

Вятский государственный университет

Advanced science

Н а у ч н ы й ж у р н а л

№ 2

Киров
2018

ББК 74.48я52

A22

Главный редактор

Е. М. Вечтомов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ,
ORCID: 0000-0002-3490-2956

Заместитель главного редактора

Д. Е. Прозоров, доктор технических наук, доцент, профессор, ВятГУ, ORCID: 0000-0002-3577-8838

Ответственный секретарь

Е. Н. Лубягина, кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ, ORCID: 0000-0001-5071-6208

Состав редакционной коллегии:

А. В. Алешкин, доктор технических наук, профессор, директор, ФГБНУ «ФАНЦ Северо-Востока» (г. Киров)

В. И. Варанкина, кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0003-4166-1182

И. В. Губин, кандидат технических наук, доцент, директор, Политехнический институт, ВятГУ (г. Киров)

В. И. Джиган, доктор технических наук, доцент, главный научный сотрудник, Московский исследовательский центр ООО «Техкомпания Хуавэй» (г. Москва)

С. И. Калинин, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров)

И. Б. Кожухов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва)

Е. В. Котельников, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

А. А. Красных, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

А. А. Махнев, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий отделом, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург)

Н. Н. Непейвода, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт программных систем РАН (г. Переславль-Залесский)

В. П. Одинец, доктор физико-математических наук, профессор, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар)

С. М. Окулов, доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров)

Е. П. Петров, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров),
ORCID: 0000-0002-0336-1341

В. В. Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник, ВятГУ (г. Киров)

Д. А. Страбыкин, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

И. В. Флегентов, доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-6569-5654

А. Г. Хлебов, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

А. В. Частиков, доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-1998-7787

В. В. Черепанов, доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-5244-7061

В. В. Чермных, доктор физико-математических наук, доцент, профессор, ВятГУ (г. Киров)

Д. В. Чупраков, кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ (г. Киров)

А. В. Шатров, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

Научный журнал «Advanced science»

**как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС 77-67556 от 31 октября 2016 г.)**

Учредитель журнала ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Адрес издателя/редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Редактор **О. И. Коробкова**

Компьютерная верстка **К. А. Ашихмина**

Редактор выпускающий **А. Н. Петрова**

Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

© Вятский государственный университет (ВятГУ), 2018

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.</i> О подалгебрах полуколец непрерывных частичных действительнзначных функций. II	4
<i>Евсюкова Е. В.</i> Особенности изучения групп диэдра и их подгрупп на спецкурсе по теории групп	10
<i>Торопова С. И., Казакова А. В.</i> Нелинейные регрессионные модели как инструмент анализа и прогнозирования в экологии	15
<i>Торопова С. И., Мохина Т. М.</i> К вопросу о формировании научно-исследовательской деятельности студентов-экологов средствами математики	20
<i>Зыкова И. О., Чучкалова С. В.</i> Модель взаимодействия разновозрастных групп занятых в экономике на примере Кировской области.....	25

ФИЗИКА

<i>Eliseev S. V., Eliseev A. V., Mironov A. S., Vuong Q. T.</i> The application of dynamic reactions of ties in the connection of elements to estimate the capabilities of vibration protection system.....	30
<i>Лосев А. С.</i> Бутстреп методы оценки положения зон разрушения в модели сжатого массива горных пород	39

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

<i>Кравчук А. С., Кравчук А. И.</i> Теоретическое определение сопротивления сжимаемого воздуха движению осесимметричной пули.....	44
---	----

О подалгебрах полуколец непрерывных частичных действительнoзначных функций. II*

Е. М. Вечтомов¹, Е. Н. Лубягина²

¹доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: vecht@mail.ru

²кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Аннотация. Статья относится к теории полуколец непрерывных числовых функций, развиваемой в рамках функциональной алгебры. Объектом исследования являются полукольца $CP(X)$ непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле \mathbf{R} действительных чисел. Предметом изучения служат подалгебры с единицей полуколец $CP(X)$. Рассматриваются свойства решеток $A(X)$ всевозможных подалгебр и $A_1(X)$ всех подалгебр с единицей полуколец $CP(X)$ над топологическими пространствами X . Выяснено строение атомов и предатомов в решетках $A_1(X)$. Это позволило решить задачу определяемости T_1 -пространств X решеткой $A_1(X)$: любое T_1 -пространство X однозначно, с точностью до гомеоморфизма, определяется решеткой $A_1(X)$ в классе всех топологических пространств. В качестве следствия получен результат из предыдущей работы авторов об абсолютной определяемости T_1 -пространств X решеткой $A(X)$.

