УДК 512.556

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

О ПОДАЛГЕБРАХ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ЧАСТИЧНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Работа посвящена развитию общей теории полуколец непрерывных функций. Объектом исследования являются полукольца непрерывных частичных функций, точнее, полукольца CP(X) непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле **R** действительных чисел. Предметом изучения служат подалгебры полуколец CP(X). Рассматривается решетка A(X) всех подалгебр полукольца CP(X) над произвольным T_1-пространством X. Изучаются минимальные и максимальные подалгебры **R**-алгебры CP(X). Описаны атомы (минимальные подалгебры) и предатомы решетки A(X). Техника атомов и предатомов позволила доказать теорему определяемости любого T_1-пространства X решеткой A(X). В полукольцах CP(X) найден класс их максимальных подалгебр. Показано, что для конечных дискретных пространств X ими исчерпываются все максимальные подалгебры полуколец CP(X). Сформулированы некоторые задачи.

Ключевые слова: полукольцо, поле **R** действительных чисел, частичная действительнозначная функция, подалгебра.

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложения + и умножения $\cdot$, для которых $\langle S, +\rangle$ – коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ – полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Поле **R** всех действительных чисел является коммутативным полукольцом с делением с мультипликативным нулем 0 и единицей 1.

Для произвольного множества X через $SP(X)=\cup\{\mathbf{R}^Y\colon Y\subseteq X\}$ обозначается множество всех частичных **R**-значных функций f на X. Области определения $D(f)$ таких функций f являются подмножествами множества X. На множестве $SP(X)$

полукольцевые операции задаются правилом: для любых частичных функций f, $g\in SP^X$ функции $f+g$ и fg определены на $D(f+g)=D(fg)=D(f)\cap D(g)$ поточечно, то есть $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ и $(fg)(x)=f(x)g(x)$ для всех $x\in D(f)\cap D(g)$. В результате множество $SP(X)$ становится коммутативным полукольцом с единицей 1 и поглощающим элементом $\varnothing$, рассматриваемым как частичная функция с пустой областью определения: $D(\varnothing)=\varnothing$.

Для любого топологического пространства X через $\boldsymbol{C(X)}$ обозначается кольцо **всех непрерыв**ных действительно**значных функций на** X [12], см. также [8, гл. 2]**, а через** $CP(X)=\cup\{\boldsymbol{C(Y)}: Y\subseteq X\}$ – полукольцо всех непрерывных частичных **R**-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f)\cap D(g)$. Считаем, что $\boldsymbol{C(\varnothing)}=\{\varnothing\}$. Ясно, что полукольцо $CP(X)$ служит дизъюнктным объединением колец $\boldsymbol{C(Y)}$ по всевозможным подпространствам Y в X и подполукольцом полукольца $SP(X)$. Полукольцо $CP(X)$ имеет поглощающий элемент $\varnothing$. Если топологическое пространство X **дискретно,** то $C(X)=\mathbf{R}^X$ и $\boldsymbol{CP(X)}=SP(X)$.

Впервые полукольца частичных и непрерывных частичных функций изучались в статье [4], рассматривались в [5–7]. Теория полуколец $SP(X)$ и $CP(X)$ развита в [9, гл. 8].

Подалгеброй в полукольце $CP(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа из **R**. Пустое множество $\varnothing$ также считается подалгеброй в $CP(X)$. Относительно отношения включения $\subseteq$ множество $\mathrm{A}(X)$ всех подалгебр полукольца $\mathrm{CP}(X)$ образует полную решетку с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом $\mathrm{CP}(X)$. При этом точной нижней гранью всякого непустого семейства подалгебр в $\mathrm{CP}(X)$ будет их пересечение, а $\sup(A, B)=A\vee B=A\cup B\cup(A+B+AB)$ для любых $A, B\in \mathrm{A}(X)$.

Топологическое пространство X называется T_0-*пространством* (T_1-*пространством*), если для любых его различных точек x и y существует открытое множество в X, содержащее ровно одну из этих точек (соответственно, содержащее x и не содержащее y). Свойство топологического пространства быть T_1-пространством равносильно замкнутости всех его одноточечных подмножеств. Ясно, что T_1-пространства являются и T_0-пространствами. Информацию топологического характера можно найти в книге [11].

Для любого подмножества Y топологического пространства X обозначим через 0_Y и 1_Y такие функции из $CP(X)$, что $D(0_Y)=D(1_Y)=Y$, $0_Y=0$ и $1_Y=1$ на Y. Имеем $0_{\varnothing}=1_{\varnothing}=\varnothing$. Для точек $x\in X$ будем писать $0_x=0_{\{x\}}$ и $1_x=1_{\{x\}}$.

