УДК 512.556 doi: 10.25730/VSU.0536.18.012

О подалгебрах полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций. II*

Е. М. Вечтомов[1], Е. Н. Лубягина[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: vecht@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Аннотация. Статья относится к теории полуколец непрерывных числовых функций, развиваемой в рамках функциональной алгебры. Объектом исследования являются полукольца CP(X) непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле **R** действительных чисел. Предметом изучения служат подалгебры с единицей полуколец CP(X). Рассматриваются свойства решеток A(X) всевозможных подалгебр и $\mathrm{A}_1(X)$ всех подалгебр с единицей полуколец CP(X) над топологическими пространствами X. Выяснено строение атомов и предатомов в решетках $\mathrm{A}_1(X)$. Это позволило решить задачу определяемости T_1-пространств X решеткой $\mathrm{A}_1(X)$: любое T_1-пространство X однозначно, с точностью до гомеоморфизма, определяется решеткой $\mathrm{A}_1(X)$ в классе всех топологических пространств. В качестве следствия получен результат из предыдущей работы авторов об абсолютной определяемости T_1-пространств X решеткой A(X).

Ключевые слова: полукольцо непрерывных частичных действительнозначных функций, подалгебра, подалгебра с единицей, решетка подалгебр, определяемость.

Предварительные сведения

Данная работа является продолжением статьи авторов [4] и посвящена изучению подалгебр с единицей полуколец CP(X) непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле **R** действительных чисел. Рассматривается решетка $\mathrm{A}_1(X)$ всевозможных подалгебр с единицей 1 в полукольцах CP(X).

Напомним необходимые понятия и результаты [3; 4].

Полукольцом (в широком смысле) называется алгебраическая структура с ассоциативными бинарными операциями сложения (+) и умножения (·), такими, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. В нашей работе под *полукольцом* понимается полукольцо с коммутативными операциями сложения и умножения. Поле **R** всех действительных чисел является коммутативным полукольцом с делением с мультипликативным нулем 0 и единицей 1.

Пусть X – произвольное топологическое пространство,

$C(X)$ – кольцо всех непрерывных действительнозначных функций на пространстве X,

$$CP(X)=\cup\{C(Y)\colon Y\subseteq X\} –$$

полукольцо всех непрерывных частичных **R**-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на пересечении $D(f)\cap D(g)$ их областей определения.

Считаем, что $C(\varnothing)=\{\varnothing\}$. Полукольцо $CP(X)$ имеет единицу 1 и поглощающий элемент $\varnothing$.

Подалгеброй в полукольце $CP(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа из **R**. Пустое множество $\varnothing$ также считается подалгеброй в $CP(X)$. Относительно отношения включения $\subseteq$ множество A(X) образует полную решетку с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом CP(X), а $\mathrm{A}_1(X)$ будет полной решеткой с наименьшим элементом **R** – подалгеброй функций-констант на X. Точной нижней гранью непустого подмножества в A(X) будет их пересечение, а точная верхняя грань подалгебр $A, B\in$ A(X) равна $A\vee B=A\cup B\cup(A+B+AB)$. Решетка $\mathrm{A}_1(X)$ является подрешеткой решетки A(X).

**Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.*

Топологическое пространство называется T_1-*пространством*, если все его одноточечные подмножества замкнуты, и T_0-*пространством*, если совпадение замыканий его одноточечных множеств $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ влечет равенство самих точек x и y. Ясно, что T_1-пространства являются T_0-пространствами. Связное двоеточие, будучи T_0-пространством, не является T_1-пространством.

Для любого подмножества Y топологического пространства X обозначим через 0_Y и 1_Y такие функции из $CP(X)$, что $D(0_Y)=D(1_Y)=Y$, $0_Y=0$ и $1_Y=1$ на Y. Имеем $0_\varnothing=1_\varnothing=\varnothing$. Для точек $x\in X$ будем писать $0_x=0_{\{x\}}$ и $1_x=1_{\{x\}}$. В полукольце $\mathrm{CP}(X)$ отождествляем $1_X\mathbf{R}$ с $\mathbf{R}$. Отметим, что $\{0_Y\}=\{0_Z\} \Leftrightarrow Y=Z$ для $Y, Z\subseteq X$.

