

УДК 674.093

А. И. Агапов

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ БРУСА И ДОСОК ПРИ БРУСОВО-РАЗВАЛЬНОМ СПОСОБЕ РАСКРОЯ ПИЛОВОЧНИКА С УЧЁТОМ ПОЛУЧЕНИЯ ИЗ СБЕГОВОЙ ЗОНЫ ОДНОЙ ПАРЫ УКРОЧЕННЫХ ДОСОК

Рассматривается задача оптимизации раскроя пиловочника с выпиливанием из пифагорической зоны одного бруса и одной пары боковых обрезных досок, а из сбеговой зоны получение одной пары обрезных укороченных досок. Для решения задачи оптимизации составлена математическая модель, содержащая целевую функцию и уравнения связи. В качестве критерия оптимальности выбран выход обрезных пиломатериалов. Для решения задачи используется метод множителей Лагранжа. Для определения оптимальных размеров бруса и досок предлагается использовать численный метод. Для этого разработан алгоритм решения данной задачи в относительных единицах. Используя численный метод, можно определить оптимальные размеры бруса и обрезных досок, при которых получается максимальный выход пиломатериалов. Предложенный алгоритм решения задачи оптимизации данной схемы раскроя пиловочника учитывает одновременно пифагорическую и сбеговую зоны пиловочника. Алгоритм позволяет определить оптимальные размеры бруса и досок для любых диаметров пиловочника. Предлагаемый алгоритм решения задачи рекомендуется использовать для расчета и составления оптимальных поставок.

Ключевые слова: длина пиловочника, пифагорическая зона, сбеговая зона, брус, обрезная доска, укороченная доска.

Постановка задачи. Анализируя выполненные ранее работы [2, 3, 4, 5, 6, 7] можно сделать вывод, что определить оптимальные размеры пиломатериалов, получаемых из пифагорической и сбеговых зон можно лишь в

том случае, когда решение задачи оптимизации раскроя пиловочника производится совместно этих двух зон (рисунок 1).

Рассмотрим вариант раскроя пиловочника брусом способом, когда из пифагорической зоны получаем брус и одну пару досок, а из сбеговой зоны получаем одну пару укороченных досок.