Ключевые слова: полукольцо непрерывных частичных действительнoзначных функций, подалгебра, подалгебра с единицей, решетка подалгебр, определяемость.

Предварительные сведения

Данная работа является продолжением статьи авторов [4] и посвящена изучению подалгебр с единицей полуколец $CP(X)$ непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле \mathbf{R} действительных чисел. Рассматривается решетка $A_1(X)$ всевозможных подалгебр с единицей 1 в полукольцах $CP(X)$.

Напомним необходимые понятия и результаты [3; 4].

Полукольцом (в широком смысле) называется алгебраическая структура с ассоциативными бинарными операциями сложения (+) и умножения (\cdot), такими, что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. В нашей работе под *полукольцом* понимается полукольцо с коммутативными операциями сложения и умножения. Поле \mathbf{R} всех действительных чисел является коммутативным полукольцом с делением с мультипликативным нулем 0 и единицей 1.

Пусть X – произвольное топологическое пространство,

$C(X)$ – кольцо всех непрерывных действительнoзначных функций на пространстве X ,

$$CP(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \subseteq X\} -$$

полукольцо всех непрерывных частичных \mathbf{R} -значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на пересечении $D(f) \cap D(g)$ их областей определения.

Считаем, что $C(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Полукольцо $CP(X)$ имеет единицу 1 и поглощающий элемент \emptyset .

Подалгеброй в полукольце $CP(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа из \mathbf{R} . Пустое множество \emptyset также считается подалгеброй в $CP(X)$. Относительно отношения включения \subseteq множество $A(X)$ образует полную решетку с наименьшим элементом \emptyset и наибольшим элементом $CP(X)$, а $A_1(X)$ будет полной решеткой с наименьшим элементом \mathbf{R} – подалгеброй функций-констант на X . Точной нижней гранью непустого подмножества в $A(X)$ будет их пересечение, а точная верхняя грань подалгебр $A, B \in A(X)$ равна $A \vee B = A \cup B \cup (A+B+AB)$. Решетка $A_1(X)$ является подрешеткой решетки $A(X)$.

Топологическое пространство называется T_1 -пространством, если все его одноточечные подмножества замкнуты, и T_0 -пространством, если совпадение замыканий его одноточечных множеств $\{x\}=\{y\}$ влечет равенство самих точек x и y . Ясно, что T_1 -пространства являются T_0 -пространствами. Связное двоеточие, будучи T_0 -пространством, не является T_1 -пространством.

Для любого подмножества Y топологического пространства X обозначим через 0_Y и 1_Y такие функции из $CP(X)$, что $D(0_Y)=D(1_Y)=Y$, $0_Y=0$ и $1_Y=1$ на Y . Имеем $0_\emptyset=1_\emptyset=\emptyset$. Для точек $x \in X$ будем писать $0_x=0_{\{x}}$ и $1_x=1_{\{x}}$. В полукольце $CP(X)$ отождествляем $1_x \mathbf{R}$ с \mathbf{R} . Отметим, что $\{0_Y\}=\{0_Z\} \Leftrightarrow Y=Z$ для $Y, Z \subseteq X$.

Для произвольной функции $e \in CP(X)$ обозначим через $[e]$ наименьшую подалгебру с единицей 1 полукольца $CP(X)$, содержащую e . Если e принимает только нулевые и/или единичные значения, то $[e]$ совпадает с множеством, состоящим из функций-констант на X и функций из $C(D(e))$, являющихся константами на множествах $e^{-1}(0)=\{x \in D(e): e(x)=0\}$ и $e^{-1}(1)=\{x \in D(e): e(x)=1\}$ [6, теорема 9.3], в частности $1_{D(e)} \in [e]$. Заметим, что $[f]=[e]$ для любой такой двухзначной функции $f \in C(D(e))$. Имеем также $[1_Y]=[0_Y]=\mathbf{R} \cup 1_Y \mathbf{R}$ при любом $Y \subseteq X$, в частности $[\emptyset]=[1_\emptyset]=[0_\emptyset]=\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$.

Теме определяемости топологических пространств различными алгебрами функций на них посвящена обзорная статья [1], см. также [2]. Определяемость хьюиттовских пространств X решеткой всех подалгебр колец $C(X)$ установлена Е. М. Вечтомовым в 1997 г. в работе [3], см. также [6, п. 9].