Для произвольной функции $e\in CP(X)$ обозначим через $[e]$ наименьшую подалгебру с единицей 1 полукольца $CP(X)$, содержащую e. Если e принимает только нулевые и/или единичные значения, то $[e]$ совпадает с множеством, состоящим из функций-констант на X и функций из $\mathrm{C}(D(e))$, являющихся константами на множествах $e^{-1}(0)=\{x\in D(e)\colon e(x)=0\}$ и $e^{-1}(1)=\{x\in D(e)\colon e(x)=1\}$ [6, теорема 9.3], в частности $1_{D(e)}\in [e]$. Заметим, что $[f]=[e]$ для любой такой двухзначной функции $f\in \mathrm{C}(D(e))$. Имеем также $[1_Y]=[0_Y]=\mathbf{R}\cup 1_Y\mathbf{R}$ при любом $Y\subseteq X$, в частности $[\varnothing]=[1_\varnothing]=[0_\varnothing]=\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$.

Теме определяемости топологических пространств различными алгебрами функций на них посвящена обзорная статья [1], см. также [2]. Определяемость хьюиттовских пространств X решеткой всех подалгебр колец $C(X)$ установлена Е. М. Вечтомовым в 1997 г. в работе [3], см. также [6, п. 9].

Отметим, что основы теории полуколец непрерывных частичных числовых функций заложены в [5; 7, глава 8].

Атомы (коатомы) решетки $\mathrm{A}(X)$ – это минимальные (максимальные) подалгебры полукольца $CP(X)$. Элемент a решетки L с наименьшим элементом θ называется ее *предатомом*, если a строго больше ровно двух элементов решетки L: θ и некоторого ее атома.

Предложение А [4, предложение 2]**.** *Упорядоченное множество* $\{\{0_Y\}\colon Y\subseteq X\}$ *с отношением подчинения изоморфно булеану* $\mathrm{B}(X)=\{Y\colon Y\subseteq X\}$ *с отношением включения* $\subseteq$, *причем атомы* $\{0_x\}$ *решетки* $\mathrm{A}(X)$, $x\in X$, *соответствуют атомам* $\{x\}$ *булеана* $\mathrm{B}(X)$.

Данное предложение позволяет отождествлять атомы $\{0_Y\}$ решетки $\mathrm{A}(X)$ с подмножествами Y топологического пространства X.

Теорема А [4, теорема]**.** *Произвольные T_1-пространство X и топологическое пространство Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны решетки* $\mathrm{A}(X)$ *и* $\mathrm{A}(Y)$.

Пример 1. Для одноточечного топологического пространства $X=\{x\}$ получаем полукольцо $\mathrm{CP}(X)=\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$, дистрибутивную решетку $\mathrm{A}(X)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0_x\}, \{\varnothing, 0_x\}, \mathbf{R}, \mathrm{CP}(X)\}$, изоморфную прямому произведению двухэлементной и трехэлементной цепей, и двухэлементную цепь $\mathrm{A}_1(X)=\{\mathbf{R}, \mathrm{CP}(X)\}$.