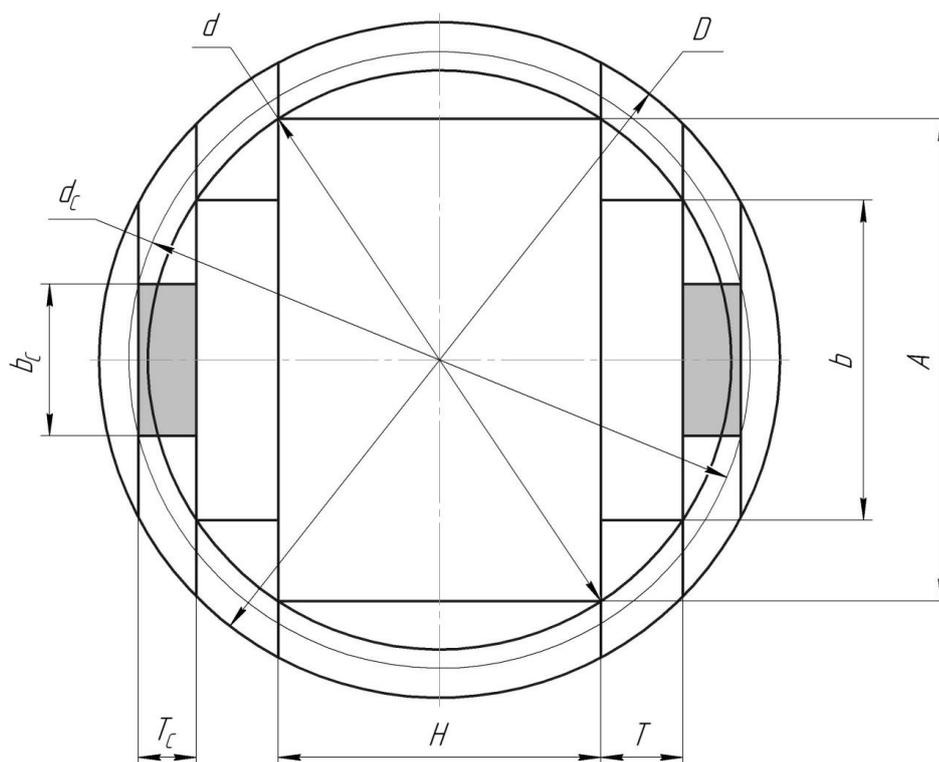


Рис. 1. Схема раскроя пиловочника брусом способом с выпиливанием одного бруса, одной пары боковых досок и одной пары укороченных досок.

Составление математической модели. Целевая функция запишется в следующем виде [2, 5]

$$Z = Z_{\text{пиф}} + Z_{\text{сб}}, \quad (1)$$

где $Z_{\text{пиф}}$ – объём пиломатериалов, получаемый из пифагорической зоны;

$Z_{\text{сб}}$ – объём пиломатериалов, получаемый из сбеговой зоны.

Объём пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны, определится по формуле

$$Z_{\text{пиф}} = HAl + 2bTl, \quad (2)$$

где H – толщина бруса;

A – ширина пласти бруса;

l – длина пиловочника;

b – ширина боковой обрезной доски;

T – толщина боковой обрезной доски.

Из сбеговой зоны объём получаемых досок равен

$$Z_{сб} = 2b_c T_c l_c, \quad (3)$$

где b_c – ширина сбеговой доски;

T_c – толщина сбеговой доски;

l_c – длина сбеговой доски.

Тогда целевая функция примет вид

$$Z = HA l + 2b T l + 2b_c T_c l_c. \quad (4)$$

Уравнения связи составляем согласно теореме Пифагора.

Взаимосвязь размеров бруса с диаметром пиловочника в вершинном торце уравнение связи будет иметь вид

$$d^2 - H^2 - A^2 = 0. \quad (5)$$

Для боковых досок взаимосвязь размеров бруса с диаметром пиловочника в вершинном торце можно представить в виде

$$d^2 - b^2 - (H + 2T)^2 = 0. \quad (6)$$

Уравнение связи с учетом досок, получаемых из сбеговой зоны, можно записать в следующем виде

$$d^2(1 + K_c(l - l_c)^2) - b_c^2 - (E - 2T_c)^2 = 0, \quad (7)$$

где K_c – относительный сбег бревна, $K_c = C_6/d$;

C_6 – сбег бревна.

Так как в данной задаче рассматривается вариант раскроя пиловочника с выпиливанием из пифагорической зоны одного бруса и двух досок, можно написать, что пифагорическая зона определяется по уравнению

$$E = H + 2T. \quad (7a)$$

Тогда формула (6) примет вид

$$d^2(1 + K_c(l - l_c))^2 - b_c^2 - (H + 2T + 2T_c)^2 = 0. \quad (8)$$

Анализируя контур наружной пласти доски, полученной из сбеговой зоны пиловочника (рисунок 2), было установлено что этот контур можно описать параболой [3,4]. В этот контур вписывается обрезающая доска, у которой l_c равна 0,33 длины параболы, а оптимальная ширина доски b_c составляет 0,577 от диаметра пиловочника в нижнем торце. На основании вышеизложенного можно написать

$$(d(1 + K_C l))^2 - (H + 2T + 2T_C)^2 = 3(2T_C(H + 2T) + 4T_C). \quad (9)$$

Полагаем, что математическая модель задачи оптимизации составлена.

Решение математической модели. Для решения задачи используем метод множителей Лагранжа [1,6].

