в строгой, предельно рациональной форме, то сама эта деятельность (как и деятельность, связанная с их использованием) представляет сопровождаемое смысловыми скачками активные и напряженные взаимодействия предельно рационального и внерациональных форм мышления, сознания и подсознания⁴, их неразрывное единство.

Конечно, последнее верно далеко не только для математической деятельности, предметами которой являются способы (человеческого) познания как реальных, так и мыслимых объектов. Известный российский психолог М. И. Холодная не случайно говорит [14] о мифе о рациональной природе человеческого интеллекта.

Рациональная форма мышления и формируется, и функционирует, и развивается во взаимодействиях с «низшими» формами мышления, в развивающемся диалоге с ними, *сопровождаясь смысловыми скачками*. И в таких взаимодействиях-диалогах она полнокровно реализует свою продуктивность. В таких взаимодействиях-диалогах «низшие» формы мышления как формы до-рациональные преобразуют свой характер, становясь формами, и не только формами, но и орудиями рационального и над-рационального мышления. Они сами становятся над-рациональными формами мышления.

Таким образом, полнокровное развитие мышления учащихся и при обучении математике осуществимо не как развитие только рационального его компонента (которое нередко пытаются осуществлять как преодоление внерационального его «уровня»), а как развивающийся диалог-взаимодействие развивающихся внерационального и предельно рационального его компонентов. Такое развитие ведет к преобразованию их понятийной формы мышления в продуктивную орудийную форму мышления, несущую в себе потенцию далеко идущего развития. Оно ведет к развитию теоретического, или разумного мышления учащихся.

Список литературы

1. Аверинцев С. С. Символ // София-Логос : словарь. Изд. 2-е, испр. Киев : Дух і Літера, 2001. С. 155–161.
2. Бахтин М. М. К методологии литературоведения // Контекст 1974. М. : Наука, 1975. С. 203–212.
3. Веккер Л. М. Психические процессы. Т. 2. Л. : Изд. Ленинградского университета, 1976. 341 с.
4. Кассирер Э. Избранное. Опыт о человеке: введение в философию человеческой культуры. М. : Гардарики, 1998. 784 с.
5. Когаловский С. Р., Шмелева Е. А., Герасимова О. В. Путь к понятию: от интуитивных представлений – к строгому понятию (Изд. 2-е, перераб.). Иваново : Ивановский областной институт повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров, Шуйский государственный педагогический университет, 1998. 206 с.
6. Когаловский С. Р. Поиски метода и методы поиска. Шуя : Шуйский гос. пед. ун-т, 2006. 368 с.
7. Когаловский С. Р. Онтогенетический подход к обучению школьников математике. Иваново : Ивановский гос. университет, 2018. 316 с.

⁴...включающего сверхсознание.

8. Коголовский С. Р. О филогенетическом и онтогенетическом подходах к обучению // Научный поиск: личность, образование, культура. 2022. № 1. С. 3–13.
9. Коголовский С. Р. О методе восхождения учащихся к ведущим математическим понятиям // Вестник Ивановского гос. университета. Серия: Естественные и общественные науки. 2022. № 2. С. 63–84.
10. Коголовский С. Р. О системообразующих принципах развивающего обучения. Часть I / Школьные технологии. 2024. № 5. С. 8–18.
11. Лосев А. Ф. Диалектика творческого акта (краткий очерк) // Контекст 1981. М. : Наука, 1982. С. 48–78.
12. Лотман Ю. М. Избранные статьи : в 3 т. Т. I. Статьи по семиотике и топологии культуры. Таллин : Александра, 1992. 247 с.
13. Раков В. П. Меон и стиль. Иваново – Шуя : Изд-во ШГПУ, 2010. 448 с.
14. Холодная М. А. Психология интеллекта. СПб. : Питер, 2002. 272 с.
15. Чуприкова Н. И. Психология умственного развития: Принцип дифференциации. М. : Столетие, 1997. 480 с.

On ascents from representations to basic mathematical concepts

Kogalovsky Sergey Ruvimovich

PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Mathematics,
Computer Science and Teaching Methods, Shuisky Branch, Ivanovo State University.
Russia, Ivanovo. E-mail: askogal@yandex.ru

Abstract. The place and role of non-rational forms of thinking in teaching mathematics in high school are clarified. The article leads to the realization of semantic leaps as a necessary mechanism for ascending to a rational level of thinking. It also helps to understand that the theoretical level of thinking and rigor fully realize their productivity in interaction with "naive" forms of thinking, in a developing active dialogue with them.

Keywords: A strict concept, definition of a concept; the process of forming a basic concept; from concepts to a strict concept; semantic leaps; "higher" and "lower" forms of thinking; theoretical thinking; dialogue of different forms and levels of thinking.

References

1. Averintsev S. S. *Simvol* [Symbol] // Sofia-Logos. Dictionary. 2nd, ispr. ed. Kiev. Dukh i Litera, 2001. Pp. 155–161.
2. Bakhtin M. M. *K metodologii literaturovedenija* [Towards the methodology of literary criticism] // Context 1974. M. Nauka (Science), 1975. Pp. 203–212.
3. Vekker L. M. *Psichicheskie processy. T. 2* [Mental processes. Vol. 2]. Publishing House of Leningrad University, 1976. 341 p.
4. Cassirer E. *Izbrannoe. Opyt o cheloveke: vvedenie v filosofiju chelovecheckoj kultury* [Favorites. The experience of man: an introduction to the philosophy of human culture]. M. Gardariki, 1998. 784 p.
5. Kogalovsky S. R., Shmeleva E. A., Gerasimova O. V. *Putj k ponjatiju: ot intuitivnyh predstavlenij k strogomu ponjatiju (izdanie vtoroe, pererabotannoe)* [The path to a concept: from intuitive concepts to a strict concept (second edition, revised)]. Ivanovo. Ivanovo Regional Institute for Advanced Training and Retraining of Teaching Staff, Shuja State Pedagogical University, 1998. 206 p.
6. Kogalovsky S. R. *Poiski metoda I metody poiska* [Method search and search methods]. Shuya. Shuya State Pedagogical University, 2006. 368 p.
7. Kogalovsky S. R. *Ontogeneticheskij podhod k obucheniju shkolnikov matematike* [An ontogenetic approach to teaching mathematics to schoolchildren]. Ivanovo. Ivanovo State University, 2018. 316 p.
8. Kogalovsky S. R. *On filogeneticheskoe i ontogeneticheskoe podhodah k obucheniju* [On phylogenetic and ontogenetic approaches to learning] // Scientific Search: Personality, Education, Culture. 2022. No. 1. Pp. 3–13.
9. Kogalovsky S. R. *O metode voshozhdenija ucyaschihsja k vedushim matematicheskim ponjatijam* [On the method of students' ascent to the leading mathematical concepts] // *Vestnik Ivanovskogo gos. universiteta* – Bulletin of the Ivanovo State University. Series: Natural and Social Sciences. 2022. No. 2. Pp. 63–84.
10. Kogalovsky S. R. *O sistemoobrazujuschih principah razvivajushego obuchenija. Ch. 1* [On the system-forming principles of developing learning. Part I] / School Technologies. 2024. No. 5. Pp. 8–18.
11. Losev A. F. *Dialektika tvorcheskogo akta (kratkij ocherk)* [Dialectics of the creative act (a brief essay)] // Context 1981. M. Nauka (Science). 1982. Pp. 48–78.
12. Lotman Yu. M. *Izbrannye stat'i : v 3 t. T. 1. Stat'i po semiotike i tipologii kul'tury* [Selected articles : in 3 vols. Vol. 1. Articles on semiotics and typology of culture]. Tallinn. 1992. 247 p.
13. Rakov V. P. *Meon I stilj* [Meon and style]. Ivanovo – Shuya. SHSPU Publishing House, 2010. 448 p.
14. Holodnaja M. A. *Psichologija intellect* [Psychology of intelligence]. SPb. Piter, 2002. 272 p.
15. Chuprikova N. I. *Psichologija umstvennogo razvitiya: Princip differenciacii* [Psychology of mental development: The principle of differentiation]. M. Stoletie (Century), 1997. 480 p.