Пример 2. Рассмотрим двухточечное топологическое пространство $X=\{x, y\}$, наделенное антидискретной топологией или топологией связного двоеточия. Получаем полукольцо $CP(X)=\mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$ и 35-элементную решетку $\mathrm{A}(X)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0_x\}, \{0_y\}, \{0_X\}, \{\varnothing, 0_x\}, \{\varnothing, 0_y\}, \{\varnothing, 0_x, 0_y\}, \{\varnothing, 0_X\}, \{0_x, 0_X\}, \{0_y, 0_X\}, \{\varnothing, 0_x, 0_X\}, \{\varnothing, 0_y, 0_X\}, \{\varnothing, 0_x, 0_y, 0_X\}, 1_x\mathbf{R}, 1_y\mathbf{R}, \{\varnothing\}\cup 1_x\mathbf{R}, \{\varnothing\}\cup 1_y\mathbf{R}, \{\varnothing, 0_x\}\cup 1_y\mathbf{R}, \{\varnothing, 0_y\}\cup 1_x\mathbf{R}, \{\varnothing\}\cup 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}, 1_x\mathbf{R}\cup\{0_X\}, 1_y\mathbf{R}\cup\{0_X\}, \{\varnothing, 0_X\}\cup 1_x\mathbf{R}, \{\varnothing, 0_X\}\cup 1_y\mathbf{R}, \{\varnothing, 0_x, 0_X\}\cup 1_y\mathbf{R}, \{\varnothing, 0_y, 0_X\}\cup 1_x\mathbf{R}, \{\varnothing, 0_X\}\cup 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, CP(X)\}$. При этом $C(X)=\mathbf{R}$ и подалгебра $CP(X)\backslash C(X)$ всех собственно частичных функций полукольца $CP(X)$ содержит 14 подалгебр; добавляя к этим подалгебрам функцию-константу $0=0_X$, получим еще 14 подалгебр. Решетка $\mathrm{A}(X)$ имеет четыре атома $\{\varnothing\}, \{0_x\}, \{0_y\}, \{0_X\}$ и три предатома $1_x\mathbf{R}, 1_y\mathbf{R}, \mathbf{R}$. В семиэлементной решетке $\mathrm{A}_1(X)=\{\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, CP(X)\}$ ровно три атома $\mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$ и нет предатомов. Ее подрешетка $\{\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathrm{CP}(X)\}$ является диамантом, поэтому решетки $\mathrm{A}_1(X)$ и $\mathrm{A}(X)$ не модулярны.

Пример 3. Пусть $X=\{x, y\}$ – двухточечное дискретное пространство. Тогда $CP(X)=C(X)\cup 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$ и решетка $\mathrm{A}_1(X)=\{\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}, \mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \underline{\mathrm{C}}(X), C(X)\cup 1_x\mathbf{R}, C(X)\cup 1_y\mathbf{R}, C(X)\cup\{\varnothing\}, C(X)\cup 1_x\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, \mathrm{C}(X)\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}, CP(X)\}$ содержит 14 элементов, имеет четыре атома $[1_x]=\mathbf{R}\cup 1_x\mathbf{R}$, $[1_y]=\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}$, $[\varnothing]=\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}$, $\mathrm{C}(X)$ и не имеет предатомов. Как и в примере 2.2, подалгебра $(CP(X)\backslash C(X))\cup\{0_X\}$ полукольца $CP(X)$ содержит 28 подалгебр. В подалгебре $(CP(X)\backslash C(X))\cup M_x=1_x\mathbf{R}\cup 1_y\mathbf{R}\cup\{\varnothing\}\cup M_x$ содержится 10 подалгебр: M_x, $M_x\cup\{\varnothing\}$, $M_x\cup\{0_x\}$, $M_x\cup 1_x\mathbf{R}$, $M_x\cup 1_y\mathbf{R}$, $M_x\cup\{\varnothing, 0_x\}$, $M_x\cup\{\varnothing\}\cup 1_x\mathbf{R}$, $M_x\cup\{\varnothing\}\cup 1_y\mathbf{R}$, $M_x\cup\{\varnothing, 0_x\}\cup 1_y\mathbf{R}$, $(CP(X)\backslash C(X))\cup M_x$. Аналогично, подалгебра $(CP(X)\backslash C(X))\cup M_y$ включает в себя 10 подалгебр. Стало быть, всего в полукольце $CP(X)$ содержится 62 подалгебры.

Замечание 1. Пример 2 показывает, что T_0-пространства X не обязаны определяться решеткой $\mathrm{A}(X)$. Но в силу теоремы А каждое топологическое свойство любого T_1-пространства X может быть выражено на языке решетки $\mathrm{A}(X)$.

Замечание 2. Решетка подалгебр кольца $C(X)$ над двухэлементным дискретным пространством X является диамантом, поэтому она модулярна, но не дистрибутивна [6, с. 114, рис. 2]. Для трехэлементного дискретного пространства Y решетка подалгебр кольца $C(Y)$ является немодулярной 15-элементной решеткой [6, с. 114, рис. 1], изоморфной подрешетке решетки $\mathrm{A}(\mathrm{C}(X))$ над любым T_1-пространством X мощности ≥ 3.