Отметим, что основы теории полуколец непрерывных частичных числовых функций заложены в [5; 7, глава 8].

Атомы (коатомы) решетки $A(X)$ – это минимальные (максимальные) подалгебры полукольца $CP(X)$. Элемент a решетки L с наименьшим элементом θ называется ее предатомом, если a строго больше ровно двух элементов решетки L : θ и некоторого ее атома.

Предложение А [4, предложение 2]. Упорядоченное множество $\{\{0_Y\}: Y \subseteq X\}$ с отношением подчинения изоморфно булеану $B(X)=\{Y: Y \subseteq X\}$ с отношением включения \subseteq , причем атомы $\{0_x\}$ решетки $A(X)$, $x \in X$, соответствуют атомам $\{x\}$ булеана $B(X)$.

Данное предложение позволяет отождествлять атомы $\{0_Y\}$ решетки $A(X)$ с подмножествами Y топологического пространства X .

Теорема А [4, теорема]. Произвольные T_1 -пространство X и топологическое пространство Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны решетки $A(X)$ и $A(Y)$.

Пример 1. Для одноточечного топологического пространства $X=\{x\}$ получаем полукольцо $CP(X)=\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$, дистрибутивную решетку $A(X)=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{0_x\}, \{\emptyset, 0_x\}, \mathbf{R}, CP(X)\}$, изоморфную прямому произведению двухэлементной и трехэлементной цепей, и двухэлементную цепь $A_1(X)=\{\mathbf{R}, CP(X)\}$.

Пример 2. Рассмотрим двухточечное топологическое пространство $X=\{x, y\}$, наделенное антидискретной топологией или топологией связного двоеточия. Получаем полукольцо $CP(X)=\mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$ и 35-элементную решетку $A(X)=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{0_x\}, \{0_y\}, \{0_x\}, \{\emptyset, 0_x\}, \{\emptyset, 0_y\}, \{\emptyset, 0_x, 0_y\}, \{\emptyset, 0_x\}, \{0_x, 0_x\}, \{0_y, 0_x\}, \{\emptyset, 0_x, 0_x\}, \{\emptyset, 0_y, 0_x\}, \{\emptyset, 0_x, 0_y, 0_x\}, 1_x \mathbf{R}, 1_y \mathbf{R}, \{\emptyset\} \cup 1_x \mathbf{R}, \{\emptyset\} \cup 1_y \mathbf{R}, \{\emptyset, 0_x\} \cup 1_y \mathbf{R}, \{\emptyset, 0_y\} \cup 1_x \mathbf{R}, \{\emptyset\} \cup 1_x \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, 1_x \mathbf{R} \cup \{0_x\}, 1_y \mathbf{R} \cup \{0_x\}, \{\emptyset, 0_x\} \cup 1_x \mathbf{R}, \{\emptyset, 0_x\} \cup 1_y \mathbf{R}, \{\emptyset, 0_x, 0_x\} \cup 1_y \mathbf{R}, \{\emptyset, 0_y, 0_x\} \cup 1_x \mathbf{R}, \{\emptyset, 0_x\} \cup 1_x \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, CP(X)\}$. При этом $C(X)=\mathbf{R}$ и подалгебра $CP(X) \setminus C(X)$ всех собственно частичных функций полукольца $CP(X)$ содержит 14 подалгебр; добавляя к этим подалгебрам функцию-константу $0=0_x$, получим еще 14 подалгебр. Решетка $A(X)$ имеет четыре атома $\{\emptyset\}, \{0_x\}, \{0_y\}, \{0_x\}$ и три предатома $1_x \mathbf{R}, 1_y \mathbf{R}, \mathbf{R}$. В семиэлементной решетке $A_1(X)=\{\mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, CP(X)\}$ ровно три атома $\mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$ и нет предатомов. Ее подрешетка $\{\mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, CP(X)\}$ является диамантом, поэтому решетки $A_1(X)$ и $A(X)$ не модулярны.

