

Бутстреп методы оценки положения зон разрушения в модели сжатого массива горных пород*

А. С. Лосев

кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук. Россия, г. Владивосток.
E-mail: A.S.Losev@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе бутстреп методами проводится статистическое обоснование и выбор модели, характеризующей вид зависимости расположения первой зоны разрушения от предела прочности в задаче зональной дезинтеграции горных пород вокруг глубоких подземных выработок, в условиях рассмотрения предельно малой выборки натуральных данных. В качестве оценки исследуемой зависимости выступает коэффициент детерминации, значение которого определяется через ранее разработанный алгоритм построения доверительного интервала коэффициента детерминации. Проведен сравнительный анализ полученных доверительных интервалов традиционными и бутстреп методами. Получена оценка отклонения коэффициента детерминации от границ его бутстреп доверительного интервала в зависимости от размерности бутстреп выборки. Подтверждена статистическая значимость модели линейного вида зависимости расположения первой зоны разрушения от предела прочности.

Ключевые слова: бутстреп методы, алгоритм, зональные разрушения, доверительный интервал.

Исследования зонального разрушения массива горной породы вокруг выработки в условиях сильного сжатия отличаются высокой сложностью и разнообразием используемых методов [2; 5; 9]. Общее стремление исследователей в данной области направлено на выявление законов, характеризующих геомеханические явления. Однако высокая себестоимость новых месторождений не позволяет оперировать большими объемами данных, что сильно осложняет получение аналитических результатов.

В качестве возможного решения проблемы предлагается использовать методы численного ресамплинга, позволяющие расширять объемы выборки в несколько раз [10]. В частности, в работе [6] автором используются бутстреп методы при исследовании аналитической зависимости параметра периодичности функции дефектности от положения зон разрушения в задаче дезинтеграции горных пород. Полученный результат имеет существенное преимущество по сравнению с традиционными подходами, его качество напрямую зависит от числа бутстреп реализаций и объема бутстреп выборки, что особенно значимо в работе с предельно маленькой выборкой.

В настоящей работе с помощью бутстреп методов проводится статистическое обоснование аналитической зависимости расположения середины первой зоны разрушения от предела прочности. Определена наиболее значимая модель, характеризующая рассматриваемую зависимость.

Обратимся к задаче о распределении поля напряжений вокруг выработки круглого сечения, которая рассматривается как плоская и стационарная, в условиях несжимаемости и гидростатичности нагружения на бесконечности:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0.$$

Бигармоническое уравнение для функции дефектности определено как

$$\Delta^2 R - \gamma^2 R = 0,$$

и граничные условия

$$R|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r}|_{r=r_0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0,$$

где σ_{rr} – нормальное радиальное напряжение, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – нормальное тангенциальное напряжение, Δ – оператор Лапласа, γ – параметр периодичности модели. Решение для расстояния от центра выработки до точки массива определено в виде:

$$R(r) = aJ_0(\sqrt{\gamma r}) + bN_0(\sqrt{\gamma r}) + cK_0(\sqrt{\gamma r}),$$

где J_0, N_0, K_0 – функции Бесселя, Неймана и Макдональда нулевого порядка [3].

Ранее в работах [7; 8] автор исследовал параметр периодичности функции дефектности, определение которого позволяет осуществлять прогноз в разработках последующих месторождений. Методами статистического анализа на основе натуральных данных построена регрессионная модель, отражающая экспоненциальную зависимость параметра периодичности от положения середины первой зоны разрушения. Установлено, что расположение зон разрушения экспоненциально зависит от предела прочности породы. Определен числовой диапазон значений предела прочности породы, при котором параметр периодичности определяется с высоким уровнем достоверности.

В работе [4] установлено, что зависимость положения середины первой зоны разрушения, измеряемой в относительных к радиусу выработок единицах – r^* , от предела прочности породы на одноосное сжатие – σ , выражается в аналитической зависимости линейного вида:

$$r^* = 0,008\sigma + 0,757.$$

В работе [7] автором получена альтернативная модель данной зависимости нелинейного вида:

$$r^* = 0,8133\exp(0,0061\sigma).$$

Небольшая разница в соответствующих значениях коэффициентов детерминации R рассмотренных моделей (99,12% – линейный, 98,18% – нелинейный) и предельно маленькая выборка натуральных данных не позволяют однозначно определить более приемлемую модель. Поэтому вопрос уточнения раннее полученного результата является актуальным. Проведем уточнение данной статистической оценки значимости полученной модели с помощью бутстреп алгоритма построения доверительного интервала коэффициента детерминации, описанного в работе [6].