Функцию Лагранжа записываем в следующем виде

$$L = HAl + 2bTl + 2b_c T_C l_c + \lambda(d^2 - H^2 - A^2) + \lambda_1(d^2 - b^2 - (H + 2T)^2) + \\ + \lambda_2([d + K_C d(l - l_c)]^2 - b_c^2 - (H + 2T + 2T_C)^2). \quad (10)$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial A} = Hl - 2A\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial H} = Al - 2H\lambda - \lambda_1(2H + 4T) - \lambda_2(2H + 4T + 4T_C) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 2Tl - 2b\lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T} = 2bl - \lambda_1(4H + 8T) - \lambda_2(4H + 8T + 8T_C) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b_c} = 2T_C l_c - 2b_c \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_C} = 2b_c l_c - \lambda_2(4H + 8T + 8T_C) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial l_c} = 2T_C b_c - 2K_C d \lambda_2 [d + K_C d(l - l_c)] = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решаем полученную систему уравнений (11) совместно с уравнениями связи. Из первого уравнения связи (5) можно определить

Технические науки

$$A = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (12)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (11) из которого находим

$$\lambda = \frac{Hl}{2A}. \quad (13)$$

Из третьего уравнения системы (11) можно получить

$$\lambda_1 = \frac{Tl}{b}. \quad (14)$$

Пятое уравнение системы (11) запишем в виде

$$\lambda_2 = \frac{T_C l_C}{b_C}. \quad (15)$$

Во второе уравнение системы (11) подставим равенства (13), (14) и (15), получим

$$Al - \frac{2H^2 l}{A} - \frac{Tl(2H + 4T)}{b} - \frac{T_C l_C (2H + 4T + 4T_C)}{b_C} = 0. \quad (16)$$

В четвёртое уравнение системы (11) подставим равенства (14) и (15), получим

$$2bl - \frac{Tl(4H + 8T)}{b} - \frac{T_C l_C (4H + 8T + 8T_C)}{b_C} = 0. \quad (17)$$

Из полученных выше двух уравнений (16) и (17) можно записать

$$b = A - \frac{H^2}{A}. \quad (18)$$

Подставив равенство (18) в уравнение связи (6) получим квадратное уравнение

$$4T^2 + 4HT + \frac{H^4}{A^2} - 2H^2 = 0. \quad (19)$$

Решив это квадратное уравнение (19), получим формулу для определения толщины боковой доски

$$T = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3H^2 - \frac{H^4}{A^2}} - H \right). \quad (20)$$

Формулу для определения ширины боковой доски можно получить из второго уравнения связи (6)

$$b = \sqrt{d^2 - (H + 2T)^2}. \quad (21)$$

Чтобы определить толщину доски из сбеговой зоны воспользуемся уравнением (9) которое запишем в следующем виде

$$16T_c^2 + 10(H + 2T)T_c - (d(1 + K_c l))^2 + (H + 2T)^2 = 0. \quad (22)$$

Решив квадратное уравнение (22) получим

$$T_c = \frac{1}{16} \left(\sqrt{16d^2(1 + K_c l)^2 + 9(H + 2T)^2} - 5(H + 2T) \right). \quad (23)$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (11), подставив в него равенство (15), получим

$$b_c^2 = 2T_c(H + 2T + 2T_c). \quad (24)$$

Подставим в уравнение связи (7) выражение (8) и последнее уравнение (24)

$$8T_c^2 + 6(H + 2T)T_c + (H + 2T)^2 - (d + K_c d(l - l_c))^2 = 0. \quad (25)$$

Оптимальную длину укороченной доски, выпиливаемой из сбеговой зоны, можно выразить из формулы (25)

$$l_c = \frac{1 + K_c l}{K_c} - \frac{1}{K_c d} \sqrt{8T_c^2 + 6(H + 2T)T_c + (H + 2T)^2}. \quad (26)$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (11). Подставим в него равенство (15), получим

$$2T_c b_c^2 - 2K_c d T_c l_c [d + K_c d(l - l_c)] = 0. \quad (27)$$

Выразим из полученного уравнения (27) ширину укороченной доски

$$b_c = d \sqrt{K_c l_c [1 + K_c(l - l_c)]}. \quad (28)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (11), а также учтены все уравнения связи. Получены формулы для определения размеров бруса, боковых досок и укороченных досок.