Поступила в редакцию: 14.04.2025

Принята к публикации: 02.07.2025

ПЕРСОНАЛИИ

УДК 51(091)

DOI: 10.25730/VSU.0536.25.004

Памяти выдающегося философа математики Василия Яковлевича Перминова (1938–2024)

**Варанкина Вера Ивановна¹, Вечтомов Евгений Михайлович²,
Фролкина Ольга Дмитриевна³**

¹кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-4166-1182. E-mail: veravarankina@gmail.com

²доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

³кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Россия, г. Москва. ORCID: 0000-0001-8680-3952. E-mail: odfrunki@mail.ru

Аннотация. Прослежен профессиональный путь В. Я. Перминова, выпускника физико-математического факультета Кировского государственного педагогического института имени В. И. Ленина, выдающегося ученого в области философии математики и теории познания, заслуженного профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Ключевые слова: Василий Яковлевич Перминов, философия математики, Кировский пединститут, Московский государственный университет.



4 декабря 2024 г. скончался известный философ математики, доктор философских наук, профессор, заслуженный профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (МГУ) Василий Яковлевич Перминов.

Василий Яковлевич родился 2 июня 1938 г. в деревне Мещане Мурашинского района Кировской области в крестьянской семье. В 1955 г. окончил среднюю школу села Боровица Мурашинского района.

С благодарностью вспоминал своих учителей, работавших на совесть, глубоко и с душой. Особенно выделял учителя математики Розу Ивановну Заборских (1928–2000) и учителя немецкого языка Александра Ивановича Михалицына (1924–2006).

В 1955–1960 гг. учился на физико-математическом факультете Кировского государственного педагогического института имени В. И. Ленина (КГПИ). Интересны, познавательны и поучительны воспоминания ученого о периоде учебы в КГПИ [2, с. 153–163]. Среди преподавателей физико-математического факультета не было равнодушных людей, все работали добросовестно, профессионально, с уважением относились к студентам. Провинциальный вуз заложил основы математического образования и воспитал профессиональные качества учителя на всю последующую жизнь.

В. Я. Перминову особенно нравились лекции по математическому анализу и теории функций действительного переменного доцента (впоследствии профессора) Федора Федоровича Нагибина (1909–1976), одного из ведущих методистов-математиков страны. Любовь к философии ему привил преподаватель философии, доцент Николай Никитич Харин (преподавал в КГПИ в 1952–1959 гг.), ученик известного логика, профессора МГУ Софьи Александровны Яновской (1896–1966). Позднее именно к Яновской Харин рекомендовал Перминову обратиться по поводу поступления в аспирантуру по философии. Большое влияние оказал кружок по теории относительности, который организовал преподаватель физики, доцент Иван Иванович Бессонов (1904–1967). Поколебавшись, Василий Яковлевич выбрал путь философа.

Начиная со студенческих времен, Перминов дружил со своим однокурсником, будущим замечательным геометром, профессором Яковом Петровичем Понариным (1934–2008).

В 1960–1963 гг. В. Я. Перминов преподавал математику и астрономию в средней школе села Нагорское Мурашинского района. Позднее преподавал математику в московской школе.

В 1963 г. поступил в аспирантуру Института философии Академии наук СССР.

В 1968 г. получил степень кандидата философских наук, защитив диссертацию на тему «Математическое предвосхищение и развитие научного знания» в Институте философии АН СССР.

С 1968 г. до конца жизни работал на кафедре философии и методологии науки МГУ, которая в настоящее время называется кафедрой философии естественных факультетов и относится к философскому факультету.

В 1986 г. Василий Яковлевич Перминов защитил докторскую диссертацию «Философские основания представлений о строгости математического доказательства» по философским наукам, а в 1990 г. стал «ваковским» профессором.

Звание заслуженного профессора МГУ присвоено ему в 1998 г. В 2018, 2023 и 2024 гг. Василию Яковлевичу объявлялась благодарность ректора: за многолетнюю плодотворную деятельность по совершенствованию учебного процесса, развитию научных исследований и обеспечению деятельности Университета. Награждался почетными грамотами Минобрнауки.

Основная преподавательская деятельность В. Я. Перминова связана с механико-математическим факультетом МГУ, где он читал лекции и проводил семинары по истории философии и философии математики для студентов и аспирантов. В разные годы преподавал также на *других* факультетах МГУ, читал спецкурсы и межфакультетские курсы по философии. Студенты и аспиранты любили его за живость и яркость преподавания, глубину и ясность изложения, широкий кругозор, чувство юмора.

Философские взгляды В. Я. Перминова относятся к фундаменталистской философии математики, не отрицающей значения социокультурных факторов, носящих, впрочем, ограниченный, не определяющий и не решающий характер.

Можно говорить о *философии математики Перминова* как целостной системе взглядов на природу, основания и функционирование математического знания, основанную на принципах априорных аподиктических очевидностей и праксиологии. Безусловной научной заслугой Перминова является введение в философию познания аподиктических очевидностей (как фундаментальной гносеологической категории), их анализ и классификация. Такой подход позволил Перминову обосновать надежность и достоверность понятия математического доказательства. При этом математическая наука выступает самой теоретически точной и практически эффективной из наук. Философские основания математики, опирающиеся на онтологию и практику, убедительно обосновывают непротиворечивость самой математики.

Приведем выдержку из юбилейной заметки [3] о гносеологических воззрениях Василия Яковлевича Перминова на философию математики: «...предпринял попытку обновить и углубить идеи традиционного априоризма и положить их в основу понимания природы математического знания. В. Я. Перминов предлагает классификацию математических очевидностей и основанную на ней концепцию абсолютности (законченности) математического доказательства; с этой точки зрения критикует эмпирическое направление в философии математики, неоправданно сближающее, по его мнению, методологию математики и методологию опытных наук. ... обосновывает априорный характер центральных онтологических категорий, таких как пространство, время и причинность; априорное при этом понимается как универсально-нормативное, порожденное деятельностью установками субъекта (праксеологический априоризм). В теории познания в целом придерживается марксистской ориентации, считая, однако, что теория познания марксизма должна быть доведена до признания и оправдания априорного знания».

Основные идеи и принципы философии математики Перминова изложены в его главных монографиях [1; 5–7].

Отметим, что философские взгляды Василия Яковлевича созвучны умеренно-платонистской фундаменталистской философии математики, которой придерживается Е. М. Вечтомов [4].

Научные достижения В. Я. Перминова включают около 150 публикаций, в том числе 13 монографий и учебных пособий, регулярные выступления с докладами, редактирование сборников работ по философии науки и теории познания. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций, он был научным консультантом докторской диссертации. Входил в состав редколлегии «Российского гуманитарного журнала» и «Вестника Вятского государственного университета».

Василий Яковлевич Перминов являлся признанным ведущим философом математики в России, оставил первоклассные труды по философии математики и гносеологии, воспитал многочисленных учеников.