Обозначим данные о положении середины первой зоны разрушения и пределе прочности породы через множество $Z = \{z_i | z_i = (r_i, \sigma_i)\}, i = 1, \dots, 5$. Положим число бутстреп реализаций $B = 10^5$ и уровень значимости $\alpha = 0,1$.

Бутстреп алгоритм построения доверительного интервала коэффициента детерминации

Шаг 1. Генератором случайных чисел построим бутстреп выборку объемом n элементов, вытягивая на каждом шаге элементы из множества Z с повторением случайным образом и формируя из них выборку вида:

$$\{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\}_1 \text{ где } z_j^* \in Z, j = 1, \dots, n.$$

Шаг 2. Рассчитаем для полученной выборки бутстреп оценку коэффициента детерминации \tilde{R}_1^* .

Шаг 3. Повторим предыдущие шаги B раз, сформировав в результате набор коэффициента детерминации $\tilde{R}_1^*, \tilde{R}_2^*, \dots, \tilde{R}_B^*$.

Шаг 4. Отсортируем набор коэффициента детерминации $\tilde{R}_1^*, \tilde{R}_2^*, \dots, \tilde{R}_B^*$ в порядке возрастания.

Шаг 5. Определим доверительный интервал бутстреп распределения по формуле

$$\tilde{R}_{\frac{B \cdot \alpha}{2}}^* \leq \tilde{R}^*(n, \alpha) \leq \tilde{R}_{B \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}^*.$$

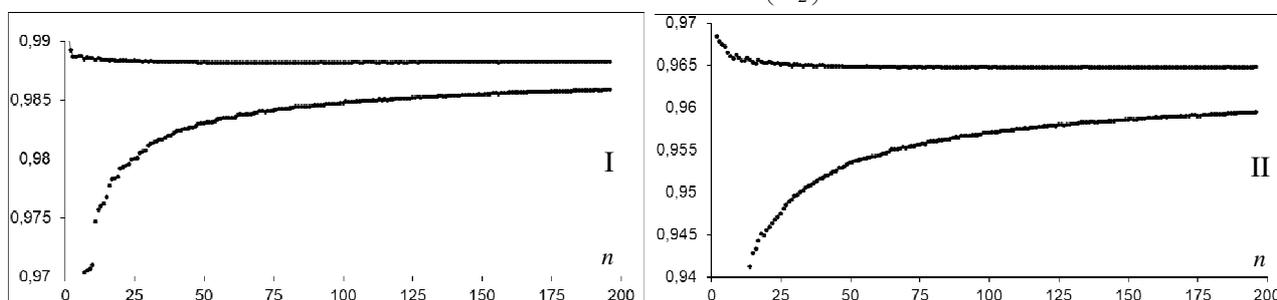


Рис. 1. Бутстреп интервалы коэффициента детерминации при $\alpha = 0,1$
(I – линейная модель, II – нелинейная модель)

Проведем сравнительный анализ построенных доверительных интервалов бутстреп методом (рис. 1) с традиционным подходом

$$\left(\sqrt{R} - t_{\alpha} \sqrt{\frac{1-R}{n-2}} \right)^2 \leq R \leq \left(\sqrt{R} + t_{\alpha} \sqrt{\frac{1-R}{n-2}} \right)^2, \quad (1)$$

где t_{α} – табличное значение t -критерия Стьюдента при заданном уровне значимости [1].

В результате доверительные интервалы, полученные традиционным способом (1), уже на малых бутстреп выборках больше бутстреп интервалов в 31 и 53 раза соответственно (таблица). В линейной модели, при максимальной бутстреп выборке, доверительный интервал в 133,3 раза длиннее бутстреп интервала, в нелинейной – 62,5 раза.