Так как в полученных формулах размеры бруса и досок зависят от диаметра, сбега и длины бревна, то необходимо рассматривать влияние этих параметров на оптимальные размеры бруса и досок. Для этого воспользуемся

численным методом. Задаёмся длиной бревна, сбегом его и изменяем толщину бруса в определённом диапазоне. Далее по полученным формулам определяем размеры бруса и досок, а так же объём получаемых пиломатериалов.

Полученные ранее формулы, представим в относительных единицах. Алгоритм решения задачи представляем в следующей последовательности.

Относительная ширина пласти бруса

$$m_A = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (29)$$

Относительная толщина доски

$$m_T = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3m_H^2 - \frac{m_H^4}{m_A^2} - m_H} \right). \quad (30)$$

Относительная ширина доски

$$m_b = \sqrt{1 - (m_H + 2m_T)^2}. \quad (31)$$

Относительная толщина укороченной доски

$$m_{Tc} = \frac{1}{16} \left(\sqrt{16(1 + K_C l)^2 + 9(m_H + 2m_T)^2} - 5(m_H + 2m_T) \right). \quad (32)$$

Относительная длина укороченной доски

$$m_{lc} = \frac{1}{K_C l} \left(1 + K_C l - \sqrt{8m_{Tc}^2 + 6(m_H + 2m_T)m_{Tc} + (m_H + 2m_T)^2} \right). \quad (33)$$

Относительная ширина укороченной доски

$$m_{bc} = \sqrt{K_C m_{lc} l [1 + K_C l (1 - m_{lc})]}. \quad (34)$$

Объём бревна определяется по формуле

$$V_B = \frac{\pi d^2 (2 + K_C l)^2}{16} l. \quad (35)$$

Относительный объём пилопродукции, получаемой из пифагорической зоны

$$m_{V_{\text{пиф}}} = \frac{16(m_H m_A + 2m_T m_b)}{\pi(2 + K_C l)^2}. \quad (36)$$

Относительный объём пилопродукции из сбеговой зоны

Технические науки

$$m_{V_{сб}} = \frac{32m_{T_c}m_{b_c}m_{l_c}}{\pi(2 + K_c l)^2}. \quad (37)$$

Суммарный относительный объём пилопродукции

$$m_V = m_{V_{пиф}} + m_{V_{сб}}. \quad (38)$$

Таким образом, получен алгоритм решения задачи оптимизации для определения оптимальных размеров бруса, боковых обрезных досок и обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны. Используя численный метод можно определить оптимальные размеры бруса и досок, при которых получается максимальный выход пиломатериалов.

Список литературы

1. Агапов А. И. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых досок // Лесотехнический журнал. 2014. Т. 4. № 2. С. 128–135.
2. Агапов А. И. Оптимизация технологических процессов деревообработки: учеб. пособие. Киров: ВятГУ, 2012. 81 с.
3. Агапов А. И. Влияние и учет сбega бревна при раскрое пиловочника // Актуальные проблемы лесного комплекса: сб. науч. тр. Вып. 7. Брянск, 2002. С. 94–96.
4. Аксенов П. П. Теоретические основы раскроя пиловочного сырья. М.: Лесная промышленность, 1976. 168 с.
5. Аксенов П. П. Технология пиломатериалов. М., 1963. 579 с.
6. Калитеевский Р. Е. Лесопиление в XXI веке. Технология, оборудование, менеджмент. Изд. 2-е, испр. и доп. СПб.: Профи КС, 2008. 496 с.
7. Пижурин А. А. Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: учебник. М.: МГУЛ, 2004. 375 с.
8. Уласовец В. Г. Технологические основы производства пиломатериалов. Екатеринбург: УГЛТУ, 2002. 510 с.

АГАПОВ Александр Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры машин и технологии деревообработки, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: usr00005@vyatsu.ru