УДК 512 doi: 10.25730/VSU.0536.18.013

Особенности изучения групп диэдра и их подгрупп на спецкурсе по теории групп

Е. В. Евсюкова
кандидат педагогических наук, доцент, Тобольский педагогический институт им. Д. И. Менделеева (филиал) ТюмГУ. Россия, г. Тобольск. Email: l-evsjukova@rambler.ru

Аннотация. Группы преобразований плоскости и пространства являются одним из наиболее наглядных примеров групп преобразований. Идея инвариантности некоторой конфигурации относительно определенной группы преобразований пришла из кристаллографии. Первым шагом в этом направлении является изучение групп симметрий плоских и пространственных фигур. В статье рассматриваются диэдральные группы подстановок, их нормальные циклические подгруппы, предложены геометрические схемы данных групп, позволяющие наглядно представлять изучаемые факты и способствующие их осознанному восприятию. Представлено доказательство двух теорем о строении элементов группы C_n. Элементы групп диэдра выражаются через элементы неприводимых систем образующих данных групп, что значительно упрощает доказательства теорем и сопутствующие вычисления, позволяет применить изученные факты для решения практических задач. Рассмотренные результаты могут быть использованы для организации исследовательской деятельности студентов, проектирования элективных курсов магистрантами математических направлений подготовки.

Ключевые слова: преобразование, диэдральная группа подстановок, система образующих, граф, строение элементов диэдральной группы.

Историко-методологические вопросы изучения теории групп, группы преобразований и подстановок подробно описаны в книгах [1; 3; 5]. На спецкурсах, в дипломных работах студенты и магистранты математических направлений подготовки изучают группы преобразований и подстановок, применяют изученные факты в различных областях математики, в решениях практических задач и при проектировании элективных курсов по математике для профильной школы [6; 7; 9]. В статьях [2; 8] описываются цели, принципы отбора и краткое содержание учебного материала для элективного курса.

1. Группа диэдра D_3

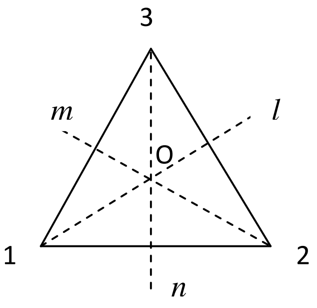

Рис. 1

Рассмотрим правильный треугольник (рис. 1). Центр правильного треугольника (точка O) является центром симметрии. Повороты P^0, $P^{\frac{2\pi}{3}}$, $P^{\frac{4\pi}{3}}$ на углы 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ соответственно вокруг точки O против часовой стрелки переводят треугольник в себя. Кроме того, имеется три осевых симметрии S_l, S_m, S_n, определяемых осями симметрии l, m, n, проходящими через вершины правильного треугольника и середины его противоположных сторон. Совокупность преобразований P^0, $P^{\frac{2\pi}{3}}$, $P^{\frac{4\pi}{3}}$, S_l, S_m, S_n треугольника в себя образует группу относительно композиции (умножения) преобразований. Удобно рассмотренные геометрические преобразования описывать подстановками. Занумеруем вершины правильного треугольника числами 1, 2, 3 и опишем каждое его преобразование подстановкой на множестве вершин треугольника $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) \end{pmatrix}$, где $\varphi(k)$ – номер места, которое после выполнения соответствующего преобразования заняла вершина k $(k \in \{1, 2, 3\})$. В результате получаем соответствие между самосовмещениями треугольника и подстановками множества вершин треугольника:

$$P^0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon, P^{\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3), P^{\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1,3,2),$$

$$S_l \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3), \quad S_m \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3), \quad S_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2).$$

Группа симметрий правильного треугольника изоморфна симметрической группе подстановок $\mathbf{S}_3$. Подстановки в дальнейшем будем записывать в циклической форме записи: $\mathbf{S}_3 = \{\varepsilon, (1,2,3), (1, 3, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 2)\}$. Правило умножения подстановок: $\forall a \epsilon \{1, 2, 3, \dots, n\}\ \psi \cdot \varphi(a) = \psi(\varphi(a))$ В произведении первый сомножитель φ пишется справа, а второй ψ – слева.

Геометрическим эквивалентом группы и одним из способов ее наглядного представления является граф. Граф группы невозможно построить без знания ее неприводимой системы образующих [4].

Множество H называется *системой образующих группы* $<G,\cdot>$, если

$(\forall\, g \epsilon\, G)\ (\exists h_1, h_2, \ldots, h_n\ \epsilon\ H)\ (\ \exists k_1, k_2, \ldots, k_n \in \{-1, 1\})g = h_1^{k_1} \cdot h_2^{k_2}\ \cdot \ldots \cdot\cdot\, h_n^{k_n}$

Система образующих H группы G называется *неприводимой*, если никакая ее подсистема не является для группы G ее системой образующих.