Сравнительная таблица доверительных и бутстреп интервалов

Модель	Доверительный интервал	Бутстреп интервал		Отношение длин интервалов
		n	Интервал	
Линейная	[0,7334; 1]	$n=50$	[0,983; 0,988]	53,3
		$n=100$	[0,985; 0,988]	88,9
		$n=150$	[0,985; 0,988]	88,9
		$n=200$	[0,986; 0,988]	133,3
Нелинейная	[0,6252; 1]	$n=50$	[0,953; 0,965]	31,2
		$n=100$	[0,957; 0,965]	46,9
		$n=150$	[0,958; 0,965]	53,5
		$n=200$	[0,959; 0,965]	62,5

Анализ данных, выраженных в процентном соотношении бутстреп полуинтервала от его середины (рис. 2), показал, что отклонение коэффициента детерминации в линейной модели стабильно не превышает 0,5% при $n \geq 25$, в то время как в нелинейной модели данный результат достигается только при $n > 100$.

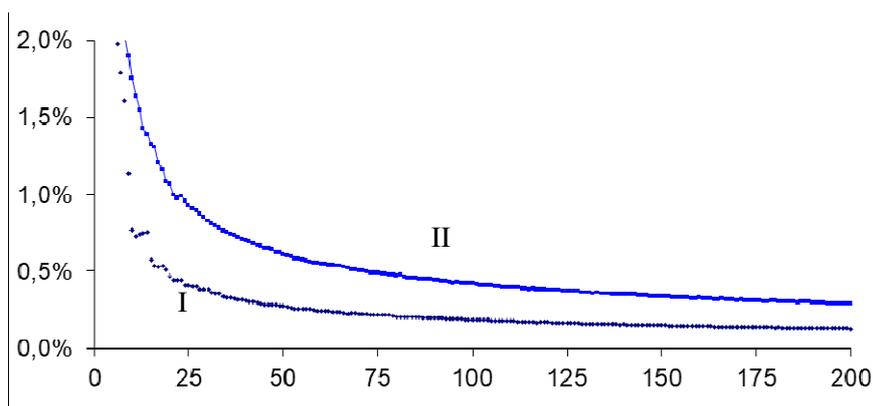


Рис. 2. Зависимость отклонения оценки коэффициента детерминации от границ бутстреп интервала от размерности бутстреп выборки (I – линейная модель, II – нелинейная модель)

Таким образом, можно утверждать, что линейная модель, характеризующая зависимость положения середины первой зоны разрушения от предела прочности породы, наиболее значима и статистически обоснована из числа рассмотренных. Интерес представляет дальнейший сравнительный анализ с другими возможными моделями. В данном случае использование бутстреп методов оценки различных характеристик в исследовании геомеханических явлений и процессов в массивах горных пород имеет существенное преимущество по сравнению с традиционными подходами, так как отсутствие заданного уровня статистической обоснованности из-за рассмотрения предельно малой выборки компенсируется высоким числом бутстреп реализаций и объемом бутстреп выборки.

Список литературы

1. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М. : Финансы и статистика, 1985. 487 с.
2. Гузев М. А., Макаров В. В. Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. Владивосток : Дальнаука, 2007. 232 с.
3. Гузев М. А., Парошин А. А. Неевклидова модель зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42. № 1. С. 147–156.
4. Ксендзенко Л. С. Разработка метода определения параметров зональной структуры разрушения сильно сжатого массива вокруг подземных выработок // Вестник Дальневосточного государственного технического университета. 2011. № 3/4(8/9). С. 144–166.

5. Ксендзенко Л. С., Макаров В. В., Опанасюк Н. А., Голосов А. М. Закономерности деформирования и разрушения сильно сжатых горных пород и массивов : монография / Инженерная школа ДВФУ. Владивосток : Дальневост. федер. ун-т, 2014. 192 с.

6. Лосев А. С. Бутстреп методы построения доверительных интервалов оценки параметров модели зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017. № 44(4). С. 114–121.

7. Лосев А. С. Зависимость зоны разрушения массива вокруг горной выработки от предела прочности породы // Горные науки и технологии. 2017. № 2. С. 43–49.

8. Лосев А. С. Статистическая оценка параметра периодичности модели зональной дезинтеграции горных пород // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. № 7(20). С. 78–82.

9. Макаров П. В. Об иерархической природе деформации и разрушения твердых тел и сред // Физ. мезомех. 2004. Т. 7. № 4. С. 25–34.

10. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М. : Финансы и статистика, 1988. 263 с.

