Технические науки

УДК 681.51

А. В. Зотов, В. С. Грудинин, В. С. Хорошавин

НАХОЖДЕНИЕ ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДВУХКООРДИНАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ВИДА ПО КРИТЕРИЮ МИНИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Статья посвящена определению соотношения параметров в математическом описании двухкоординатного объекта управления с экстремальной статической характеристикой и параметров интегрального критерия качества (характеризующего расход ресурсов или времени), при котором принцип максимума Понтрягина не позволяет однозначно определить оптимальное управление. Задача решается за счёт нахождения особого (применительно к принципу максимума Понтрягина) управления. Данное особое управление находится из применения условий общности положения (УОП) для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат. В качестве условий общности положения для нелинейных объектов выступает матрица линейно независимых векторов. Эти вектора, составляющие УОП, найдены из многогранника ограничений по управлению, матрицы состояния и матрицы управления), описывающих исходный объект управления. За счёт представления подынтегрального выражения в критерии качества в виде дополнительной координаты, осуществляется переход от пространства координат исходного объекта управления к расширенному пространству координат, в котором и производится поиск особого управления или особых траекторий. Данная операция позволяет учесть при поиске особого управления не только характер объекта управления, но и вид интегрального критерия качества.

Ключевые слова: принцип максимума, особое управление, условия общности положения.

Задача оптимального управления на минимум ресурсов нелинейными динамическими объектами представляет сложную, до конца не решённую проблему. Общей методики для решения нелинейных оптимальных задач не существует ввиду их большого разнообразия. В качестве основного метода исследования оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина, учитывающий ограничения на переменные системы и поэтому применяемый для решения практических задач, и условия общности положения (УОП) для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат [1, 2, 3].

Существует большой класс объектов управления, для которых имеется полное математическое описание и зависимость показателя качества от оптимизируемых координат известна. Расчёт систем с большим количеством координат и параметров целесообразно производить в специализированных математических пакетах. Например, таких как Maple [4].

В данной статье исследуются объекты управления (ОУ) с математическим описанием общего вида.

ОУ представлен в виде структуры, которая может быть описана системой дифференциальных уравнений линейных или нелинейных по координатам x, но линейных по управлениям U:

$$\dot{x} = A(x) + B(x)U\ ; \tag{1}$$

где $A(x)$ – функциональная матрица-столбец с элементами $f_i(x_1,...,x_n)$, $i=\overline{1,n}$, $B(x)$ – функциональная матрица-столбец с элементами $g_i(x_1,...,x_n)$, $i=\overline{1,n}$, функции $f_i(x_1,...,x_n)$, $g_i(x_1,...,x_n)$, $i=\overline{1,n}$ непрерывны и достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по x, U - скалярная функция.

Необходимо найти допустимое управление U, $|U| \le U_{\max}$, доставляющее минимум интегральному критерию

$$J = \int_0^T f_0(x)dt \to \min ; \tag{2}$$

где T - время движения от начальной до конечной точки заранее не задано.

Как показано в [5], для исследования нестационарных задач используется рекуррентное соотношение:

$$B_j\left(\tilde{x},U,\dot{U},...\right)=\frac{\partial B_{j-1}}{\partial U^{(j-3)}}\frac{dU^{(j-3)}}{dt}+\frac{\partial B_{j-1}}{\partial\tilde{x}}\left(A(\tilde{x})+B(\tilde{x})U\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial A(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial B(\tilde{x})U}{\partial\tilde{x}}\right)B_{j-1}+\frac{dB_{j-1}}{dt}. \quad (3)$$

где $\tilde{x}=\begin{pmatrix}x_0\\ x\end{pmatrix}\subset R_{n+1}$, $A(\tilde{x})=\begin{pmatrix}f_0(x)\\ A(x)\end{pmatrix}$, $B_1(\tilde{x})=\begin{pmatrix}0\\ B(x)\end{pmatrix}$.

Из векторов $B_1(\tilde{x})$, $j=\overline{1,n+1}$, составляется матрица $D_{n+1}=\begin{pmatrix}B_1 & ... & B_{n+1}\end{pmatrix}$. Если определитель матрицы $\det D_{n+1}=F\left(\tilde{x},U,\dot{U},...\right)$, то из выражения $F\left(\tilde{x},U,\dot{U},...\right)=0$ определяется множество особых управлений в функции фазовых координат и параметров системы.

Дифференциальные уравнения связи, характеризующие ОУ, имеют вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2)+U;\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2).\end{cases} \quad (4)$$

$$J=\int_0^T f_0(x_1,x_2)dt\to\min. \quad (5)$$

Статическая характеристика объекта (4) выражается уравнением $f_2(x_1,x_2)=0$.

С помощью методики описанной в [4] находим вектора B_j:

$$A=\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\end{pmatrix};\quad B_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix};\quad B_2=\begin{pmatrix}-\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\end{pmatrix};$$

$$B_3=\begin{pmatrix}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2}(f_1+U)-\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1\partial x_2}f_2+\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\ -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(f_1+U)-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2}f_2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\ -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(f_1+U)-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_2}f_2+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\end{pmatrix}.$$

Составляя матрицу $D_3 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2}(f_1+U) - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ 1 & -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(f_1+U) - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} f_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ 0 & -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(f_1+U) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \end{pmatrix}$$

находим определитель матрицы

$$\det D_3 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) f_2 + \\ + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}\right)(f_1+U). \tag{6}$$

Из приравнивания нулю выражения (6) находим особое управление *U* как функцию координат x_1 и x_2:

$$U = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) f_2}{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2}} - f_1. \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в уравнения (4) и решая получившуюся систему дифференциальных уравнений для заданных граничных условий

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) f_2}{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2}}; \\ \dot{x}_2 = f_2; \end{cases} \tag{8}$$

находится особая траектория, на которой принцип максимума Понтрягина не позволяет однозначно определить оптимальное управление, поэтому требуется привлечение других методов, например, численного расчёта траекторий и итеративный поиск минимума функционала (5).

Анализируя выражение (8) можно сделать следующие выводы:

1) для двухкоординатной системы (4) при критерии минимума (5) вид функции $f_1(x_1, x_2)$ никак не влияет на вид особых траекторий данной системы;

2) качественный анализ особых точек из уравнений (4) и (7) в общем виде провести не представляется возможным, поэтому требуется дополнительное исследование в каждом конкретном случае.

Список литературы

1. *Олейников В. А., Борисенко Р. А.* Асимптотические свойства фазовых траекторий и особые управления в оптимальных быстродействиях // Вопросы теории систем автоматического управления. Л.: Ленинград. гос. ун-т, 1974.

2. *Олейников В. А., Зотов Н. С., Пришвин М. М.* Основы оптимального и экстремального управления. М.: Высш. шк., 1969. 296 с.

3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

4. *Зотов А. В.* Анализ и синтез особых оптимальных управлений нелинейными динамическими объектами: дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2014. 188 с.

5. *Хорошавин В. С.* Прикладные методы качественного исследования особых управлений и структур нелинейных оптимальных систем: дис. … д-ра техн. наук. Киров: Киров. политех. ин-т, 1993. 402 с.

ЗОТОВ Александр Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: zotov@vyatsu.ru

ГРУДИНИН Виктор Степанович – кандидат технических наук, доцент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: grudinin@vyatsu.ru

ХОРОШАВИН Валерий Степанович – доктор технических наук, профессор кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: khoroshavin@vyatsu.ru