Василий Яковлевич был очень молод душой. Ему было интересно все – люди, наука, преподавание, музыка. Любил путешествовать по городам, музеям, фотовыставкам, книжным выставкам;

посещать литературные, музыкальные, философские и религиозные встречи. Очень хотел научиться водить и проехать по России на автомобиле. Был человеком добрым, отзывчивым, мудрым. Люди часто обращались к нему со своими вопросами и проблемами, и он всегда мог найти слова понимания и поддержки.

Всегда с благодарностью вспоминал свою маму Евдокию Владимировну (1913–1991), человека большой души и невероятной стойкости. Помогал ей с детства в поле, по дому, по хозяйственным работам, с животными – лошадьми, коровами, свинками. Детей у Евдокии Владимировны было пятеро, три девочки умерли в детстве от различных болезней. Мама **приложила** много сил, чтобы поднять детей, дать им образование. Младший ее сын Леонид Серафимович Перминов (1948–2004) стал учителем математики, долгое время был директором школы в Кирове. Яков Николаевич (1912–1943), отец Василия Яковлевича, погиб на войне в бою – был снайпером. Василий Яковлевич разыскал примерное место захоронения, которое, к сожалению, пока уточнить не удалось.

Несмотря на огромные трудности, Василий Яковлевич вспоминал о своем детстве как об очень счастливым периоде жизни. Свобода, просторы, замечательные люди. Чтение, мечты о будущем...

Василий Яковлевич играл с детства на баяне и гармошке. Помнил веселые деревенские наигрыши своей малой родины. Играл в студенческом оркестре на трубе и пел в хоре.

Всегда старался заниматься зарядкой, прогулками, бегом, лыжами. В юности занимался в лыжной секции. Любил играть в пинг-понг и в большой теннис.

Любил поэзию, особенно XIX века – А. С. Пушкина, В. А. Жуковского, М. Ю. Лермонтова, А. М. Жемчужникова, А. Н. Апухтина. Упоминал как одну из любимых книг «Цусиму» А. С. Новикова-Прибоя. Любил мемуары и переписку интересных людей, публицистику патриотической направленности. Думал и сам писать на эту тему, но откладывал, вкладывая все силы в центральное свое



дело – философию. Много лет работал над книгой по философии времени, переделывал, улучшал; в последние годы из-за этой книги практически отказался от отдыха, развлечений, написания статей, профилактики болезней, работал даже в отпуске, но так ее и не закончил.

В 2008–2020 гг. Вечтомов и Перминов периодически созванивались.

Летом 2010 г. мы все встречались в Кирове, долго беседовали о науке, философии, жизни. Василий Яковлевич показал себя настоящим патриотом России, эрудитом, знатоком истории и философии науки, скромным, обаятельным и очень доброжелательным человеком.

Глубоко переживал о судьбе деревни – своей родной и вообще российской. Последний раз побывал на малой родине летом 2019 г. Потом помешала пандемия, а затем состояние здоровья. О поездке в Кировскую область к родным полям и лесам мечтал на больничной койке...

Список литературы

1. Беляев Е. А., Перминов В. Я. Философские и методологические проблемы математики. М. : Изд-во МГУ, 1981.
2. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Канин Е. С. Профессор Фёдор Нагибин. Сквозь призму времени. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2014. Серия: Научно-педагогическое наследие ВятГГУ, т. 1. 216 с.
3. Василий Яковлевич Перминов (к 75-летию со дня рождения) // Российский гуманитарный журнал. 2013. Т. 2. № 3. С. 215.
4. Вечтомов Е. М. Метафизика математики. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2006.
5. Перминов В. Я. Проблема причинности в философии и естествознании. М. : Изд-во МГУ, 1979.
6. Перминов В. Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства. Изд. 2-е. М. : Изд-во УРСС, 2004.
7. Перминов В. Я. Философия и основания математики. М. : Прогресс – традиция, 2001.

In memory of the outstanding philosopher of mathematics Vasily Yakovlevich Perminov (1938–2024)

Varankina Vera Ivanovna¹, Vechtomov Evgeny Mikhailovich², Frolkina Olga Dmitrievna³

¹PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Vyatka State University. Russia. Kirov.

ORCID: 0000-0003-4166-1182. E-mail: veravarankina@gmail.com

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

³PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Moscow State University n. a. M. V. Lomonosov. Russia, Moscow. ORCID: 0000-0001-8680-3952. E-mail: odrolki@mail.ru

Abstract. The article traces the professional path of V. Ya. Perminov, a graduate of the Physics and Mathematics Department of the Kirov State Pedagogical Institute n. a. V. I. Lenin, an outstanding scientist in the field of philosophy of mathematics and theory of knowledge, and an honored professor of the Moscow State University n. a. M. V. Lomonosov.

Keywords: Vasily Yakovlevich Perminov, Philosophy of Mathematics, Kirov State Pedagogical Institute, Moscow State University.

References

1. Belyayev Ye. A., Perminov V. Ya. *Filosofskie i metodologicheskiye problemy matematiki* [Philosophical and Methodological Problems of Mathematics]. M. Moscow State University Press, 1981.
2. Varankina V. I., Vechtomov Ye. M., Kanin Ye. S. *Professor Fodor Nagibin. Skvoz' prizmu vremeni*. [Professor Fyodor Nagibin. Through the Prism of Time]. Kirov. Vyatka State University Press, 2014. Series "Scientific and Pedagogical Heritage of Vyatka State University", Vol. 1.
3. Vasily Yakovlevich Perminov (*k 75-letiyu so dnya rozhdeniya*) [Vasily Yakovlevich Perminov (on the 75th anniversary of his birth)] // *Rossiyskiy gumanitarnyy zhurnal* – Russian Humanitarian Journal. 2013. Vol. 2. No. 3. P. 215.
4. Vechtomov Ye. M. *Metafizika matematiki*. [Metaphysics of Mathematics]. Kirov. VyatSHU Press, 2006.
5. Perminov V. Ya. *Problema prichinnosti v filosofii i yestestvoznanii*. [The Problem of Causality in Philosophy and Natural Science]. M. Moscow State University Press, 1979.
6. Perminov V. Ya. *Razvitiye predstavleniy o nadezhnosti matematicheskogo dokazatel'stva. 2-ye izd.* [Development of Concepts of Reliability of Mathematical Proof. 2nd ed.]. M. URSS Press, 2004.
7. Perminov V. Ya. *Filosofiya i osnovaniya matematiki*. [Philosophy and Foundations of Mathematics]. M. Progress-Tradition Press, 2001.

Поступила в редакцию: 07.05.2025

Принята к публикации: 27.05.2025

Юбилей замечательных геометров – выпускников Кировского государственного педагогического института имени В. И. Ленина

**Варанкина Вера Ивановна¹, Вечтомов Евгений Михайлович²,
Калинин Сергей Иванович³**

¹кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-4166-1182. E-mail: veravarankina@gmail.com

²доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

³доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. Кратко рассмотрен жизненный путь трех замечательных геометров и педагогов – выпускников Кировского пединститута. Анализируется их вклад в геометрию и в математическое образование.

Ключевые слова: Я. П. Понарин, Е. В. Потоскуев, Г. А. Клековкин, геометрия, математическое образование, Кировский пединститут.

Введение. Альма-матер.

Мы расскажем о трех выпускниках физико-математического факультета КГПИ, ставших известными специалистами в области геометрии и математического образования. Для них 2024 г. был юбилейным. Укажем также других преподавателей геометрии, работавших в КГПИ.