Bootstrap methods for assessing the position of fracture zones in a model compressed massive of rocks

A. S. Losev

candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher of the Institute of Applied Mathematics of the Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences. Russia, Vladivostok.

E-mail: A.S.Losev@yandex.ru

Abstract. In this paper, bootstrap methods are the way to carry out statistical justification and selection of a model that characterizes the type of dependence of the location of the first fracture zone on the tensile strength in the problem of zonal disintegration of rocks around deep underground workings, in the conditions of consideration of a very small sample of field data. As an assessment of the dependence under study there is the coefficient of determination the value of which is determined through a previously developed algorithm for constructing the confidence interval of the coefficient of determination. A comparative analysis of the confidence intervals obtained by traditional and bootstrap methods is carried out. The estimation of the deviation of the coefficient of determination from the boundaries of its bootstrap confidence interval, depending on the dimension of the bootstrap sample is obtained. The statistical significance of the linear model of the dependence of the location of the first fracture zone on the tensile strength is confirmed.

Keywords: bootstrap methods, algorithm, zonal destruction, confidence interval.

References

1. Ajvazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika. Issledovanie zavisimostej* [Applied statistics. The study of dependencies]. M. Finance and statistics. 1985. 487 p.

2. Guzev M. A., Makarov V. V. *Deformirovanie i razrushenie sil'no szhatyh gornyh porod vokrug vyrabotok*. [Deformation and destruction of strongly compressed rocks around excavations]. Vladivostok. Dal'nauka. 2007. 232 p.

3. Guzev M. A., Paroshin A. A. *Neevklidova model' zonal'noj dezintegracii gornyh porod vokrug podzemnoj vyrabotki* [Non-Euclidean model of zonal disintegration of rocks around underground mines] // *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* – Applied mechanics and technical physics. 2001, vol. 42, No. 1, pp. 147–156.

4. Ksendzenko L. S. *Razrabotka metoda opredeleniya parametrov zonal'noj struktury razrusheniya sil'no szhatogo massiva vokrug podzemnyh vyrabotok* [Development of a method for determining the parameters of the zonal structure of destruction of a highly compressed massives around underground workings] // *Vestnik Dal'nevostochnogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* – Herald of the Far Eastern State Technical University. 2011, No. 3/4 (8/9), pp. 144–166.

5. Ksendzenko L. S., Makarov V. V., Opanasyuk N. A., Golosov A. M. *Zakonomernosti deformirovaniya i razrusheniya sil'no szhatyh gornyh porod i massivov : monografiya* [Regularities of deformation and destruction of heavily compressed rocks and massives: monograph] / School of engineering of FEFU. Vladivostok. Far East. Feder. Un-ty. 2014. 192 p.

6. Losev A. S. *Butstrep metody postroeniya doveritel'nyh intervalov ocenki parametrov modeli zonal'noj dezintegracii gornyh porod vokrug podzemnoj vyrabotki* [Bootstrap methods for constructing confidence intervals of the parameter estimates of the model of the zonal disintegration of rocks around an underground excavation] // *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskije nauki* – Herald of the Dagestan State Technical University. Technical science. 2017, No. 44 (4), pp. 114–121.

7. Losev A. S. *Zavisimost' zony razrusheniya massiva vokrug gornoj vyrabotki ot predela prochnosti porody* [The dependence of the zone of destruction of the massive around the rock formation on the ultimate strength of the rock] / *Gornye nauki i tekhnologii* – Mining science and technology. 2017, No. 2, pp. 43–49.

8. Losev A. S. *Statisticheskaya ocenka parametra periodichnosti modeli zonal'noj dezintegracii gornyh porod* [Statistical estimation of the parameter of the model of zonal disintegration of rocks] // *Byulleten' nauki i praktiki. EHlektron. zhurn.*- Herald of science and practice. Electron. Journal. 2017, № 7 (20), pp. 78–82.
9. Makarov P. V. *Ob ierarhicheskoj prirode deformacii i razrusheniya tverdyh tel i sred* [About the hierarchical nature of deformation and fracture of solids and solid bodies] // *Fiz. Mezomekh.*- Phys. mezomekh. 2004, vol. 7, No. 4, pp. 25–34.
10. EHfron B. *Netradicionnye metody mnogomernogo statisticheskogo analiza* [Non-traditional methods of multivariate statistical analysis]. M. Finance and statistics. 1988. 263 p.