Пример 3. Пусть $X=\{x, y\}$ – двухточечное дискретное пространство. Тогда $CP(X)=C(X) \cup 1_x \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$ и решетка $A_1(X)=\{\mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, \mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, C(X), C(X) \cup 1_x \mathbf{R}, C(X) \cup 1_y \mathbf{R}, C(X) \cup \{\emptyset\}, C(X) \cup 1_x \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, C(X) \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, CP(X)\}$ содержит 14 элементов, имеет четыре атома $[1_x]=\mathbf{R} \cup 1_x \mathbf{R}, [1_y]=\mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R}, [\emptyset]=\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}, C(X)$ и не имеет предатомов. Как и в примере 2.2, подалгебра $(CP(X) \setminus C(X)) \cup \{0_x\}$ полукольца $CP(X)$ содержит 28 подалгебр. В подалгебре $(CP(X) \setminus C(X)) \cup M_x=1_x \mathbf{R} \cup 1_y \mathbf{R} \cup \{\emptyset\} \cup M_x$ содержится 10 подалгебр: $M_x, M_x \cup \{\emptyset\}, M_x \cup \{0_x\}, M_x \cup 1_x \mathbf{R}, M_x \cup 1_y \mathbf{R}, M_x \cup \{\emptyset, 0_x\}, M_x \cup \{\emptyset\} \cup 1_x \mathbf{R}, M_x \cup \{\emptyset\} \cup 1_y \mathbf{R}, M_x \cup \{\emptyset, 0_x\} \cup 1_y \mathbf{R}, (CP(X) \setminus C(X)) \cup M_x$. Аналогично, подалгебра $(CP(X) \setminus C(X)) \cup M_y$ включает в себя 10 подалгебр. Стало быть, всего в полукольце $CP(X)$ содержится 62 подалгебры.

Замечание 1. Пример 2 показывает, что T_0 -пространства X не обязаны определяться решеткой $A(X)$. Но в силу теоремы А каждое топологическое свойство любого T_1 -пространства X может быть выражено на языке решетки $A(X)$.

Замечание 2. Решетка подалгебр кольца $C(X)$ над двухэлементным дискретным пространством X является диамантом, поэтому она модулярна, но не дистрибутивна [6, с. 114, рис. 2]. Для трех-

элементного дискретного пространства Y решетка подалгебр кольца $C(Y)$ является немодулярной 15-элементной решеткой [6, с. 114, рис. 1], изоморфной подрешетке решетки $A(C(X))$ над любым T_1 -пространством X мощности ≥ 3 .

Предложение Б [4, предложение 5]. Для всякого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ исчерпываются подалгебрами $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$ и $(CP(X) \setminus C(X)) \cup A$ для всех точек $x \in X$ и максимальных подалгебр A кольца $C(X)$.

Предложение В. Для любого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры кольца $C(X)$ суть в точности его максимальные идеалы $M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, $x \in X$, и подалгебры с единицей $A_{x,y} = \{f \in C(X) : f(x) = f(y)\}$ по всем точкам $x \neq y$ из X .

Это предложение следует из теоремы о строении алгебр n -ок действительных чисел (см., например, [6, теорема 9.3]).

Лемма А [4, лемма 4]. Точка x не принадлежит замыканию множества Y в T_1 -пространстве X тогда и только тогда, когда найдется такая функция $e \in C(Y \cup \{x\})$, что $e = 0$ на Y и $e(x) = 1$.

Лемма Б [4, лемма 5]. Подмножество Y произвольного T_1 -пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X \setminus Y$ существует такая функция $e \in C(Y \cup \{x\})$, что $e = 0$ на Y и $e(x) = 1$.

Решетка $A_1(X)$ подалгебр с единицей полукольца $CP(X)$

Для решеток $A_1(X)$ справедлив результат, аналогичный решеткам $A(X)$.

Предложение 1. Имеют место следующие утверждения:

1) атомы решетки $A_1(X)$ исчерпываются подалгебрами $[1_Y]$ по всем собственным подмножествам Y топологического пространства X и подалгебрами $[e]$, где функция $e \in C(X)$ принимает в точности значения 0 и 1 (то есть является нетривиальным идемпотентом кольца $C(X)$);

2) предатомы решетки $A_1(X)$ совпадают с подалгебрами $[e]$ по всем $e \in CP(X) \setminus C(X)$, принимающим ровно два значения 0 и 1.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно.

2) Легко видеть, что $[e]$ строго содержит ровно две подалгебры с единицей: \mathbf{R} и $[1_{D(e)}]$. Обратное, пусть P – предатом решетки $A_1(X)$, содержащий атом $[1_Y]$, и $e \in P \setminus [1_Y]$. Имеем $[1_Y] \subset [e] = P$. Поэтому $D(e) = Y \neq \emptyset$, $e \in C(Y)$ и функция e не является константой. Если e принимает более двух значений, то подалгебра $[e^3] \neq [1_Y]$ строго содержится в $[e] = P$, что невозможно. Значит, e принимает ровно два значения и, в силу сказанного выше, можно считать эти значения равными 0 и 1.