Предложение Б [4, предложение 5]. *Для всякого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ исчерпываются подалгебрами $CP(X)\setminus C(X\setminus\{x\})$ и $(CP(X)\setminus C(X))\cup A$ для всех точек $x\in X$ и максимальных подалгебр A кольца $C(X)$.*

Предложение В. *Для любого конечного* дискретного пространства *X максимальные подалгебры кольца $C(X)$ суть в точности его максимальные идеалы $M_x=\{f\in C(X)\colon f(x)=0\}$, $x\in X$, и подалгебры с единицей $A_{x,y}=\{f\in C(X)\colon f(x)=f(y)\}$ по всем точкам $x\neq y$ из X.*

Это предложение следует из теоремы о строении алгебр n-ок действительных чисел (см., например, [6, теорема 9.3]).

Лемма А [4, лемма 4]. *Точка x не принадлежит замыканию множества Y в T_1-пространстве X тогда и только тогда, когда найдется такая функция $e\in C(Y\cup\{x\})$, что $e=0$ на Y и $e(x)=1$.*

Лемма Б [4, лемма 5]. *Подмножество Y произвольного T_1-пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки $x\in X\setminus Y$ существует такая функция $e\in C(Y\cup\{x\})$, что $e=0$ на Y и $e(x)=1$.*

Решетка $\mathrm{A}_1(X)$ подалгебр с единицей полукольца $CP(X)$

Для решеток $\mathrm{A}_1(X)$ справедлив результат, аналогичный решеткам $\mathrm{A}(X)$.

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *атомы решетки $\mathrm{A}_1(X)$ исчерпываются подалгебрами $[1_Y]$ по всем собственным подмножествам Y топологического пространства X и подалгебрами $[e]$, где функция $e\in C(X)$ принимает в точности значения 0 и 1 (то есть является нетривиальным идемпотентом кольца $C(X)$);*

2) *предатомы решетки $\mathrm{A}_1(X)$ совпадают с подалгебрами $[e]$ по всем $e\in CP(X)\setminus C(X)$, принимающим ровно два значения 0 и 1.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно.

2) Легко видеть, что $[e]$ строго содержит ровно две подалгебры с единицей: $\mathbf{R}$ и $[1_{D(e)}]$. Обратно, пусть P – предатом решетки $\mathrm{A}_1(X)$, содержащий атом $[1_Y]$, и $e\in P\setminus[1_Y]$. Имеем $[1_Y]\subset[e]=P$. Поэтому $D(e)=Y\neq\varnothing$, $e\in C(Y)$ и функция e не является константой. Если e принимает более двух значений, то подалгебра $[e^3]\neq[1_Y]$ строго содержится в $[e]=P$, что невозможно. Значит, e принимает ровно два значения и, в силу сказанного выше, можно считать эти значения равными 0 и 1.

Замечание 3. Атомы $[e]$ из пункта 1) предложения 1 существуют для несвязных топологических пространств X, и над ними нет предатомов. Атомы $[1_Y]$, $Y\subset X$, содержатся в предатомах, соответствующих – в силу пункта 2) предложения 1 – двухклассовым открыто-замкнутым разбиениям подпространств Y.

Предложение 1 позволяет описать топологию любого T_1-пространства X в терминах атомов и предатомов решетки $\mathrm{A}_1(X)$. Для этого нам потребуется ряд предварительных утверждений.

Лемма 1. *Для любых двух различных атомов $[1_Y]$ и $[1_Z]$ решетки $\mathrm{A}_1(X)$ верны следующие утверждения:*

1) $[1_Y]\vee[1_Z]=\mathbf{R}\cup[1_Y]\cup[1_Z]\cup[1_{Y\cap Z}]$;

2) *подалгебра $[1_Y]\vee[1_Z]$ содержит ровно два атома $[1_Y]$ и $[1_Z]$ тогда и только тогда, когда $Y\subset Z$ или $Z\subset Y$;*

3) *подалгебра $[1_Y]\vee[1_Z]$ содержит ровно три атома $[1_Y]$, $[1_Z]$, $[1_{Y\cap Z}]$ тогда и только тогда, когда $Y\not\subset Z$ и $Z\not\subset Y$. При этом $[1_{Y\cap Z}]=[\varnothing]$ равносильно $Y\cap Z=\varnothing$.*

Справедливость леммы 1 усматривается непосредственно.