Кировский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина (КГПИ) основан в 1914 г. как Вятский учительский институт, ставший спустя четыре года Вятским педагогическим институтом. В 1922 г. получил имя Ленина с личного согласия Владимира Ильича. В декабре 1934 г. стал называться КГПИ имени В. И. Ленина. В 1995 г. переименован в Вятский государственный педагогический университет (ВятГПУ), а с 2002 г. назывался Вятским государственным гуманитарным университетом (ВятГГУ). В апреле 2016 г. вошел в состав Вятского государственного университета (ВятГУ).

На физико-математическом факультете КГПИ учили профессионально и добросовестно: будущие учителя математики, физики и черчения получали добротное предметное педагогическое образование. В 1950–1960-е гг. функционировала аспирантура по геометрии, руководимая кандидатом физико-математических наук, профессором Николаем Андреевичем Колмогоровым (1897, Верный, Алматы – 1965, Киров) [5]. Двое выпускников аспирантуры защитили кандидатские диссертации по геометрии: Н. М. Фёдорова, Я. П. Понарин. В 1950–1970-е гг. существовала аспирантура по методике преподавания математики под руководством кандидата педагогических наук, известного математика-методиста, профессора Фёдора Фёдоровича Нагибина (1909–1976) [3], пять учеников которого (А. И. Жаворонков, Е. С. Канин, Н. Г. Килина, В. С. Семаков, А. П. Шихова) защитили кандидатские диссертации по методике математики. Кроме того, в первой половине 50-х гг. XX в. в КГПИ работала аспирантура по номографии. Почти все выпускники этих аспирантур преподавали математические дисциплины на физико-математическом факультете КГПИ.

В течение 40 лет с середины 1950-х гг. в КГПИ функционировала основанная Ф. Ф. Нагибиным научно-методическая школа «Теория и методика решения математических задач», руководил которой после смерти Нагибина его ученик кандидат педагогических наук, доцент, с 1989 г. профессор, Евгений Степанович Канин (1926–2013).

В 1980-е гг. на математическом факультете КГПИ плодотворно работало несколько студенческих учебно-исследовательских и научно-исследовательских студенческих кружков. Ведущие преподаватели математики факультета (Е. М. Вечтомов, С. И. Калинин, В. П. Матвеев, И. И. Подгорная, Я. П. Понарин, И. С. Рубанов) вели студенческие кружки по алгебре, классическому и нестандартному математическому анализу, математической логике, неевклидовой геометрии, общей топологии, руководили курсовыми и дипломными работами.

В советское время и в 1990-е гг. вплоть до «болонской» реформы в педвузах были продуманные учебные планы и полнокровные учебные программы дисциплин. На физматах, наряду с элементар-

ной математикой, большое внимание уделялось преподаванию высшей математики. Так, в 1960–1970-е гг. курсы алгебры и геометрии читались первые 4 семестра, а математический анализ – 6 семестров.

В 1990-е гг., когда вузы получили больше самостоятельности, студенты геометрию изучали 6 семестров, блок алгебраических дисциплин – в течение 6–7 семестров (высшая алгебра, теория чисел, числовые системы), математический анализ – 8 семестров, включая Дифференциальные уравнения, Теорию функций действительного переменного и Теорию функций комплексного переменного.

Курс геометрии содержал следующие разделы: аналитическая геометрия, многомерная геометрия, проективная геометрия, дифференциальная геометрия, элементы топологии, основания геометрии.

Читались курсы математической логики и теории алгоритмов, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, истории математики. Велись курсы общей и частной методик преподавания математики. Несколько семестров отводилось занятиям по элементарной математике (задачи элементарной алгебры, элементарная геометрия, начала математического анализа), решению олимпиадных и нестандартных математических задач. Дополнял обучение математике блок дисциплин по информатике.

Важную роль играли курсы по выбору по трем базовым дисциплинам (дополнительные главы алгебры, геометрии, математического анализа). Профессор Е. М. Вечтомов читал спецкурсы по теории колец и основным математическим структурам, доцент С. И. Калинин – по теории средних величин и функциональному анализу, профессор Я. П. Понарин – по неевклидовым геометриям, доцент И. И. Подгорная – по нестандартному анализу, доцент И. С. Рубанов – по общей топологии, доцент О. С. Руденко – по аддитивным задачам теории чисел, старший преподаватель А. К. Гукасов – по функциональному анализу.

При таком объеме изучаемой математики будущие учителя математики и информатики становились грамотными учителями, хорошо подготовленными к преподаванию математики в средней школе, профтехучилище, техникуме, вузе. В дипломах наших выпускников значилось: специальность – математика (с дополнительной специальностью информатика), квалификация – учитель математики (математики и информатики) средней школы.

Следует отметить, что в СССР специальности «Математика» обучали только в классических университетах и педвузах.



Яков Петрович Понарин
(1934–2008)

В 2024 году исполнилось 90 лет со дня рождения Я. П. Понарина.

Он родился 29 октября 1934 г. в деревне Шишкино Лебяжского района Кировской области. В 1950 г. окончил семилетнюю школу села Мелянда Лебяжского района. В 1950–1954 гг. учился в Нолинском педагогическом училище, где, помимо прочего, научился играть на балалайке и переплетать книги. Год проработал сельским учителем.

В 1955–1960 гг. Яков Петрович учился на физико-математическом факультете КГПИ. Его сокурсником был Василий Яковлевич Перминов (1938–2024), будущий видный философ математики, доктор философских наук, профессор, заслуженный профессор МГУ имени М. В. Ломоносова, с которым Понарин дружил до конца своей жизни.

После окончания вуза один год работал учителем математики и черчения Сосновской средней школы Вятскополянского района Кировской области.

В 1961 г. Я. П. Понарин поступил в очную аспирантуру на кафедру геометрии КГПИ к профессору Н. А. Колмогорову. За время обучения в аспирантуре выполнил две работы по тетраэдрометрии.

В 1964 г. был распределен в Сыктывкар в Коми государственный педагогический институт, в котором работал до середины 1970 г. В 1968 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Геометрия симплекса в некоторых пространствах Клейна» в Ярославском государственном педагогическом институте. Научным консультантом был видный математик и педагог, доктор физико-математических наук, профессор Залман Алтерович Скопец (1917–1984). В 1970 г. Яков Петрович получил ученое звание доцента по кафедре геометрии, будучи заведующим кафедрой геометрии Коми пединститута. За шесть лет работы в Сыктывкаре Понарин привлек к занятиям наукой ряд студентов и преподавателей математических кафедр пединститута, также защитивших позднее кандидатские диссертации.

В 1970–1984 гг. Я. П. Понарин работал в Запорожском государственном педагогическом институте, сначала в должности доцента кафедры математики, а затем заведующим кафедрой алгебры и геометрии. Уделял большое внимание научной и методической работе, привлечению преподавателей и студентов к исследованиям.

В конце 1984 г. Яков Петрович вернулся в Киров, где практически до конца своей жизни трудился в КГПИ (ВятГПУ, ВятГГУ) на кафедре геометрии (алгебры и геометрии, высшей математики).

В это время в полной мере проявился его талант геометра, вузовского преподавателя и методиста. Знаменательным событием стало присвоение Я. П. Понарину в 1991 г. ученого звания профессора по кафедре геометрии и топологии.

Характерной чертой творчества профессора Я. П. Понарина было сочетание геометрических исследований с глубокой методической проработкой материала. Яков Петрович – классический геометр, один из последних в нашей стране. Даже в элементарной геометрии он находил новые интересные факты и связи. Только в журнале «Математика в школе» им опубликованы 11 статей и новые геометрические задачи в 16 номерах. Научное наследие Понарина составляет 68 опубликованных работ общим объемом более 200 печатных листов, список которых можно найти в статье [4].