Атомами решетки L с наименьшим элементом θ называются минимальные элементы упорядоченного множества $L\setminus\{\theta\}$. Двойственным образом определяется понятие коатома решетки с наибольшим элементом. Атомы (коатомы) решетки $\mathrm{A}(X)$ называются также минимальными (максимальными) подалгебрами полукольца $CP(X)$. Элемент a решетки L с наименьшим элементом θ назовем ее предатомом, если a строго больше ровно двух элементов решетки L: θ и некоторого атома. Теоретико-решеточные сведения содержатся в книге [10].

Следующее, легко проверяемое, предложение дает описание всех атомов и предатомов решетки $\mathrm{A}(X)$. Предварительно отметим, что $\{0_Y\}=\{0_Z\} \Leftrightarrow Y=Z$.

Предложение 1. *Для любого топологического пространства X верны следующие утверждения:*

1) *атомами решетки* $\mathrm{A}(X)$ *являются в точности одноэлементные подалгебры* $\{0_Y\}$, $Y\subseteq X$;

2) *предатомы решетки* $\mathrm{A}(X)$ *суть в точности подалгебры* $e\mathbf{R}$ *по всем идемпотентам* $e\in \mathrm{CP}(X)$, *принимающим ровно одно значение* 1 ($e=1_Y$ при $Y\neq\varnothing$) *или ровно два значения* 0 *и* 1.

Предложение 1, с другой стороны, описывает некоторые простейшие подалгебры полуколец $\mathrm{CP}(X)$ в терминах решеток $\mathrm{A}(X)$. На языке $\mathrm{A}(X)$ приведем решеточные характеризации ряда других соотношений в полукольцах $\mathrm{CP}(X)$.

Следующие три леммы доказываются непосредственно.

Лемма 1. *Для любых двух различных атомов* $\{0_Y\}$ *и* $\{0_Z\}$ *решетки* $\mathrm{A}(X)$ *верны следующие утверждения:*

1) $\{0_Y\}\vee\{0_Z\}=\{0_Y, 0_Z, 0_{Y\cap Z}\}$;

2) *подалгебра* $\{0_Y\}\vee\{0_Z\}$ *содержит ровно два атома* $\{0_Y\}$ *и* $\{0_Z\}$ $\Leftrightarrow$ $Y\subset Z$ *или* $Z\subset Y$;

3) *подалгебра* $\{0_Y\}\vee\{0_Z\}$ *содержит ровно три атома* $\{0_Y\}$, $\{0_Z\}$ *и* $\{0_{Y\cap Z}\}$ $\Leftrightarrow$ $Y\not\subset Z$ *и* $Z\not\subset Y$.

Отметим, что в 3) $\{0_{Y\cap Z}\}=\{\varnothing\}$ $\Leftrightarrow$ $Y\cap Z=\varnothing$.

Лемма 2. *Для произвольного атома* $\{0_Y\}$ *решетки* $\mathrm{A}(X)$ *имеем:*

1) $\{0_Y\}=\{\varnothing\}$ *или* $\{0_Y\}=\{0_X\}$ $\Leftrightarrow$ $\{0_Y\}\vee\{0_Z\}$ *содержит ровно два атома для любого атома* $\{0_Z\}\neq\{0_Y\}$;

2) $\{0_Y\}=\{\varnothing\}$ $\Leftrightarrow$ *не существует предатома над* $\{0_Y\}$;

3) $\{0_Y\}=\{0_X\}$ $\Leftrightarrow$ $\{0_Y\}$ *удовлетворяет достаточной части эквиваленции* 1) *и не удовлетворяет достаточной части эквиваленции* 2).

Лемма 3. *Для любых отличных от* $\{\varnothing\}$ *различных атомов* $\{0_Y\}$ *и* $\{0_Z\}$ *решетки* $\mathrm{A}(X)$ *имеем:* $Y\subset Z$ $\Leftrightarrow$ *существует такой атом* $\{0_U\}$, *что* $\{0_U\}\vee\{0_Y\}$ *включает ровно три атома* $\{0_U\}$, $\{0_Y\}$, $\{\varnothing\}$ *и* $\{0_U\}\vee\{0_Z\}$ *включает только атомы* $\{0_U\}$ *и* $\{0_Z\}$.

