Технические науки

УДК 681.5

В. С. Хорошавин, А. В. Зотов, С. А. Мокрушин

ОБЩИЙ ПОДХОД К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Предлагается подход к представлению линейной стационарной динамической системы управления, заданной исходным дифференциальным уравнением высокого порядка, к записи уравнений движения в пространстве состояний в виде линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка на основе понижения порядка производных от координат и прямой связи от дифференциальных составляющих по управлению. Суть предлагаемого подхода заключается в том, что при известном дифференциальном уравнении *n*-ого порядка или передаточной функции системы независимо от наличия дифференциальных составляющих управления в уравнении или нулей в передаточной функции выходной сигнал системы определяется как сумма промежуточных координат (по снижению порядка для производных координат) и дополнительных сигналов по управлению (как прямых сигналов по управлению, учитывающих дифференциальные составляющие управления). Предлагаемый общий подход использует и закрепляет фундаментальные для исследования динамики систем управления понятия об уменьшении порядка производных координат и учёта производных по управлению, что важно для анализа и синтеза конкретных систем управления вместо отыскания формул перехода или программ для машинного решения задачи.

Ключевые слова: частотные и временные методы исследования, дифференциальное уравнение *n*-ого порядка, передаточная функция с нулями, система *n* дифференциальных уравнений первого порядка.

В современной теории управления часто используется представление модели системы управления не в передаточных функциях, когда используются частотные методы исследования, а представление уравнений движения в векторно-матричной форме, когда анализ и синтез системы ведётся во временной области, что значительно облегчает физическую интерпретацию полученных решений, особенно при исследовании управляемости и наблюдаемости систем [1]. Использование векторно-матричного представления может облегчить решение и одной из так называемых «нерешённых задач теории автоматического управления», как применение многократно продифференцированного управления [4].

На наш взгляд, зная трудности перехода из частотной области исследования систем управления во временную, полезнее в методическом, может быть точнее в плане формализации переход из частотной области (передаточных функций) или временной области (дифференциального уравнения n-ого порядка) во временную область с векторно-матричной формой записи в виде системы n уравнений первого порядка в общем подходе объединить известные метод понижения порядка старшей производной по координатам для решения дифференциальных уравнений на аналоговых вычислительных машинах [3,5], используемый для дифференциальных уравнений без дифференциальных составляющих управления, и метод включения прямой связи по управлению, учитывающий дифференциальные составляющие управления [1], и расписать формализованную процедуру его использования.

Суть предлагаемого подхода заключается в том, что при известном дифференциальном уравнении n-ого порядка или передаточной функции системы независимо от наличия дифференциальных составляющих управления в уравнении или нулей в передаточной функции выходной сигнал системы определяется как сумма промежуточных координат (по снижению порядка для производных координат) и дополнительных сигналов по управлению (как прямых сигналов по управлению, учитывающих дифференциальные составляющие управления). Структура предлагаемого решения дифференциального уравнения представлена на рисунке 1.