Замечание 3. Атомы $[e]$ из пункта 1) предложения 1 существуют для несвязных топологических пространств X , и над ними нет предатомов. Атомы $[1_Y]$, $Y \subset X$, содержатся в предатомах, соответствующих – в силу пункта 2) предложения 1 – двухклассовым открыто-замкнутым разбиениям подпространств Y .

Предложение 1 позволяет описать топологию любого T_1 -пространства X в терминах атомов и предатомов решетки $A_1(X)$. Для этого нам потребуется ряд предварительных утверждений.

Лемма 1. Для любых двух различных атомов $[1_Y]$ и $[1_Z]$ решетки $A_1(X)$ верны следующие утверждения:

1) $[1_Y] \vee [1_Z] = \mathbf{R} \cup [1_Y] \cup [1_Z] \cup [1_{Y \cap Z}]$;

2) подалгебра $[1_Y] \vee [1_Z]$ содержит ровно два атома $[1_Y]$ и $[1_Z]$ тогда и только тогда, когда $Y \subset Z$ или $Z \subset Y$;

3) подалгебра $[1_Y] \vee [1_Z]$ содержит ровно три атома $[1_Y]$, $[1_Z]$, $[1_{Y \cap Z}]$ тогда и только тогда, когда $Y \not\subset Z$ и $Z \not\subset Y$. При этом $[1_{Y \cap Z}] = [\emptyset]$ равносильно $Y \cap Z = \emptyset$.

Справедливость леммы 1 усматривается непосредственно.

Из леммы 1 следует

Лемма 2. Для любых отличных от $[\emptyset]$ различных атомов $[1_Y]$ и $[1_Z]$ решетки $A_1(X)$ включение $Y \subset Z$ равносильно существованию такого атома $[1_U]$, что подалгебра $[1_U] \vee [1_Y]$ содержит ровно три атома $[1_U]$, $[1_Y]$, $[\emptyset]$, а подалгебра $[1_U] \vee [1_Z]$ содержит два атома $[1_U]$ и $[1_Z]$.

Лемма 3. Для произвольного атома A решетки $A_1(X)$ эквивалентны утверждения:

1) $A = [\emptyset]$, либо $A = [e]$ и в кольце $C(X)$ нет других нетривиальных идемпотентов кроме e и $1 - e$;

2) $A \vee B$ содержит ровно два атома для любого атома $B \neq A$.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) вытекает из предложения 1.

2) \Rightarrow 1). Если $A = [1_Y]$ для непустого собственного подмножества Y пространства X , то $A \vee B$ содержит три атома A , B , $[\emptyset]$ при $B = [1_{X \setminus Y}]$. Если же e, f – различные нетривиальные идемпотенты в $C(X)$ и $A = [e]$, то подалгебра $A \vee [f]$ содержит 3 или 7 атомов в зависимости от того, на 3 или 4 части открыто-замкнутые разбиения $\{e^{-1}(0), e^{-1}(1)\}$ и $\{f^{-1}(0), f^{-1}(1)\}$ делят пространство X .

Лемма 4. Пусть X имеет более двух точек. Тогда для атома A решетки $A_1(X)$ равенство $A=[\emptyset]$ равносильно тому, что для любого атома $B \neq A$ подалгебра $A \vee B$ содержит ровно два атома и не содержит предатомов.

Доказательство. Пусть $A=[\emptyset]$ и атом $B \neq A$. Тогда $A \vee B = B \cup \{\emptyset\}$ содержит только атомы A и B и не содержит предатомов в силу предложения 1.

Обратно, пусть атом A удовлетворяет достаточному условию леммы. Тогда выполняется утверждение 1) леммы 3. Если $A=[e]$ для некоторого нетривиального идемпотента e кольца $C(X)$, $x_0 \in e^{-1}(0)$ и $x_1 \in e^{-1}(1)$, то при $Y=\{x_0, x_1\}$ подалгебра $A \vee [1_Y]$ содержит предатом $[f]$, где $D(f)=Y$, $f(x_0)=0$, $f(x_1)=1$. Остается воспользоваться леммой 3.