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Для любых отличных от $[\varnothing]$ различных атомов $[1_Y]$ и $[1_Z]$ решетки $\mathrm{A}_1(X)$ включение $Y\subset Z$ равносильно существованию такого атома $[1_U]$, что подалгебра $[1_U]\vee[1_Y]$ содержит ровно три атома $[1_U]$, $[1_Y]$, $[\varnothing]$, а подалгебра $[1_U]\vee[1_Z]$ содержит два атома $[1_U]$ и $[1_Z]$.*

Лемма 3. *Для произвольного атома A решетки $\mathrm{A}_1(X)$ эквивалентны утверждения:*

1) *$A=[\varnothing]$, либо $A=[e]$ и в кольце $C(X)$ нет других нетривиальных идемпотентов кроме e и $1-e$;*

2) *$A\vee B$ содержит ровно два атома для любого атома $B\neq A$.*

Доказательство. Импликация 1)$\Rightarrow$2) вытекает из предложения 1.

2)$\Rightarrow$1). Если $A=[1_Y]$ для непустого собственного подмножества Y пространства X, то $A\vee B$ содержит три атома A, B, $[\varnothing]$ при $B=[1_{X\setminus Y}]$. Если же e, f – различные нетривиальные идемпотенты в $C(X)$ и $A=[e]$, то подалгебра $A\vee[f]$ содержит 3 или 7 атомов в зависимости от того, на 3 или 4 части открыто-замкнутые разбиения $\{e^{-1}(0), e^{-1}(1)\}$ и $\{f^{-1}(0), f^{-1}(1)\}$ делят пространство X.

Лемма 4. *Пусть X имеет более двух точек. Тогда для атома A решетки* $\mathrm{A}_1(X)$ *равенство* $A=[\varnothing]$ *равносильно тому, что для любого атома* $B\neq A$ *подалгебра* $A\vee B$ *содержит ровно два атома и не содержит предатомов.*

Доказательство. Пусть $A=[\varnothing]$ и атом $B\neq A$. Тогда $A\vee B=B\cup\{\varnothing\}$ содержит только атомы A и B и не содержит предатомов в силу предложения 1.

Обратно, пусть атом A удовлетворяет достаточному условию леммы. Тогда выполняется утверждение 1) леммы 3. Если $A=[e]$ для некоторого нетривиального идемпотента e кольца $C(X)$, $x_0\in e^{-1}(0)$ и $x_1\in e^{-1}(1)$, то при $Y=\{x_0, x_1\}$ подалгебра $A\vee[1_Y]$ содержит предатом $[f]$, где $D(f)=Y$, $f(x_0)=0$, $f(x_1)=1$. Остается воспользоваться леммой 3.

Аналогично предложению А предложение 1 и леммы 3–4 устанавливают на множестве атомов $[1_Y]$, $Y\subset X$, решетки $\mathrm{A}_1(X)$ решеточно выражаемое отношение порядка $\langle$:

$$[1_Y]\langle\ [1_Z] \Leftrightarrow Y\subseteq Z$$

для любых собственных подмножеств Y, Z топологического пространства X.

Стало быть, мы можем отождествлять атомы $[1_Y]$ решетки $\mathrm{A}_1(X)$ с подмножествами $Y\subset X$. В частности, $[1_x]\equiv\{x\}$ для любой точки x произвольного неодноточечного топологического пространства X.