В силу предложения 1 леммы 1–3 устанавливают на множестве всех атомов решетки $\mathrm{A}(X)$ отношение *подчинения*, при этом, очевидно, имеет место

Предложение 2. *Упорядоченное множество* $\{\{0_Y\}\colon Y\subseteq X\}$ *с отношением подчинения изоморфно булеану* $\mathrm{B}(X)=\{Y\colon Y\subseteq X\}$ *с отношением включения* $\subseteq$, *причем атомы* $\{0_x\}$ *решетки* $\mathrm{A}(X)$, $x\in X$, *соответствуют атомам* $\{x\}$ *булеана* $\mathrm{B}(X)$.

Замечание 1. Предложение 2 позволяет отождествлять атомы $\{0_Y\}$ решетки $\mathrm{A}(X)$ с подмножествами Y топологического пространства X.

Лемма 4. *Пусть* X *– произвольное* T_1*-пространство,* $\varnothing\neq Y\subseteq X$ *и* $x\in X\setminus Y$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *точка x не принадлежит замыканию множества Y в X* $\Leftrightarrow$ *существует функция* $e\in$ C($Y\cup\{x\}$), *равная* 0 *на Y и* 1 *в точке x;*

2) *подалгебра* $e\mathbf{R}$ *решеточно определяется как предатом P решетки* A(X), *для которого единственным включенным в него атомом служит* $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$ *и подалгебра* $P\vee\{0_Y\}$ *включает ровно* 5 *подалгебр, именно:* $\varnothing$, $\{0_Y\}$, $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, P, $P\vee\{0_Y\}$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно.

Докажем 2). Ясно, что подалгебра $e\mathbf{R}$ служит предатомом решетки A(X) над атомом $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, причем $e\mathbf{R}\vee\{0_Y\}$ включает ровно 5 подалгебр. По утверждению 2) предложения 1 над атомом $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$ существуют также другие предатомы Q=$f\mathbf{R}$, в частности $1_{Y\cup\{x\}}\mathbf{R}$. Но в решетке A(X) подалгебры Q$\vee\{0_Y\}$ включают по 6 подалгебр: $\varnothing$, $\{0_Y\}$, $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, Q, Q$\vee\{0_Y\}$ и $g\mathbf{R}$, где g – сужение функции f на множество Y.

Из пункта 1) леммы 4 следует

Лемма 5. *Подмножество Y произвольного T_1-пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки $x\in X\backslash Y$ существует такая функция* $e\in$ C($Y\cup\{x\}$), *что e=0 на Y и $e(x)$=1.*

На основе предложения 2, лемм 4 и 5 получаем:

Теорема. *Произвольные* $\boldsymbol{T_1}$*-пространство X и топологическое пространство Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны решетки* A(X) *и* A(Y) *их подалгебр.*

Замечание 2. Теме определяемости топологических пространств различными алгебрами функций на них посвящена обзорная статья [1], см. также [2]. Определяемость хьюиттовских пространств X решеткой всех подалгебр колец $C(X)$ установлена в 1997 г. в работе [3], см. также [8, п. 9].

Пример 1. Возьмем одноточечное топологическое пространство X=$\{x\}$. Полукольцо CP(X) совпадает с $1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$ и решетка A(X)=$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0_x\}, \{\{\varnothing, 0_x\},$

$1_x\mathbf{R}$, CP(X)} – это шестиэлементная дистрибутивная решетка, изоморфная прямому произведению двухэлементной и трехэлементной цепей.

Пример 2. Рассмотрим двухточечное антидискретное топологическое пространство $X=\{x, y\}$ и связное двоеточие Y с этими же точками x и y. Тогда $CP(X)=CP(Y)=1_x\mathbf{R}\cup 1_Y\mathbf{R}\cup 1\cdot\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$ есть множество частичных функций-констант на X. Стало быть, $A(X)=A(Y)$. Решетка $A(X)$ содержит пентагон $\{\varnothing, \{0_x\}, \{0_y\}, \{\varnothing, 0_x\}, \{\varnothing, 0_x, 0_y\}\}$ в качестве подрешетки, поэтому не является модулярной. Пусть теперь Z – произвольное топологическое пространство, содержащее, по крайней мере, две различные точки x и y. Решетка $A(Z)$ имеет своей подрешеткой пентагон $\{\varnothing, \{0_x\}, \{0_y\}, \{\varnothing, 0_x\}, \{\varnothing, 0_x, 0_y\}\}$, значит, не является модулярной.

Задача 1. Изобразить на диаграмме Хассе решетки $A(X)$ для двухэлементных топологических пространств X.

Задача 2. Сколько подалгебр имеет полукольцо $CP(X)$ над n-элементным дискретным пространством X ?