Венцом творчества Я. П. Понарина стал трехтомник «Элементарная геометрия», изданный Московским центром непрерывного математического образования [16–18]. Классический учебник по планиметрии [16] служит одним из основных учебных пособий в физико-математических школах России и сегодня. Отметим также его книги [14; 15; 19].

В 1995 г. в стране было создано 10 региональных учебно-методических объединений (УМО) по математике в различных педвузах России во главе с Ярославским госпедуниверситетом. Центром Волго-Вятского УМО стал Вятский госпедуниверситет, его председателем назначен профессор Я. П. Понарин, заместителем – профессор Е. М. Вечтомов (ставший в 2000 г. председателем). При активной поддержке Понарина с 1998 г. стал выходить периодический межвузовский сборник научно-методических работ «Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона»; в 1998–2019 гг. опубликован 21 выпуск (главный редактор Вечтомов). Отметим, что фактическим продолжением этого издания является научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета», функционирующий с 2021 г.

Я. П. Понарин всегда принимал активное участие в общественных делах, в воспитательной работе студентов. В студенческие годы он – секретарь комсомольской организации физико-математического факультета КГПИ и редактор сатирической стенгазеты «Зоркий глаз». Был секретарем партбюро математического факультета в Коми и Запорожском пединститутах, ответственным за учебно-воспитательную работу, куратором учебных групп. Его постоянно приглашали быть председателем ГЭК в различные педвузы страны. Любил выступать с докладами и лекциями на различных научно-методических конференциях и семинарах.

Его любовь к жизни имела самые разные проявления – дальние поездки на велосипеде, садово-огородные дела, переплет книг и диссертаций, непременное участие в праздничных мероприятиях, игра на домре в Кировском городском оркестре народных инструментов. До последнего дня Я. П. Понарин сохранял творческую активность. Его девиз – писать по странице математического текста в день!

Для Якова Петровича главным делом жизни была работа, научное и методическое творчество, обучение и воспитание студентов, развитие математического образования. Награжден медалью «Ветеран труда» и значком «Отличник народного просвещения», отмечен целым рядом почетных грамот и благодарностей за свой труд. В 2006 г. за учебник по элементарной геометрии получил научную премию ВятГГУ.

В прошлом году Евгению Викторовичу исполнилось бы 85 лет.

Родился 26 ноября 1939 г. на Урале, в поселке Верхняя Сысерть Свердловской области. Педагогическая общественность города Тольятти широко отметила 80-летний юбилей знатного геометра, которого местная газета назвала «тольяттинским Пифагором». Умер после продолжительной болезни 21 марта 2020 г.

Окончив среднюю школу в родном поселке, Е. В. Потоскуев в 1957 г. поступил на физико-математический факультет КГПИ, который окончил в 1962 г. с дипломом учителя математики и черчения. Сразу поступил в аспирантуру по геометрии КГПИ к профессору Н. А. Колмогорову. Некоторое время в аспирантуре жил в одной комнате общежития с Я. П. Понариным.

Оставил интересные воспоминания о периоде учебы в КГПИ [3, с. 148–153], в которых отмечает, что совет о необходимости поступления в математическую аспирантуру дал ему Фёдор Фёдорович Нагибин.



Евгений Викторович
Потоскуев (1939–2020)

Два года прослужил в Советской армии.

После смерти Колмогорова в 1965 г. Е. В. Потоскуев перевелся в аспирантуру Ярославского государственного педагогического института имени К. Д. Ушинского. В то время в Ярославле существовала научная геометрическая школа под руководством профессора З. А. Скопеца. После окончания аспирантуры в 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию «Косое проектирование и его применение для построения нелинейных моделей многомерных проективных пространств» (1968), работая в Вологодском государственном педагогическом институте. По геометрии многомерных проективных пространств опубликовал 18 работ.

В разные годы Евгений Викторович преподавал математические дисциплины в педвузах Вологды, Ельца, Запорожья, Иванова, Кинешмы, Севастополя, Тобольска.

Интересно отметить, что в 1973–1975 гг. Потоскуев работал в Запорожском пединституте вместе с Я. П. Понариным.

С 1989 г. до конца жизни работал в Тольятти, преподавал в Тольяттинском государственном университете (ТГУ, сначала филиале Куйбышевского государственного педагогического института). Последнее десятилетие своей жизни работал в должности профессора кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ.

Много сил положил на развитие школьного математического образования в городе Тольятти и Самарской области. Был научным руководителем кафедры математики физико-технического лицея № 67 города Тольятти. Подготовил более 70 победителей и призеров математических олимпиад различного уровня; это учащиеся 8–11 классов тольяттинских лицеев №№ 51, 57, 67 и средней школы № 61.

Главным достижением Евгения Викторовича Потоскуева явилось создание им новых школьных учебников по геометрии для классов с углубленным изучением математики [21; 22], выдержавших около 20 переизданий.

Работу над новыми учебниками по геометрии Потоскуев начал в 1992 г. В 1995, 1996, 2000 гг. в Тольятти были изданы его учебные пособия «Геометрия 10 класс», «Геометрия 11 класс», «Геометрия 10–11 классы». Книги увидели свет при поддержке администрации города Тольятти и городского фонда «Развитие через образование».

Пособие Е. В. Потоскуева «Геометрия 10–11 классы» легло в основу федерального комплекта учебников по геометрии для учащихся с углубленным и профильным изучением математики. Работу над учебниками Потоскуев начал в 2000 г. в соавторстве с будущим народным учителем РФ Леонидом Исааковичем Звавичем (1945–2024), выпустившим до этого задачник по геометрии для 8–11 классов. В 2003 г. в издательстве «Дрофа» вышло первое издание учебников и задачников «Геометрия» Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича для 10 и 11 классов.

Всего по геометрическому образованию в средней и высшей школе Потоскуев имеет 106 публикаций. Следует отметить его хрестоматию «Геометрическая поэма» [20].

Со своими идеями и разработками по геометрическому образованию школьников и студентов Е. В. Потоскуев регулярно выступал с докладами и лекциями во многих городах России.

Евгений Викторович Потоскуев – Почетный работник общего образования; лауреат Премии В. В. Татищева в области образования, учрежденной мэрией города Тольятти; автор федерального УМК по геометрии для 10–11 классов с углубленным и профильным изучением математики. Книги Потоскуева по геометрии регулярно включаются в федеральный список учебников, рекомендованных к использованию для обучения школьников математике.

В конце ноября 2019 г. в ТГУ проходила IV Международная научная конференция «Геометрия и геометрическое образование», посвященная 80-летию Е. В. Потоскуева [7]. Его коллегами и учениками было сказано много теплых слов в адрес Евгения Викторовича как профессионального геометра, прекрасного педагога, признанного организатора математического образования, замечательного человека. Заметим, что I и III конференции «Геометрия и геометрическое образование», состоявшиеся в 2009 и 2014 гг., также были посвящены юбилеям Потоскуева.

Жизнь и деятельность Евгения Викторовича Потоскуева отражена в статье [24].

Геннадий Анатольевич успел отметить свой 75-летний юбилей, но через 15 дней – 5 сентября 2024 г. – скончался после длительной болезни [25].

Родился 20 августа 1949 г. в деревне Юферевская Вожгальского района (позже Куменского) Кировской области. В 1966 г. окончил Куменскую среднюю школу и сразу поступил в КГПИ. В 1970 г. окончил математический факультет КГПИ (в 1968 г. физико-математический факультет был разделен на два факультета – математический и физический).