Лемма 5. *Пусть Y – собственное подмножество топологического пространства X и* $x\in X\backslash Y$. *Для того чтобы точка x не принадлежала замыканию Y, необходимо и достаточно, чтобы в решетке* $\mathrm{A}_1(X)$ *существовал либо предатом P, содержащий атом* $[1_{Y\cup\{x\}}]$, *либо атом P, такие, что подалгебра* $P\vee[1_Y]$ *содержит ровно 5 подалгебр с единицей* $\mathbf{R}$, P, $[1_Y]$, $[1_{Y\cup\{x\}}]$, $P\vee[1_Y]$ *в первом случае или 4 подалгебры с единицей* $\mathbf{R}$, P, $[1_Y]$, $P\vee[1_Y]$ *– во втором случае.*

Доказательство. Если точка x не принадлежит замыканию множества Y, то по лемме А имеем: $Y=e^{-1}(0)$ и $\{x\}=e^{-1}(1)$ для подходящей функции $e\in C(Y\cup\{x\})$. Если $Y\cup\{x\}\neq X$, то в силу пункта 2) предложения 1 получаем предатом $P=[e]$ над атомом $[1_{Y\cup\{x\}}]$. Легко видеть, что подалгебра $P\vee[1_Y]$ включает в себя ровно 5 подалгебр с единицей: $\mathbf{R}$, P, $[1_Y]$, $[1_{Y\cup\{x\}}]$, $P\vee[1_Y]$. Если же $Y\cup\{x\}=X$, то в силу пункта 1) предложения 1 получаем атом $P=[e]$, для которого $P\vee[1_Y]$ содержит 4 подалгебры с единицей: $\mathbf{R}=[1_X]=[1_{Y\cup\{x\}}]$, P, $[1_Y]$ и $P\vee[1_Y]$.

Обратно, пусть выполнено достаточное условие леммы. Пусть дан предатом P, содержащий атом $[1_{Y\cup\{x\}}]$. По предложению 1, 2) $P=[e]$ для функции $e\in C(Y\cup\{x\})$ со значениями 0 и 1. Если $e^{-1}(0)\neq Y$ и $e^{-1}(0)\neq\{x\}$, то множество Z, равное $e^{-1}(0)$ или $e^{-1}(1)$, строго содержится в Y. Но тогда подалгебра $P\vee[1_Y]$ содержит также предатом Q, порожденный открыто-замкнутым разбиением $\{Z, Y\backslash Z\}$ подпространства Y, что противоречит принятому условию. Аналогично проверяется и случай атома P.

Лемма доказана.

Скажем, что T_1-пространство X *абсолютно определяется* решеткой $\mathrm{A}_1(X)$, если для любого топологического пространства Y изоморфность решеток $\mathrm{A}_1(X)$ и $\mathrm{A}_1(Y)$ влечет гомеоморфность пространств X и Y.

Теорема 1. *Произвольное* T_1*-пространство X абсолютно определяется решеткой* $\mathrm{A}_1(X)$.

Доказательство. Пусть даны T_1-пространство X и топологическое пространство Y с изоморфными решетками $\mathrm{A}_1(X)$ и $\mathrm{A}_1(Y)$. Можно считать пространства X и Y не одноточечными. Рассмотрим изоморфизм α решетки $\mathrm{A}_1(X)$ на решетку $\mathrm{A}_1(Y)$. Для любых точек $x\in X$ и $y\in Y$ положим:

$$\varphi(x)=y \Leftrightarrow \alpha([1_x])=[1_y].$$

На основании предложения 1 φ будет биекцией между множествами X и Y.

Далее покажем, что пространство Y также будет T_1-пространством. Свойство пространства Y быть T_1-пространством означает, что для любых двух различных точек $y_1, y_2\in Y$ найдется функция $g\in C(\{y_1, y_2\})$, $g(y_1)=0$ и $g(y_2,)=1$. Возьмем в Y точки $y_1\neq y_2$ и положим $x_1=\varphi^{-1}(y_1)$, $x_2=\varphi^{-1}(y_2)$. Существует функция $e\in C(\{x_1, x_2\})$, $e(x_1)=0$ и $e(x_2,)=1$. По предложению 1 $[e]$ является предатомом решетки $\mathrm{A}_1(X)$, содержащим атом $[1_{\{x1, x2\}}]$, либо атомом в случае $X=\{x_1, x_2\}$. Поэтому $\alpha([e])$ будет предатомом решетки $\mathrm{A}_1(Y)$, содержащим атом $\alpha([1_{\{x1, x2\}}])=[1_{\{y1, y2\}}]$, либо атомом при $Y=\{y_1, y_2\}$. Снова по предложению 1 $\alpha([e])=[g]$ при $g\in C(\{y_1, y_2\})$, $g(y_1)=0$ и $g(y_2,)=1$.