Замечание 3. Пример 2 показывает, что T_0-пространства X не обязаны определяться решеткой $A(X)$. Но в силу нашей теоремы каждое топологическое свойство произвольного $\mathbf{T_1}$-пространства X может быть выражено на языке решетки $A(X)$.

Примеры 1 и 2 доказывают справедливость следующего утверждения:

Предложение 3. *Для любого топологического пространства X имеем:*

1) *если X содержит ровно одну точку, то решетка* $A(X)$ *дистрибутивна;*

2) *если X содержит более одной точки, то решетка* $A(X)$ *не модулярна.*

Замечание 4. Решетка подалгебр кольца $C(X)$ над двухэлементным дискретным пространством X является диамантом, поэтому она модулярна, но не дистрибутивна [8, с. 114, рис. 2]. Для трехэлементного дискретного пространства Y решетка подалгебр кольца $C(Y)$ является немодулярной 15-элементной решеткой [8, с. 114, рис. 1], изоморфной подрешетке решетки $A(C(X))$ над любым T_1-пространством X мощности ≥ 3.

Подпространство *Y* топологического пространства X называется *C-расширяемым*, если каждая функций из $C(Y)$ продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

Легко видеть, что справедливо

Предложение 4. *Пусть X – произвольное топологическое пространство, $x\in X$, подпространство $X\backslash\{x\}$ C-расширяемо, A – максимальная подалгебра кольца $C(X)$. Тогда множества $CP(X)\backslash C(X\backslash\{x\})$ и $(CP(X)\backslash C(X))\cup A$ будут максимальными подалгебрами полукольца $CP(X)$.*

Для конечных дискретных пространств X получаем полное описание максимальных подалгебр полуколец $CP(X)$:

Предложение 5. *Для всякого конечного **дискретного** пространство X максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ исчерпываются подалгебрами $CP(X)\backslash C(X\backslash\{x\})$ и $(CP(X)\backslash C(X))\cup A$ по всем точкам $x\in X$ и всевозможным максимальным подалгебрам кольца $C(X)$.*

Доказательство. Пусть X – n-элементное дискретное пространство. В силу предложения 4 подалгебры вида $CP(X)\backslash C(X\backslash\{x\})$ и $(CP(X)\backslash C(X))\cup A$ являются максимальными подалгебрами полукольца $CP(X)$.

Обратно, возьмем произвольную максимальную подалгебру M в $CP(X)$. Если подалгебра M не содержит $C(X\backslash\{x\})$ для некоторой точки $x\in X$, то $M\cap C(X\backslash\{x\})=\varnothing$ и $M\subseteq CP(X)\backslash C(X\backslash\{x\})$, то есть $M=CP(X)\backslash C(X\backslash\{x\})$. Поэтому можно считать, что M содержит n подалгебр $C(X\backslash\{x\})$ для всех $x\in X$. Но тогда M содержит и всевозможные пересечения подалгебр $C(X\backslash\{x\})$, $x\in X$. Значит, подалгебра $CP(X)\backslash C(X)$ содержится в M и $A=M\cap C(X)$ будет максимальной подалгеброй кольца $C(X)$.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Сер. 1: Алгебра. Топология. Геометрия. ВИНИТИ. 1990. Т. 28. С. 3–46.

2. *Вечтомов Е. М.* О полугруппах непрерывных частичных функций на топологических пространствах // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. Вып. 4. С. 143–144.

3. *Вечтомов Е. М.* Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 687–693.

4. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* О полукольцах частичных функций // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 19. С. 3–11.

5. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Полукольца частичных функций // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: материалы XIII Междунар. конф, посвящ. С. С. Рышкову. Тула: ТГПУ, 2015. С. 148–150.

6. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* О категории полуколец непрерывных частичных числовых функций // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895–1944) и Алексея Петровича (1926–1998) Широковых. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 128–129.

7. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* О полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 70-летию В. М. Левчука. Красноярск: Сибир. федерал. ун-т, 2016. С. 11–12.

8. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры: монография: в 2 т. Т. 1 / под ред. Е. М. Вечтомова. Киров: ООО «Изд-во «Радуга-ПРЕСС», 2016. 384 с.

9. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры: монография: в 2 т. Т. 2 / под ред. Е. М. Вечтомова. Киров: ООО «Изд-во «Радуга-ПРЕСС», 2016. 316 с.

10. *Гретцер Г.* Теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

11. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

12. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. N. Y.: Springer-Verlang, 1976. 300 p.

ВЕЧТОМОВ Евгений Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: vecht@mail.ru

ЛУБЯГИНА Елена Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: shishkina.en@mail.ru