Отслужив в армии, Г. А. Клековкин вернулся в КГПИ уже в качестве преподавателя – ассистента кафедры алгебры. В 1979 г. поступил в аспирантуру на кафедру геометрии Московского государственного педагогического института имени В. И. Ленина (МГПИ). Его научным руководителем был

известный геометр, доктор физико-математических наук, профессор Макс Айзикович Аквис (1923–2015). В 1983 г. Клековкин защитил кандидатскую диссертацию на тему «К геометрии четырехмерной три-ткани» по научной специальности «Геометрия и топология».

В 1982–1984 гг. заведовал кафедрой геометрии КГПИ.

В 1984 г. переехал с семьей в город Куйбышев (Самару). Стал работать в Куйбышевском государственном педагогическом институте. В этом вузе заведовал кафедрой геометрии и методики преподавания математики, был проректором по учебной работе. В середине 1990-х перешел на работу в Самарский институт повышения квалификации работников образования, в котором заведовал лабораторией и кафедрой математического образования.

В 2008–2019 гг. был сначала заведующим кафедрой высшей математики и информатики Самарского филиала Московского городского педагогического университета, а затем профессором этой кафедры.

В течение 30 лет регулярно общался с Е. В. Потоскуевым по вопросам геометрического образования школьников и студентов, будущих учителей математики и информатики.

В 2019 г. вышел на пенсию, но продолжал писать статьи по элементарной геометрии и философии математического образования, выступал с докладами. В последние годы был активным членом редколлегий журналов «Математика в школе» и «Математика для школьников». Также являлся членом УМО по математике педвузов и университетов Волго-Вятского региона и членом редколлегии научного журнала «Математический вестник Вятского государственного университета».

В журнале «Математическое образование» опубликованы две большие статьи Клековкина, разделенные на две части:

- Пространственные спирали (2019, № 2 и № 3);
- Моделирование контуров листьев растений в среде GeoGebra (2021, № 2 и № 3).

В журнале «Математика в школе» он опубликовал следующие статьи:

- Универсальные чертежи модели комбинаций многогранников и круглых тел (2021, № 4);
- К задаче о расчленении тетраэдра на равновеликие многогранники (2022, № 7);
- Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (касательная, нормаль, особые точки кривой) (2023, № 3);
- Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (огibaющая) (2023, № 4);
- Свойства диагоналей правильных многоугольников в задачах об углах между отрезками, заданными в треугольниках (2024, № 7, № 8).

Г. А. Клековкин подготовил 5 кандидатов педагогических наук.

Написал десятки учебных пособий по школьной и вузовской геометрии, дискретной математике, включая теорию графов и комбинаторику, по абстрактной и компьютерной алгебре. Список многочисленных работ Г. А. Клековкина можно найти на сайте «Математическое образование. Общедоступная электронная библиотека». Укажем только некоторые его учебные пособия [8–12] и монографию [13]. Заметим, что все рисунки, чертежи и компьютерную графику в своих книгах и статьях Геннадий Анатольевич делал сам, и делал мастерски.

Геннадий Анатольевич хорошо рисовал, сочинял стихи. Любил рыбалку, собирать грибы, охоту, охотничьих собак.

Был очень доброжелательным и открытым человеком, человеком большой души, неравнодушным к людям, верным товарищем, готовым прийти на помощь в любой момент.

К своим научным работам относился критично, старался довести изложение до полной ясности и убедительности. Поэтому, наверное, не стал завершать почти готовую докторскую диссертацию на тему преемственности геометрического образования. Считал, что материал требует не только высокого научно-методического уровня, но и глубокого анализа и понимания психологии процессов математического познания и обучения математике на разных этапах образования.

Из воспоминаний Сергея Ивановича Калинина:

«Мы с Г. А. Клековкиным шли по жизни бок о бок на протяжении более шести десятков лет. Он всегда был для меня и другом, и старшим товарищем, и наставником. Я советовался с ним в разное время по многим и многим вопросам, всегда получал необходимую помощь.

Мы родились в одной деревне, учились у одной учительницы в начальной школе, потом – у одного учителя математики, который смог нам, сельским пацанам, привить любовь к математике, воспитать интерес и желание решать задачи, искать ответы на возникающие вопросы. Помнится, как Гена в мой последний год обучения в школе подарил мне одну из книг Д. Пойа, сделав дар-



Геннадий Анатольевич
Клековкин (1949–2024)

ственную надпись на внутренней стороне обложки (он тогда уже заканчивал пединститут и готовился стать учителем математики). Этот жест с его стороны только утвердил мое юношеское желание в выборе профессии – я нацелился на получение математического образования.

Во взрослой жизни нас судьба географически всегда разводила. Мы жили в разных городах, работали в разных вузах, но тесную связь друг с другом поддерживали постоянно: писали письма, созванивались, встречались и много говорили во время различных научных конференций и семинаров, а также в отпускную летнюю пору.

Особенно плотным наше общение было в последние годы. Оно связано с активным сотрудничеством в рамках журнала «Математика в школе». Геннадий Анатольевич входил в состав членов редколлегии журнала, представлял геометрическое направление. Его советы, рекомендации, отзывы всегда были ценными в деятельности редакции. К глубокому сожалению, в сентябре 2024 г. моего Друга не стало».

Другие кировские геометры

Перечислим преподавателей кафедры геометрии КГПИ: кандидаты физико-математических наук, доценты Лидия Алексеевна Зыкова (1925–2020) и Надежда Михайловна Фёдорова (1924–2002), кандидат педагогических наук, доцент Петр Александрович Крупин (1917–1993), старшие преподаватели Людмила Максимовна Зеленина (1935–2008), Римма Платоновна Смирнова (1930–2008), Евгения Михайловна Канина (1934 г. р.). Кроме Л. А. Зыковой названные преподаватели окончили физико-математический факультет КГПИ.

Все они, а также Петр Кузьмич Бельтюков (1928–2010), окончили аспирантуру по геометрии у Н. А. Колмогорова. П. К. Бельтюков занимался геометрией тетраэдра, преподавал математическую логику и теорию алгоритмов, программирование, в 1964–1974 гг. заведовал кафедрой алгебры.

Л. А. Зыкова родилась в деревне Гуляево Малмыжского района Кировской области, окончила математический факультет и аспирантуру на кафедре геометрии Московского областного педагогического института имени Н. К. Крупской, где и защитила кандидатскую диссертацию по проективной геометрии. Заведовала различными математическими кафедрами в КГПИ и Кировском политехническом институте. Уделяла большое внимание методике преподавания геометрии в педвузе. 25 марта 2025 года исполнилось 100 лет со дня рождения Лидии Алексеевны Зыковой.

С 1982 г. в КГПИ работал кандидат физико-математических наук, доцент Игорь Соломонович Рубанов (1952 г. р.), выпускник матмеха Ленинградского университета. Защитил кандидатскую диссертацию по общей топологии, заведовал кафедрой геометрии в 1984–2002 гг. Заслуженный учитель РФ И. С. Рубанов возродил олимпиадное движение в Кировской области, организовал летнюю математическую школу, ставшую в настоящее время многопредметной. Является одним из создателей Центра дополнительного образования одаренных школьников в Кирове.

С 1995 г. на кафедре геометрии, затем на кафедре алгебры и геометрии работал выпускник КГПИ, кандидат физико-математических наук, доцент Василий Михайлович Караулов (1966 г. р.), специалист по общей топологии. Сейчас является доцентом кафедры финансов и экономической безопасности ВятГУ.

В текущий период времени на кафедре фундаментальной математики ВятГУ читает лекции и ведет практические занятия по геометрии и вычислительной геометрии выпускница КГПИ, старший преподаватель Лариса Вячеславовна Тимшина (1969 г. р.).