План построения графа конечной группы малого порядка [9]:

1) находим для данной группы неприводимую систему образующих;

2) каждому элементу группы ставим в соответствие вершину графа;

3) строим таблицу умножения элементов группы на образующие элементы;

4) опираясь на таблицу, строим граф группы, соединяя вершины графа стрелками разного типа (каждому элементу h из неприводимой системы образующих соответствует стрелка определенного вида); стрелка выходит из вершины графа, изображающей элемент g данной группы, и приходит в вершину, изображающую элемент $h \cdot g$, где g является первым сомножителем, а h является вторым сомножителем (причем различные стрелки графа не должны пересекаться, но могут иметь общие начало или конец).

В качестве неприводимой системы образующих группы симметрий правильного треугольника, представленных подстановками (она называется группой диэдра D_6), выберем подстановки $\alpha = (1, 2, 3)$ и $\beta = (1)(2, 3) = (2, 3)$. Подстановка α задает поворот правильного треугольника на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг его центра против часовой стрелки в плоскости того треугольника, а β задает осевую симметрию относительно оси l (рис. 1). Все остальные элементы группы диэдра D_6 выразим через образующие элементы α и β:

$$D_6\ = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3 = \varepsilon, \beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2\},\ \beta^2 =\ \varepsilon, \alpha \cdot \beta =\ \beta \cdot\ \alpha^2.$$

Подстановки $\alpha^3 = \varepsilon, \alpha, \alpha^2$ задают повороты правильного треугольника вокруг его центра против часовой стрелки на углы 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. $C_3 = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2\}$ образует циклическую подгруппу в группе D_6. Подстановки $\beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2$ задают осевые симметрии с осями l, m, n соответственно. Вычислим произведения элементов группы D_6 на образующие элементы α и β (табл. 1) и построим граф группы D_6 (рис. 2).

Таблица 1

$\cdot$	α	β
ε	α	β
α	α^2	$\beta \cdot \alpha$
α^2	ε	$\beta \cdot \alpha^2$
β	$\beta \cdot \alpha^2$	ε
$\beta \cdot \alpha$	β	α
$\beta \cdot \alpha^2$	$\beta \cdot \alpha$	α^2

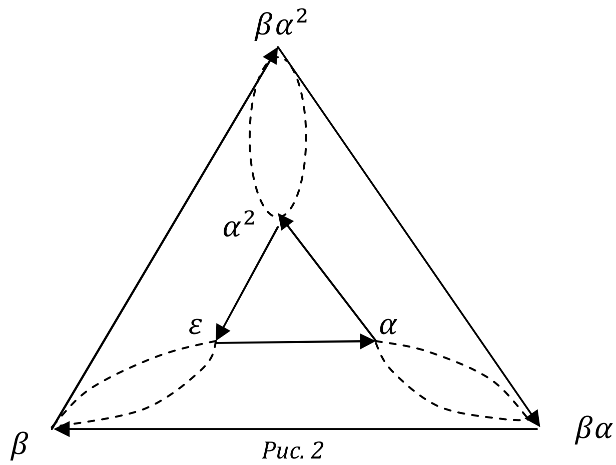

Рис. 2

На графе (рис. 2) переход от элемента g к элементу $\alpha \cdot g$ происходит по сплошной стрелке, а переход от элемента g к элементу $\beta \cdot g$ происходит по пунктирной стрелке.

2. Группы диэдра D_{2n}. В статье [9] рассмотрена группа диэдра

$$D_8\ = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 = \varepsilon, \beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2, \beta \cdot \alpha^3\}, \text{ где } \alpha = (1,2,3,4), \beta = (2,4),$$

построена таблица умножения элементов D_8 на ее образующие элементы α и β и построен граф D_8. Выбранный нами способ задания элементов группы диэдра в рассмотренных двух случаях поддается обобщению. Занумеруем вершины правильного n-угольника числами 1, 2, …, n. Элементы группы симметрий правильного n-угольника, представленных подстановками (группы диэдра D_{2n}), можно перечислить, используя в качестве неприводимой системы образующих подстановки $\alpha = (1, 2, 3, \ldots, n)$ и

$$\beta = \begin{cases} (1)(2,n)(3,n-1)\dots\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+2\right)\left(\frac{n}{2}+1\right), n = 2m, m\epsilon N/\{1\}, \\ (1)(2,n)(3,n-1)\dots\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}\right), n = 2m-1, m\epsilon N/\{1\}. \end{cases}$$

$$D_{2n} = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n = \varepsilon, \beta, \beta\cdot\alpha, \beta\cdot\alpha^2, \dots, \beta\cdot\alpha^{n-1}\},$$

где $\beta^2 = \varepsilon$, $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha^{n-1}$.