Аналогично предложению А предложение 1 и леммы 3–4 устанавливаются на множестве атомов $[1_Y]$, $Y \subseteq X$, решетки $A_1(X)$ решеточно выражаемое отношение порядка \langle :

$$[1_Y] \langle [1_Z] \Leftrightarrow Y \subseteq Z$$

для любых собственных подмножеств Y, Z топологического пространства X .

Стало быть, мы можем отождествлять атомы $[1_Y]$ решетки $A_1(X)$ с подмножествами $Y \subseteq X$. В частности, $[1_x]=\{x\}$ для любой точки x произвольного неодноточечного топологического пространства X .

Лемма 5. Пусть Y – собственное подмножество топологического пространства X и $x \in X \setminus Y$. Для того чтобы точка x не принадлежала замыканию Y , необходимо и достаточно, чтобы в решетке $A_1(X)$ существовал либо предатом P , содержащий атом $[1_{Y \cup \{x\}}]$, либо атом P , такие, что подалгебра $P \vee [1_Y]$ содержит ровно 5 подалгебр с единицей $\mathbf{R}, P, [1_Y], [1_{Y \cup \{x\}}], P \vee [1_Y]$ в первом случае или 4 подалгебры с единицей $\mathbf{R}, P, [1_Y], P \vee [1_Y]$ – во втором случае.

Доказательство. Если точка x не принадлежит замыканию множества Y , то по лемме А имеем: $Y=e^{-1}(0)$ и $\{x\}=e^{-1}(1)$ для подходящей функции $e \in C(Y \cup \{x\})$. Если $Y \cup \{x\} \neq X$, то в силу пункта 2) предложения 1 получаем предатом $P=[e]$ над атомом $[1_{Y \cup \{x\}}]$. Легко видеть, что подалгебра $P \vee [1_Y]$ включает в себя ровно 5 подалгебр с единицей: $\mathbf{R}, P, [1_Y], [1_{Y \cup \{x\}}], P \vee [1_Y]$. Если же $Y \cup \{x\}=X$, то в силу пункта 1) предложения 1 получаем атом $P=[e]$, для которого $P \vee [1_Y]$ содержит 4 подалгебры с единицей: $\mathbf{R}=[1_x]=[1_{Y \cup \{x\}}], P, [1_Y]$ и $P \vee [1_Y]$.

Обратно, пусть выполнено достаточное условие леммы. Пусть дан предатом P , содержащий атом $[1_{Y \cup \{x\}}]$. По предложению 1, 2) $P=[e]$ для функции $e \in C(Y \cup \{x\})$ со значениями 0 и 1. Если $e^{-1}(0) \neq Y$ и $e^{-1}(0) \neq \{x\}$, то множество Z , равное $e^{-1}(0)$ или $e^{-1}(1)$, строго содержится в Y . Но тогда подалгебра $P \vee [1_Y]$ содержит также предатом Q , порожденный открыто-замкнутым разбиением $\{Z, Y \setminus Z\}$ подпространства Y , что противоречит принятому условию. Аналогично проверяется и случай атома P .

Лемма доказана.

Скажем, что T_1 -пространство X абсолютно определяется решеткой $A_1(X)$, если для любого топологического пространства Y изоморфность решеток $A_1(X)$ и $A_1(Y)$ влечет гомеоморфность пространств X и Y .

Теорема 1. Произвольное T_1 -пространство X абсолютно определяется решеткой $A_1(X)$.

Доказательство. Пусть даны T_1 -пространство X и топологическое пространство Y с изоморфными решетками $A_1(X)$ и $A_1(Y)$. Можно считать пространства X и Y не одноточечными. Рассмотрим изоморфизм α решетки $A_1(X)$ на решетку $A_1(Y)$. Для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ положим:

$$\varphi(x)=y \Leftrightarrow \alpha([1_x])=[1_y].$$

На основании предложения 1 φ будет биекцией между множествами X и Y .