Заключение

Мы упомянули только нескольких выпускников КГПИ имени В. И. Ленина, которые внесли наиболее заметный вклад в дело отечественного математического образования.

Поистине народные профессора математики Я. П. Понарин, Е. В. Потоскуев, Г. А. Клековкин являются собой пример настоящего профессионализма, серьезного наставничества, ответственности и самоотдачи, духовного служения своему предназначению, своему делу. Научная, педагогическая, методическая, просветительская, организаторская деятельность Якова Петровича, Евгения Викторовича и Геннадия Анатольевича, их подвижничество и творческое наследие составляют важную веху в развитии математического образования в отдельных российских регионах и России в целом.

За все годы преподаватели КГПИ (ВятГПУ, ВятГГУ, ВятГУ) обучили более 6 тысяч учителей математики, подавляющее большинство которых всю свою жизнь посвятили работе в народном образовании СССР и Российской Федерации, служению математическому образованию [см. 1].

В настоящее время на кафедре фундаментальной математики ВятГУ работают студенческий исследовательский семинар по современной алгебре (руководители: профессор Е. М. Вечтомов и доцент А. А. Петров) и семинар «Математика и образование» для преподавателей и студентов (руководитель: профессор С. И. Калинин). Действуют две научные школы: алгебраическая школа «Функциональная алгебра и теория полукоец» [6] под руководством профессора Е. М. Вечтомова и кировская научно-методическая школа по математическому образованию [2], лидерами которой являются доктора наук, профессора Е. М. Вечтомов и С. И. Калинин.

Краткую информацию о преподавателях ВятГГУ, упомянутых в нашей статье, можно найти в словаре-справочнике [23].

Р. С. Подготовка будущих учителей, в том числе учителей математики и информатики, передана на педфак ВятГУ. Их математическое образование находится в плачевном состоянии, такого положения дел не было никогда. На педагогические специальности абитуриентов набирают скопом, через месяц после поступления будущие учителя выбирают профильный предмет. Математические дисциплины урезаны в 3–4 раза по сравнению с 2000-м г. На первом курсе высшая математика не преподается – только вводный курс математики и элементарная математика общим объемом 90 аудиторных часов. Преподаватели формально считающейся выпускающей кафедры фундаментальной математики отстранены от воспитательной и наставнической работы со студентами-математиками педагогического направления подготовки, только ведут урезанные математические курсы. При такой «креативной модели» подготовки учителей рассчитывать на новых Пифагоров в российском образовании не приходится!

Список литературы

1. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М. Первая кафедра математики на Вятской земле // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 1. С. 39–56.
2. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М. Кировская научно-методическая школа по математическому образованию: история и современность : мат-лы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педвузов «Математика и проблемы образования». Киров : ВятГУ, 2022. С. 4–8.
3. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Канин Е. С. Профессор Фёдор Нагибин. Сквозь призму времени. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2014. Серия: Научно-педагогическое наследие ВятГГУ, т. 1. 216 с.
4. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М. Геометр Яков Петрович Понарин / И. С. Рубанов, В. В. Черных // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2009. Вып. 11. С. 7–17.
5. Варанкина В. И., Кочурова Д. В. Николай Андреевич Колмогоров: математик и педагог // Вятская земля в прошлом и настоящем (к 100-летию Вятского государственного гуманитарного университета) : сборник материалов VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2014. С. 209–213.
6. Вечтомов Е. М. Кировской научной алгебраической школе – 30 лет // Материалы Всероссийской научной конференции «Город на Вятке: история, культура, люди (К 650-летию Хлынова – Вятки – Кирова)». Киров : КОГБУК «КОУНБ им. А. И. Герцена», 2024. С. 141–147.
7. Геометрия и геометрическое образование : сборник научных трудов IV Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е. В. Потоскуева), Тольятти, 29–30 ноября 2019 года / под общ. ред. Р. А. Утеевой. Тольятти : Изд-во ТГУ, 2020. 268 с.
8. Клековкин Г. А. Геометрия. 5 класс : учебное пособие. М. : Русское слово, 2004. 320 с.
9. Клековкин Г. А. Геометрия. 6 класс : учебное пособие. М. : Русское слово, 2004. 288 с.
10. Клековкин Г. А. Решение геометрических задач векторным методом : учебное пособие для учащихся 10–11 классов. Самара : СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. 180 с.
11. Клековкин Г. А. Теория графов. Среда Maxima : учебное пособие для прикладного бакалавриата. Изд. 2-е. М. : Урайт, 2017. 133 с.
12. Клековкин Г. А. Введение в перечислительную комбинаторику : учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. СПб. : Лань, 2018. 228 с.
13. Клековкин Г. А., Максютин А. А. Задачный подход в обучении математике : монография. М. ; Самара : СФ ГОУ ВПО МГПУ, 2009. 184 с.
14. Понарин Я. П. Геометрия для 7–11 классов : учебное пособие для учащихся школ, лицеев, колледжей. Ростов-на-Дону : Феникс, 1997. 512 с.
15. Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М. : МЦНМО, 2004. 10 п. л.
16. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1. Планиметрия, преобразования плоскости. Изд. 2-е. М. : МЦНМО, 2008. 19,5 п. л.
17. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 2. Стереометрия, преобразования пространства. Изд. 2-е. М. : МЦНМО, 2008. 16 п. л.
18. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 3. Геометрия треугольника и тетраэдра. М. : МЦНМО, 2009. 14 п. л.
19. Понарин Я. П. Аффинная и проективная геометрия. М. : МЦНМО, 2009. 18 п. л.
20. Потоскуев Е. В. Геометрическая поэма : хрестоматия. Минобрнауки, Тольяттинский гос. ун-т. Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. 382 с.
21. Потоскуев Е. В. Геометрия. 11 класс. Углубленный уровень. М. : Дрофа, 2021. 384 с.
22. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 10 класс. Углубленный уровень. М. : Дрофа, 2021. 224 с.
23. Преподаватели ВятГГУ. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2004. 208 с.
24. Утеева Р. А. Геометрия – наука, методика и искусство преподавания (к 80-летия со дня рождения Евгения Викторовича Потоскуева) // Математика в школе. 2020. № 1. С. 71–76.
25. Ушел из жизни Геннадий Анатольевич Клековкин // Математическое образование. 2024. Т. 112. Вып. 4. С. 2–3.

Anniversaries of remarkable geometers being graduates of the Kirov State Pedagogical Institute n. a. V. I. Lenin

Varankina Vera Ivanovna¹, Vechtomov Evgeny Mikhailovich², Kalinin Sergey Ivanovich³

¹PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Vyatka State University. Russia. Kirov.

ORCID: 0000-0003-4166-1182. E-mail: veravarankina@gmail.com

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

³Doctor of Pedagogical Sciences, PhD of Physical and Mathematical Sciences, professor, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin-gu@mail.ru

Abstract. The article briefly examines the life path of three remarkable geometers and teachers who are graduates of the Kirov Pedagogical Institute. The authors analyze their contribution to geometry and mathematical education.

Keywords: Ya. P. Ponarin, E. V. Potoskuev, G. A. Klekovkin, geometry, mathematical education, Kirov Pedagogical Institute.