Подстановка α соответствует повороту правильного n-угольника на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг его центра против часовой стрелки в плоскости этого треугольника, подстановка β соответствует осевой симметрии относительно оси, проходящей через вершину 1 и центр правильного n-угольника.

$C_n = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ – группа поворотов правильного n-угольника вокруг его центра против часовой стрелки на углы 0, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$,..., $\frac{2(n-1)\pi}{n}$ соответственно, представленная подстановками. C_n является нормальной циклической подгруппой в D_{2n}. Преобразования, заданные подстановками $\beta, \beta\cdot\alpha, \beta\cdot\alpha^2, \dots, \beta\cdot\alpha^{n-1}$, соответствуют осевым симметриям с осями, проходящими через центр правильного n-угольника, порядок каждого из этих элементов равен 2.

Общий способ построения графа группы диэдра D_{2n} описан в статье [9].

3. Геометрические схемы групп диэдра и их подгрупп

Таблица 2

Группы подстановок	Соответствующие изоморфные группы		
$C_3 = A_3$	Группа поворотов правильного треугольника	Группа поворотов двойной правильной треугольной пирамиды	Группа поворотов правильного двухмерного симплекса с тремя вершинами
$D_6 = S_3$	Группа симметрий правильного треугольника	Группа симметрий двойной правильной треугольной пирамиды	Группа симметрий правильного двухмерного симплекса с тремя вершинами
D_8	Группа симметрий квадрата	Группа симметрий двойной правильной четырехугольной пирамиды	нет
D_{2n}	Группа симметрий правильного n-угольника	Группа симметрий двойной правильной n-угольной пирамиды	нет (при n > 3)
C_n	Группа поворотов правильного n-угольника	Группа поворотов двойной правильной n-угольной пирамиды	нет (при n > 3)

Дополнительные сведения можно найти в книге [10].

4. Строение элементов C_n. Наименьшее натуральное число n, такое, что $a^n = e$ называется *порядком элемента a* группы <G, · > и обозначается $|a| = n$.

Известно [5]:

1. $a^t = e \to t \vdots |a|$.

2. $\alpha = (1,2,\dots,n), |\alpha| = n$, т. е. порядком цикла является его длина.

3. Пусть $\varphi = c_1\cdot c_2\cdot\dots\cdot c_s$, где $c_1, c_2, \dots, c_s$ – независимые циклы, тогда $|\varphi| =$ НОК[$l(c_1), l(c_2), \dots, l(c_s)$], где символом $l(c_i)$ обозначена длина цикла c_i.

Теорема 1. *Если* $\alpha = (1,2,\dots,n), \left|\alpha^k\right| = l, k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, НОД $(k,n) = d$, то $l = \frac{n}{d}$.

Доказательство. $\left|\alpha^k\right| = l$, поэтому $(\alpha^k)^l = \alpha^{kl} = \varepsilon$ и $(k\cdot l) \vdots n$. НОД $(k,n) = d$, тогда $(\exists k_1, n_1 \epsilon N)$ $k = k_1\cdot d, n = n_1\cdot d$, где НОД (k_1, n_1) = 1. Так как $(k\cdot l) \vdots n$, то $(k_1\cdot d\cdot l) \vdots (n_1\cdot d)$, поэтому $(k_1\cdot l) \vdots n_1$. Поскольку НОД (k_1, n_1) = 1, получаем $l \vdots n_1$. Воспользуемся тем, что порядок цикла α равен его длине n, получим:

$$(\alpha^k)^{n_1} = \alpha^{k\cdot n_1} = \alpha^{(k_1\cdot d)\cdot n_1} = \alpha^{k_1(d\cdot n_1)} = \alpha^{k_1\cdot n} = (\alpha^n)^{k_1} = (\varepsilon)^{k_1} = \varepsilon .$$

По условию $\left|\alpha^k\right| = l$, поэтому $n_1 \vdots l$. Учитывая, что $l \vdots n_1$ получим $l = n_1 = \frac{n}{d}$.

Теорема 2. Если $\alpha = (1,2,\dots,n)$, то элемент $\alpha^k \in C_n$ является произведением d независимых циклов длины $\frac{n}{d}$, где $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $d =$ НОД (k,n).