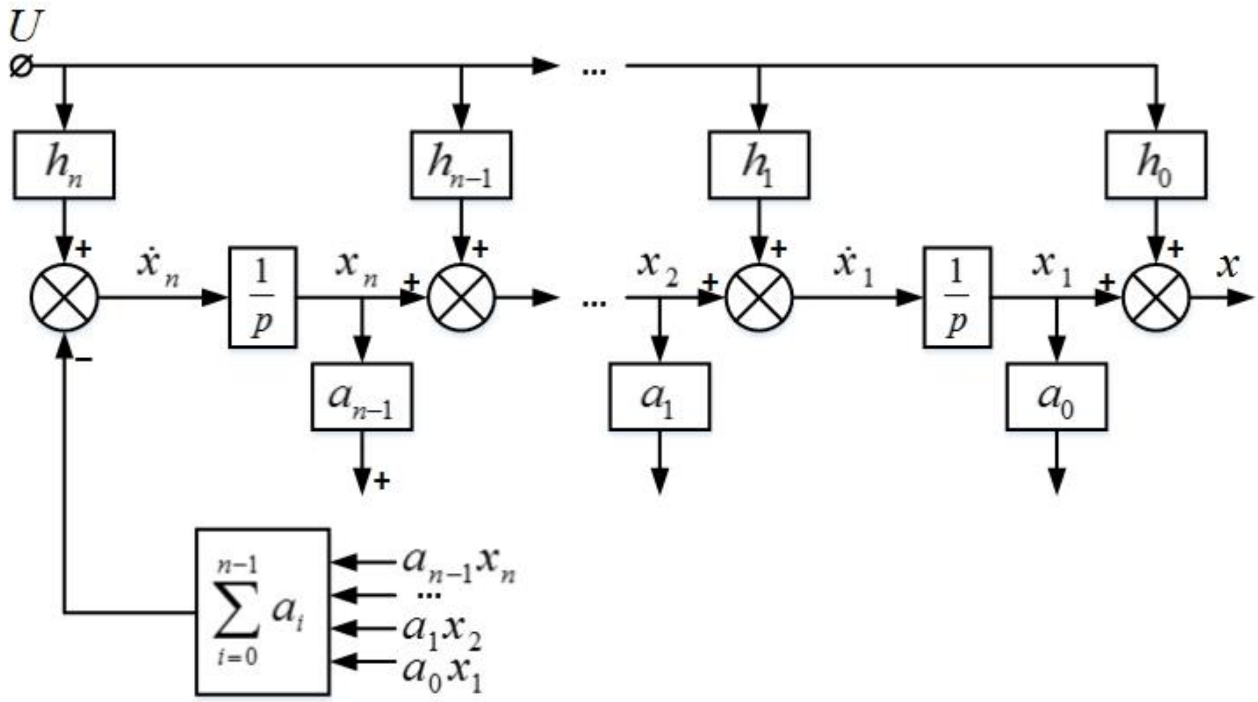


Рис. 1. Структура решения дифференциального уравнения

Если задано дифференциальное уравнение *n*-ого порядка с выходом *x* и управлением *U*

$$\left(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0\right)x = \left(b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + ... + b_1 p + b_0\right)U \qquad (1)$$

(отметим, что коэффициент a_n при старшей производной $x^{(n)} = 1$), то для представления этого уравнения в виде системы *n* уравнений первого порядка по методу понижения порядка координат с прямой связью по управлению с параметрами … вводится система уравнений

$$\begin{aligned}
&x = x_1 + h_0 U,\\
&\dot{x} = \dot{x}_1 + h_0 \dot{U},\\
&x_1 = x - h_0 U,\\
&x_2 = \dot{x} - h_0 \dot{U} - h_1 U = \dot{x}_1 - h_1 U,\\
&\dot{x}_1 = x_2 + h_1 U,\\
&x_3 = \ddot{x} - h_0 \ddot{U} - h_1 \dot{U} - h_2 U = \dot{x}_2 - h_2 U,\\
&\dot{x}_2 = x_3 + h_2 U,\\
&...\\
&\dot{x}_{n-1} = x_n + h_{n-1} U.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь отметим важный момент для связи промежуточных координат x_i, $i = 1 \div n$ с исходным уравнением (1), для чего в уравнение для $\dot{x}_n$

$$\dot{x}_n = x^{(n)} - h_0 U^{(n)} - h_1 U^{(n-1)} - \ldots - h_{n-1}\dot{U} \quad (3)$$

в качестве первого слагаемого $x^{(n)}$ используем исходное уравнение (1), разрешённое относительно старшей производной по координате x

$$x^{(n)} = \left(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1 p - a_0\right)x + \left(b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0\right)U \quad (4)$$

При подстановке (4) в (3) учитываем введенные для $x^{(i)}$, $i = 0 \div n-1$ условия (2). В результате получаем уравнение, назовём его (5), для $\dot{x}_n$, зависящее от координат x_1, x_2, …, x_n, управлений U, $\dot{U}$, …,$U^{(n)}$, коэффициентов h h_0, h_1, …, h_{n-1} и параметров исходной системы a и b, в котором на следующем шаге избавляемся от старших производных по U в $\dot{x}_n$, при этом получим неизвестные коэффициенты h h_0, h_1, …, h_{n-1} в зависимости от параметров уравнения (1).

При известных h h_0, h_1, …, h_{n-1} с учётом системы (2) и уравнения (5) получаем исходную систему n уравнений первого порядка для уравнения (1) в векторно-матричной форме записи

$$\dot{x} = Ax + BU .$$

Рассмотрим простой пример без нулей в передаточной функции

$$T_2\ddot{x} + T_1\dot{x} + T_0 x = kU .$$

Шаги:

1) Преобразуем исходное уравнение, чтобы коэффициент $a_n = 1$

$$\ddot{x} + \frac{T_1}{T_2}\dot{x} + \frac{T_0}{T_2}x = \frac{k}{T_2}U .$$

2) Введём переменные

$$x = x_1 + h_0 U,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_1 + h_0 \dot{U},$$
$$x_1 = x - h_0 U,$$
$$x_2 = \dot{x} - h_0 \dot{U} - h_1 U$$
$$\dot{x}_1 = x_2 + h_1 U.$$

3) Составим уравнение для $\dot{x}_2$ с учётом исходного уравнения и введённой системы

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} - h_0 \ddot{U} - h_1 \dot{U} = \frac{k}{T_2} U - \frac{T_1}{T_2} \dot{x} - \frac{T_0}{T_2} x - h_0 \ddot{U} - h_1 \dot{U}.$$

4) Чтобы $\dot{x}_2$ не зависел от всех производных по U, положим $h_0 = 0$, $h_1 = 0$.