References

1. Varankina V. I., Vechtomov Ye. M. *Pervaya kafedra matematiki na Vyatskoy zemle* [The first department of mathematics in the Vyatka land] / Varankina V. I., Vechtomov E. M. // *Mathematical Bulletin of the Vyatka State University*. 2021. No 1. Pp. 39–56. DOI: 10.25730/VSU.0536.21.007.
2. Varankina V. I., Vechtomov Ye. M. *Kirovskaya nauchno-metodicheskaya shkola po matematicheskomu obrazovaniyu: istoriya i sovremennost'* [Kirov Scientific and Methodological School for Mathematical Education: History and Modernity] / Varankina V. I., Vechtomov E. M. // *Proceedings of the 41st International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Computer Science of Universities and Pedagogical Universities "Mathematics and Problems of Education"*. Kirov. VyatSU, 2022. Pp. 4–8.
3. Varankina V. I., Vechtomov Ye. M., Kanin Ye. S. *Professor Fodor Nagibin. Skvoz' prizmu vremeni* [Professor Fyodor Nagibin. Through the prism of time] / Varankina V. I., Vechtomov E. M., Kanin E. S. Kirov. VyatSHU, 2014. Series "Scientific and pedagogical heritage of Vyatka State University". Vol. 1. 216 p.
4. Varankina V. I., Vechtomov Ye. M. *Geometer Yakov Petrovich Ponarin* [Geometer Yakov Petrovich Ponarin] / Varankina V. I., Vechtomov E. M., Rubanov I. S., Chernykh V. V. // *Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Colleges of the Volga-Vyatka Region*. 2009. No. 11. Pp. 7–17.
5. Varankina V. I., Kochurova D. V. *Nikolay Andreyevich Kolmogorov: matematik i pedagog* [Nikolay Andreevich Kolmogorov: mathematician and teacher] / Varankina V. I., Kochurova D. V. // *Vyatskaya zemlya v proshlom i nastoyashchem (k 100-letiyu Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta)*. [Vyatka land in the past and present (on the 100th anniversary of the Vyatka State Humanitarian University)]. Collection of materials from the VII All-Russian scientific and practical conference with international participation. Kirov: VyatSHU, 2014. Pp. 209–213.
6. Vechtomov Ye. M. *Kirovskoy nauchnoy algebraicheskoy shkole – 30 let* [Kirov Scientific Algebraic School is 30 years old] / Vechtomov E. M. // *Proceedings of the All-Russian scientific conference "City on the Vyatka: history, culture, people (To the 650th anniversary of Khlynov – Vyatka – Kirov)"*. Kirov. KOUNB n. a. A. I. Gertsen, 2024. Pp. 141–147.
7. *Geometriya i geometricheskoye obrazovaniye: sbornik nauchnykh trudov IV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Geometriya i geometricheskoye obrazovaniye v sovremennoy sredney i vysshey shkole" (k 80-letiyu Ye. V. Potoskuyeva), Tol'yatti, 29–30 noyabrya 2019 goda*. [Geometry and geometric education: collection of scientific papers of the IV International Scientific Conference "Geometry and geometric education in modern secondary and higher education" (for the 80th anniversary of E. V. Potoskuev)]. Tol'yatti. Publ. TGU, 2020. 268 p.
8. Klekovkin G. A. *Geometriya. 5 klass : uchebnoye posobiye* [Geometry. 5th grade : textbook]. M. Russkoye slovo (Russian word), 2004. 320 p.
9. Klekovkin G. A. *Geometriya. 6 klass : uchebnoye posobiye* [Geometry. 6th grade : textbook]. M. Russkoye slovo (Russian word), 2004. 288 p.
10. Klekovkin G. A. *Resheniye geometricheskikh zadach vektornym metodom: uchebnoye posobiye dlya uchashchikhsya 10–11 klassov* [Solving geometric problems using the vector method: a tutorial for students in grades 10–11]. Samara. SF GAOU VO MGPU, 2016. 180 p.
11. Klekovkin G. A. *Teoriya grafov. Sreda Maxima : uchebnoye posobiye dlya prikladnogo bakalavriata. 2-ye izd.* [Graph Theory. Maxima Environment : a textbook for Applied Bachelor's Degree. 2nd ed.]. M. Yurayt, 2017. 133 p.
12. Klekovkin G. A. *Vvedeniye v perechislitel'nyuyu kombinatoriku : uchebnoye posobiye. 2-ye izd., ispr. i dop.* [Introduction to Enumerative Combinatorics : textbook. 2nd ed., corrected and supplemented]. SPb. Lan', 2018. 228 p.
13. Klekovkin G. A., Maksyutin A. A. *Zadachnyy podkhod v obuchenii matematike : monografiya* [Problem-based approach to teaching mathematics : monograph]. M. ; Samara. SF GOU VPO MGPU, 2009. 184 p.
14. Ponarin Ya. P. *Geometriya dlya 7–11 klassov : uchebnoye posobiye dlya uchashchikhsya shkol, litseyev, kolledzhey* [Geometry for grades 7–11 : a tutorial for students of schools, lyceums, colleges]. Rostov-na-Donu. Feniks, 1997. 512 p.
15. Ponarin Ya. P. *Algebra kompleksnykh chisel v geometricheskikh zadachakh* [Algebra of complex numbers in geometric problems]. M. MCNO, 2004. 10 p. p.
16. Ponarin Ya. P. *Elementarnaya geometriya. T. 1. Planimetriya, preobrazovaniya ploskosti. 2-ye izd.* [Elementary geometry. T. 1. Plane geometry, plane transformations. 2nd ed.]. M. MCNO, 2008. 19,5 p. p.

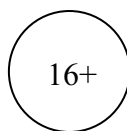
17. Ponarin Ya. P. *Elementarnaya geometriya. T. 2. Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva. 2-ye izd.* [Elementary Geometry. Vol. 2. Stereometry, Space Transformations. 2nd ed.]. M. MCNO, 2008. 16 p. p.
18. Ponarin Ya. P. *Elementarnaya geometriya. T. 3. Geometriya treugol'nika i tetraedra.* [Elementary Geometry. Vol. 3. Geometry of Triangle and Tetrahedron]. M. MCNO, 2009. 14 p. p.
19. Ponarin Ya. P. *Affinnaya i proyektivnaya geometriya* [Affine and projective geometry]. M. MCNO, 2009. 18 p. p.
20. Potoskuyev Ye. V. *Geometricheskaya poema : khrestomatiya. Minobrnauki, Tol'yattinskiy gos. un-t.* [Geometric poem : anthology. Ministry of Education and Science, Togliatti State University]. Tol'yatti. Publ. TGU, 2014. 382 p.
21. Potoskuyev Ye. V. *Geometriya. 11 klass. Uglublennyy uroven'* [Geometry. 11th grade. Advanced level]. M. Drofa, 2021. 384 p.
22. Potoskuyev Ye. V., Zvavich L. I. *Geometriya. 10 klass. Uglublennyy uroven'.* [Geometry. 11th grade. Advanced level]. M. Drofa, 2021. 224 p.
23. *Prepodavатели VyatGGU* [Teachers of Vyatka State Humanities University]. Kirov. Vyatka State University Publishing House. 2004. 208 p.
24. Uteyeva R. A. *Geometriya – nauka, metodika i iskusstvo prepodavaniya (k 80-letiya so dnya rozhdeniya Yevgeniya Viktorovicha Potoskuyeva)* [Science, Methodology and Art of Teaching (on the 80th Anniversary of Evgeny Viktorovich Potoskuev's Birth)] / Uteyeva R. A. // *Matematika v shkole* – Mathematics at school. 2020. No 1. Pp. 71–76.
25. *Ushel iz zhizni Gennadiy Anatol'yevich Klekovkin* [Gennady Anatolyevich Klekovkin Passed Away] // *Matematicheskoye obrazovaniye* – Mathematical Education. 2024. Vol. 112. Is. 4. Pp. 2–3.

Поступила в редакцию: 12.05.2025

Принята к публикации: 27.05.2025

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 1 (32) (2025)



Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964