Доказательство. Если $k = n$, то теорема справедлива. Методом от противного докажем, что при $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ подстановка α^k не имеет неподвижных элементов. Предположим противное. Пусть $\alpha^k(a) = a$. Поскольку $\alpha(a) = a+1$ для $a \in \{1,2,\dots,n-1\}$ и $\alpha(n) = 1$, то $\alpha^k(a) = a \equiv a + k(mod\ n)$, т. е. $k \vdots n$, что невозможно, так как $k < n$.

Если $\alpha^k = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_s$ – произведение независимых циклов, длины которых $l(c_1), l(c_2), \ldots, l(c_s)$, причем $l(c_1) \le l(c_2) \le \ldots \le l(c_s)$, то после возведения в степень $l = l(c_1)$ обеих частей равенства имеем:

$(\alpha^k)^l = \alpha^{kl} = (c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_s)^l = (c_1)^l \cdot (c_2)^l \cdot \ldots \cdot (c_s)^l = \varepsilon \cdot (c_2)^l \cdot \ldots \cdot (c_s)^l$– подстановка с неподвижными элементами из цикла c_1. Поэтому $(k \cdot l) \vdots n$ и $(\exists t \in N)$ $k \cdot l = n \cdot t$. Тогда $\alpha^{kl} = \alpha^{nt} = (\alpha^n)^t = \varepsilon^t = \varepsilon$, следовательно,

$\alpha^{kl} = (c_1)^l \cdot (c_2)^l \cdot \ldots \cdot (c_s)^l = \varepsilon \leftrightarrow (c_i)^l = \varepsilon$ (при $i \in \{1, 2 \ldots, s\}$), так как все циклы $c_1, c_2, \ldots, c_s$ независимые. $|c_i| = l(c_i)$, тогда имеем $l \vdots l(c_i)$, но $l = l(c_1) \le l(c_2) \le \ldots \le l(c_s)$, а это возможно, лишь когда имеет место равенство $l = l(c_1) = l(c_2) = \cdots = l(c_s)$. Кроме того, $|\alpha^k| = \text{НОК}[\, l(c_1), l(c_2), \ldots, l(c_s)] = l$

По теореме 1 имеем: $l = \frac{n}{d}$, где $d = \text{НОД}\,(k, n)$, отсюда $d = \frac{n}{l}$.

Ранее доказано, что подстановка α^k не имеет неподвижных элементов, поэтому количество символов $n = l(c_1) + l(c_2) + \ldots + l(c_s) = s \cdot l$, следовательно, $s = \frac{n}{l} = d$.

Следствие. Среди элементов подгруппы $C_n = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ для каждого делителя d числа n (и только для них) имеем ровно $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ подстановок, разлагающихся в d независимых циклов.

В [9] сформулированы теоремы о строении элементов $D_{2n} \setminus C_n$, сформулированы и решены комбинаторные задачи, решаемые с помощью изложенных теоретических фактов.

Список литературы

1. *Александров П. С.* Введение в теорию групп (библиотечка «Квант»). М. : Наука, 1980 . 143 с.
2. *Азанова Т. Р., Евсюкова Е. В.* Элективный курс «Группы симметрий геометрических фигур и группы подстановок» в профильной школе // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 15 : периодич. межвуз. сб. науч. метод. работ. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. С. 150–153.
3. *Вечтомов Е. М.* Историко-методологические вопросы при изучении теории групп // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 9. 2007. С. 5–22.
4. *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы. М. : Мир, 1971. 247 с.
5. *Евсюкова Е. В.* Введение в теорию групп : учеб.-метод. пособие для студ. физико-матем. специальностей. Тобольск, 2010. 153 с.
6. *Евсюкова Е. В.* Исследовательские задачи в обучении дисциплине «Основные алгебраические структуры» // Наука и образование в XXI веке : сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. 30 сентября 2013 г. Ч. 28. Тамбов, 2013. С. 50–51.
7. *Евсюкова Е. В.* Организация учебно-исследовательской деятельности будущих учителей математики в процессе изучения основ теории групп // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 16 : периодич. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2014. С. 143–147.
8. *Евсюкова Е. В.* Изучение групп движений в старших классах профильной школы // Преподавание математики, физики, информатики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики : материалы Всерос. науч. практ. конф. Глазов : Изд-во ООО «Глазов. тип.», 2015. С. 43–48.
9. *Евсюкова Е. В., Савицкас Е. С.* Представление групп диэдра подстановками // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 17 : период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. С. 119–125.
10. *Сосинский А. Б.* Геометрии / пер. с англ. Б. Р. Френкина. М.. : МЦИНО, 2017. 263 с.