5) Тогда из введённых условий получим

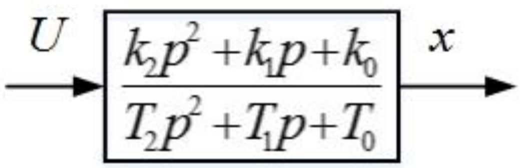
$$x = x_1,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{k}{T_2} U - \frac{T_1}{T_2} x_2 - \frac{T_0}{T_2} x_1.$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{x} = Ax + BU,$$
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{T_0}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{pmatrix} U.$$

Этот простой пример можно было решить и без применения прямого канала для производных по управлению, но он показывает достоверность и формализованность предлагаемой процедуры.

Рассмотрим пример с нулями в передаточной функции



Шаги:

1) Приводим к виду с $a_n = 1$

$$\ddot{x}+\frac{T_1}{T_2}\dot{x}+\frac{T_0}{T_2}x=\frac{k_2}{T_2}\ddot{U}+\frac{k_1}{T_2}\dot{U}+\frac{k_0}{T_2}U\ .$$

2) Введём переменные

$$x = x_1 + h_0 U,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_1 + h_0 \dot{U},$$
$$x_1 = x - h_0 U,$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x} - h_0 \dot{U},$$
$$x_2 = \dot{x} - h_0 \dot{U} - h_1 U,$$
$$\dot{x}_1 = x_2 + h_1 U.$$

3) Для старшей производной с учётом уравнения движения исходной системы запишем

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} - h_0\ddot{U} - h_1\dot{U} = -\frac{T_1}{T_2}\dot{x} - \frac{T_0}{T_2}x + \frac{k}{T_2}\ddot{U} + \frac{k_1}{T_2}\dot{U} + \frac{k_0}{T_2}U - h_0\ddot{U} - h_1\dot{U}.$$

С учётом уравнений связи

$$x = x_1 + h_0 U,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_1 + h_0 \dot{U},$$

после подстановки в последнее уравнение для $\dot{x}_2$ получим

$$\dot{x}_2 = -\frac{T_1}{T_2}x_2 - \frac{T_0}{T_2}x_1 + \ddot{U}\left(\frac{k}{T_2} - h_0\right) + \dot{U}\left(\frac{k_1}{T_2} - \frac{h_0 T_1}{T_2} - h_1\right) + U\left(\frac{k_0}{T_2} - \frac{T_1}{T_2}h_1\right).$$

4) Избавимся от старших производных U в $\dot{x}_2$

$$h_0 = \frac{k_2}{T_2},$$
$$h_1 = \frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2 T_1}{T_2^2}.$$

5) Для полученных h_0, h_1, найдём для первого звена

$$\dot{x}_1 = x_2 + h_1 U = x_2 + \left(\frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2 T_1}{T_2^2}\right)U\ ,$$

для второго звена

$$\dot{x}_2 = -\frac{T_1}{T_2}x_2 - \frac{T_0}{T_2}x_1 + U\left(\frac{k_0}{T_2} - \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2 T_1}{T_2^2}\right)\right).$$

что в векторно-матричной форме записи

$$\dot{x} = Ax + BU$$

имеет

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{T_0}{T_2} & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \dfrac{k_1}{T_2} - \dfrac{k_2 T_1}{T_2^2} \\ \dfrac{k_0}{T_2} - \dfrac{T_1}{T_2}\left(\dfrac{k_1}{T_2} - \dfrac{k_2 T_1}{T_2^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Предлагаемый общий подход использует и закрепляет фундаментальные для исследования динамики систем управления понятия об уменьшении порядка производных координат и учёта производных по управлению, что важно для анализа и синтеза конкретных систем управления вместо отыскания формул перехода или программ для машинного решения задачи, таких, как пакет Matlab компании MathWorks или системы Wolfram Alpha [2].

Список литературы

1. *Атанс М.* Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.

2. *Журавлев А. В.* Отыскание представления в пространстве состояний объекта / А. В. Журавлев, В. С. Хорошавин // Общество, наука, инновации: Всерос. науч.-практ. конф.я НПК-2015: сб. ст. Киров, 2015. С. 1362–1363.

3. *Коган Б. Я.* Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963. 384 с.

4. *Летов А. М.* Некоторые нерешённые задачи теории автоматического управления // Дифференциальные уравнения. 1970.Т. 6 № 4.

5. *Тетельбаум И. М.* 400 схем для АВМ / И. М. Тетельбаум, Ю. Р. Шнейдер. М.: Энергия, 1978. 283 с.

ХОРОШАВИН Валерий Степанович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: khoroshavin@vyatsu.ru

ЗОТОВ Александр Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: zotov@vyatsu.ru

МОКРУШИН Сергей Александрович – ассистент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: mokrushin@vyatsu.ru.