Для завершения доказательства заметим, что в силу лемм Б и 5 биекции φ и φ^{-1} сохраняют замкнутые множества пространств X и Y, то есть φ является гомеоморфизмом X на Y.

Предложение 2. *Для любого топологического пространства X подалгебра* $\boldsymbol{R}$ *полукольца* $\mathrm{CP}(X)$ *определяется в терминах решетки* $\mathrm{A}(X)$.

Доказательство. Предложение А на языке решетки $\mathrm{A}(X)$ дает описание отношения подчинения атомов: атом $\{0_Y\}$ подчинен атому $\{0_Z\}$, если $Y\subseteq Z$, где Y, Z – подмножества пространства X. Подчинение является порядком на множестве атомов решетки $\mathrm{A}(X)$, относительно которого атом $\{0_X\}$ будет наибольшим элементом. Рассмотрим множество Р всех предатомов решетки $\mathrm{A}(X)$, содержащих атом $\{0_X\}$. В нем предатом $\mathbf{R}=1_X\mathbf{R}$ выделяется следующим свойством на языке решетки $\mathrm{A}(X)$. Для любого атома $\{0_Y\}\neq\{0_X\}$ подалгебра $\{0_Y\}\vee\mathbf{R}=1_Y\mathbf{R}\cup\mathbf{R}$ содержит два предатома $1_Y\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}$, а для $P\in$ P$\setminus\{\mathbf{R}\}$ имеем $P=e\mathbf{R}$, где функция $e\in$ C(X) принимает ровно два значения 0 и 1, и при $Y=e^{-1}(0)$ подалгебра $\{0_Y\}\vee P=\{0_Y\}\vee P$ содержит только один предатом P.

Предложение доказано.

Отметим, что следствием теоремы 1 и предложения 2 является теорема А, тем самым, получаем новое доказательство этой теоремы определяемости.

Примеры 2 и 3 доказывают справедливость следующего утверждения:

Предложение 3. *Для любого топологического пространства X верны утверждения*:

1) *если X одноточечное, то решетки* A(X) *и* A$_1(X)$ *дистрибутивны;*
2) *если X не одноточечное, то решетки* A(X) *и* A$_1(X)$ *не модулярны.*

Данное предложение дополняет [4, предложение 3].

Следующее утверждение вытекает из предложений Б и В.

Предложение 4. *Для всякого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры полукольца* $CP(X)$ *исчерпываются подалгебрами* $CP(X)\setminus C(X\setminus\{x\})$, $(CP(X)\setminus C(X))\cup M_x$ *и* $(CP(X)\setminus C(X))\cup A_{x,y}$ *по всем точкам* $x\neq y$ *пространства X.*

Замечание 4. Легко видеть, что для любого топологического пространства X полукольцо $CP(X)$ совпадает с множеством всех (частичных) функций-констант тогда и только тогда, когда каждое двухэлементное подпространство пространства X либо антидискретно, либо является связным двоеточием. Последнее условие равносильно тому, что решетка открытых множеств (топология) топологического пространства X является цепью.

Пример 4. Пусть X – счетное множество. Упорядочим его как натуральный ряд **N** и объявим открытыми множества $\varnothing$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, …, $\{1, 2, …, n\}$, … , X, образующие топологию τ на X. Упорядочим X как множество **Z** целых чисел и положим $U_k=\{z\in \mathbf{Z}: z\leq k\}$ при $k\in\mathbf{Z}$. Множества $\varnothing$, X и U_k, $k\in\mathbf{Z}$, образуют топологию σ на X. Топологии τ и σ представляют собой неизоморфные счетные цепи относительно включения. Получаем негомеоморфные T_0-пространства $\langle X, \tau\rangle$ и $\langle X, \sigma\rangle$ с одним и тем же полукольцом $CP(X)$, состоящим – по замечанию 4 – из функций-констант на подмножествах в X. Этот пример показывает, что из изоморфизма решеток A(X) и A(Y) или A$_1(X)$ и A$_1(Y)$ над T_0-пространствами X и Y не следует, вообще говоря, гомеоморфизм самих пространств X и Y.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Сер. 1: Алгебра. Топология. Геометрия. ВИНИТИ. 1990. Т. 28. С. 3–46.
2. *Вечтомов Е. М.* Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 687–693.
3. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Определяемость T_1-пространств решеткой подалгебр полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций на них // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(22). С. 21–28.
4. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* О подалгебрах полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций // Advanced science. 2017. № 2. 0,5 п. л.
5. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций // CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications" Yekaterinburg, Russia, February 5-11, 2017. С. 20–29.
6. *Вечтомов Е. М. и др.* Элементы функциональной алгебры : в 2 т. Т. 1 / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков ; под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : ООО «Изд-во «Радуга-ПРЕСС», 2016. 384 с.
7. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : в 2 т. Т. 2 / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков ; под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : ООО «Изд-во «Радуга-ПРЕСС», 2016. 316 с.

About subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions. II

E. M. Vechtomov[1], E. N. Lubyagina[2]
[1]Doctor sciences of pfysics and mathematics, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru
[2]PhD of pfysics and mathematics, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Abstract. The article refers to the theory of semirings of continuous numerical functions developed within the framework of functional algebra. The object of the investigation is semirings CP(X) of continuous partial functions on topological spaces X with the values in the topological field **R** of real numbers. The subject of study is the subalgebras with identity of semirings CP(X). The properties of the lattices A(X) of all possible subalgebras and $A_1(X)$ of all subalgebras with identity of semirings CP(X) over topological spaces X are considered. The structure of atoms and pre-atoms in lattices $A_1(X)$ is clarified. This allowed us to solve the problem of the determinability of T_1-spaces X by the lattice $A_1(X)$: any T_1-space X is uniquely determined up to a homeomorphism by the lattice $A_1(X)$ in the class of all topological spaces. As a corollary, we obtained a result from the previous work of the authors about the absolute definability of T_1-spaces X by the lattice A(X).

Keywords: semiring of continuous partial real-valued functions, subalgebra, subalgebra with identity, lattice of subalgebras, definability.

References

1. *Vechtomov E. M. Voprosy opredelyaemosti topologicheskih prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnyh funkcij* [Problems of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions] // *Itogi nauki i tekhniki. Ser. 1: Algebra. Topologiya. Geometriya* – Results of science and technology. Ser. 1: Algebra. Topology. Geometry. All-Russian Institute of scientific and technical information. 1990. Vol. 28. Pp. 3–46.

2. *Vechtomov E. M. Reshetka podalgebr kolec nepreryvnyh funkcij i h'yuittovskie prostranstva* [Lattice of subalgebras of rings of continuous functions and Hewitt spaces] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1997, vol. 62, No. 5, pp. 687–693.

3. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Opredelyaemost' T1-prostranstv reshetkoj podalgebr polukolec nepreryvnyh chastichnyh dejstvitel'noznachnyh funkcij na nih* [Definability of T_1-spaces of the lattice of subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions on them] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2017, vol. 1 (22), pp. 21–28.

4. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. O podalgebrah polukolec nepreryvnyh chastichnyh dejstvitel'noznachnyh funkcij* [On subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions] // *Advanced science* – Advanced science. 2017, No. 2, 0.5 p.p.

5. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Polukol'ca nepreryvnyh chastichnyh dejstvitel'noznachnyh funkcij* [Semirings of continuous partial real valued functions] // CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications" Yekaterinburg, Russia, February 5–11, 2017. Pp. 20–29.

6. *Vechtomov E. M. etc. EHlementy funkcional'noj algebry : v 2 t. T. 1*[Elements of functional algebra: in 2 vol. Vol. 1] / E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov; ed. by E. M. Vechtomov. Kirov: LLC "Publishing house "Raduga-PRESS". 2016. 384 p.

7. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., CHuprakov D. V. EHlementy funkcional'noj algebry : v 2 t. T. 2* [Elements of functional algebra: in 2 vol. Vol. 2] / E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov; ed. by E. M. Vechtomov. Kirov: LLC "Publishing house "Raduga-PRESS". 2016. 316 p.