Peculiarities of studying dihedral groups and their subgroups on a special course on group theory

E. V. Evsjukova

PhD of pedagogical sciences, associate professor D. Mendeleev Tobolsk Pedagogical Institute (Tyumen State University branch). Russia. Tobolsk. E-mail: l-evsjukova@rambler.ru

Abstract. Groups of plane and space transformations are one of the most obvious examples of transformation groups. The idea of the invariance of some configuration with respect to a certain group of transformations came from crystallography. The first step in this direction is the study of symmetry groups of planar and three dimensional figures. The paper considers dihedral groups of permutations, their normal cyclic subgroups, geometric schemes of these groups are proposed, which make it possible to visually represent the facts studied and contribute to their conscious perception. A proof of two theorems on the structure of the elements of the group C_n is presented. Elements of dihedral groups are expressed in terms of elements of irreducible systems of generators of these groups, which greatly simplifies the proofs of theorems and computational calculations, allows us to apply the facts studied to solve practical prob-

lems. The considered results can be used for organization of research activity of students, designing elective courses by undergraduates of mathematical directions of preparation.

Keywords: transformation, the dihedral group of permutations, the generating system, structure of dihedral group elements.

References

1. *Aleksandrov P. S. Vvedenie v teoriyu grupp (bibliotechka «Kvant»)* [Introduction to the theory of groups (library "Quantum")]. M. Science, 1980 . 143 p.

2. *Azanova T. R., Evsyukova E. V. EHlektivnyj kurs «Gruppy simmetrij geometricheskih figur i gruppy podstanovok» v profil'noj shkole* [Elective course "Groups of symmetries of geometric figures and groups of substitutions" in profile school] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 15: periodical inter-univers. Coll. Of scient.-method. works. Kirov: Publishing house LLC "Raduga-PRESS". 2013. Pp. 150–153.

3. *Vechtomov E. M. Istoriko-metodologicheskie voprosy pri izuchenii teorii grupp* [Historical and methodological issues in the study of theory of groups] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 9. 2007. Pp. 5–22.

4. *Grossman I., Magnus V. Gruppy i ih grafy* [Groups and their graphs]. M. Mir. 1971. 247 p.

5. *Evsyukova E. V. Vvedenie v teoriyu grupp : ucheb.-metod. posobie dlya stud. fiziko-matem. special'nostej* [Introduction to group theory of groups: tutorial for students of physics-math. specialties]. Tobolsk. 2010. 153 p.

6. *Evsyukova E. V. Issledovatel'skie zadachi v obuchenii discipline «Osnovnye algebraicheskie struktury»* [Research problems in teaching the discipline "Basic algebraic structures"] // *Nauka i obrazovanie v XXI veke : sb. nauch. tr. po materialam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 30 sentyabrya 2013 g.* – Science and education in the XXI century: coll. of scient. works according to the materials of international scientific- prakt. conf. 30 September 2013. Pt. 28. Tambov. 2013. Pp. 50–51.

7. *Evsyukova E. V. Organizaciya uchebno-issledovatel'skoj deyatel'nosti budushchih uchitelej matematiki v processe izucheniya osnov teorii grupp* [Organization of educational and research activities of future teachers of mathematics in the process of studying the basics of theory of groups] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona. Vyp. 16 : periodich. mezhvuz. sb. nauch.-metod. rabot* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 16: periodical inter-university coll. of scient.-method. works. Kirov. Publishing house LLC "Raduga-PRESS". 2014. Pp. 143–147.

8. *Evsyukova E. V. Izuchenie grupp dvizhenij v starshih klassah profil'noj shkoly* [Study of groups of movements in high school profile] // *Prepodavanie matematiki, fiziki, informatiki v vuzah i shkolah: problemy soderzhaniya, tekhnologii i metodiki : materialy Vseros. nauch. prakt. konf.* – Teaching mathematics, physics, computer science in universities and schools: problems of content, technology and methods: materials of All-Russia scientific pract. conf. Glazov. Publishing house "Glazov typ.". 2015. Pp. 43–48.

9. *Evsyukova E. V., Savickas E. S. Predstavlenie grupp diehdra podstanovkami* [Representation of groups by permutations diedre] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona. Vyp. 17 : period. mezhvuz. sb. nauch.-metod. rabot* – Mathematical herald of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 17: period. inter-univ. coll. of scient.-method. works. Kirov. Publishing house LLC "Raduga-PRESS". 2015. Pp. 119–125.

10. *Sosinskij A. B. Geometrii*. [Geometries] / transl. from English by B. R. Frenkin. M. MCISS. 2017. 263 p.