Далее покажем, что пространство Y также будет T_1 -пространством. Свойство пространства Y быть T_1 -пространством означает, что для любых двух различных точек $y_1, y_2 \in Y$ найдется функция $g \in C(\{y_1, y_2\})$, $g(y_1)=0$ и $g(y_2)=1$. Возьмем в Y точки $y_1 \neq y_2$ и положим $x_1=\varphi^{-1}(y_1)$, $x_2=\varphi^{-1}(y_2)$. Существует функция $e \in C(\{x_1, x_2\})$, $e(x_1)=0$ и $e(x_2)=1$. По предложению 1 $[e]$ является предатомом решетки $A_1(X)$, содержащим атом $[1_{\{x_1, x_2\}}]$, либо атомом в случае $X=\{x_1, x_2\}$. Поэтому $\alpha([e])$ будет предатомом решетки $A_1(Y)$, содержащим атом $\alpha([1_{\{x_1, x_2\}}])=[1_{\{y_1, y_2\}}]$, либо атомом при $Y=\{y_1, y_2\}$. Снова по предложению 1 $\alpha([e])=[g]$ при $g \in C(\{y_1, y_2\})$, $g(y_1)=0$ и $g(y_2)=1$.

Для завершения доказательства заметим, что в силу лемм Б и 5 биекции φ и φ^{-1} сохраняют замкнутые множества пространств X и Y , то есть φ является гомеоморфизмом X на Y .

Предложение 2. Для любого топологического пространства X подалгебра \mathbf{R} полукольца $CP(X)$ определяется в терминах решетки $A(X)$.

Доказательство. Предложение А на языке решетки $A(X)$ дает описание отношения подчинения атомов: атом $\{0_Y\}$ подчинен атому $\{0_Z\}$, если $Y \subseteq Z$, где Y, Z – подмножества пространства X . Подчинение является порядком на множестве атомов решетки $A(X)$, относительно которого атом $\{0_X\}$ будет наибольшим элементом. Рассмотрим множество P всех предатомов решетки $A(X)$, содержащих атом $\{0_X\}$. В нем предатом $\mathbf{R}=1_X \mathbf{R}$ выделяется следующим свойством на языке решетки $A(X)$. Для

любого атома $\{0_Y\} \neq \{0_X\}$ подалгебра $\{0_Y\} \vee \mathbf{R} = 1_Y \mathbf{R} \cup \mathbf{R}$ содержит два предатома $1_Y \mathbf{R}$ и \mathbf{R} , а для $P \in P \setminus \{\mathbf{R}\}$ имеем $P = e \mathbf{R}$, где функция $e \in C(X)$ принимает ровно два значения 0 и 1, и при $Y = e^{-1}(0)$ подалгебра $\{0_Y\} \vee P = \{0_Y\} \vee P$ содержит только один предатом P .

Предложение доказано.

Отметим, что следствием теоремы 1 и предложения 2 является теорема А, тем самым, получаем новое доказательство этой теоремы определяемости.

Примеры 2 и 3 доказывают справедливость следующего утверждения:

Предложение 3. Для любого топологического пространства X верны утверждения:

- 1) если X одноточечное, то решетки $A(X)$ и $A_1(X)$ дистрибутивны;
- 2) если X не одноточечное, то решетки $A(X)$ и $A_1(X)$ не модулярны.

Данное предложение дополняет [4, предложение 3].

Следующее утверждение вытекает из предложений Б и В.

Предложение 4. Для всякого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ исчерпываются подалгебрами $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$, $(CP(X) \setminus C(X)) \cup M_x$ и $(CP(X) \setminus C(X)) \cup A_{x,y}$ по всем точкам $x \neq y$ пространства X .

Замечание 4. Легко видеть, что для любого топологического пространства X полукольцо $CP(X)$ совпадает с множеством всех (частичных) функций-констант тогда и только тогда, когда каждое двухэлементное подпространство пространства X либо антидискретно, либо является связным двоеточием. Последнее условие равносильно тому, что решетка открытых множеств (топология) топологического пространства X является цепью.

Пример 4. Пусть X – счетное множество. Упорядочим его как натуральный ряд \mathbf{N} и объявим открытыми множества $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n\}, \dots, X$, образующие топологию τ на X . Упорядочим X как множество \mathbf{Z} целых чисел и положим $U_k = \{z \in \mathbf{Z} : z \leq k\}$ при $k \in \mathbf{Z}$. Множества \emptyset, X и $U_k, k \in \mathbf{Z}$, образуют топологию σ на X . Топологии τ и σ представляют собой неизоморфные счетные цепи относительно включения. Получаем негомеоморфные T_0 -пространства $\langle X, \tau \rangle$ и $\langle X, \sigma \rangle$ с одним и тем же полукольцом $CP(X)$, состоящим – по замечанию 4 – из функций-констант на подмножествах в X . Этот пример показывает, что из изоморфизма решеток $A(X)$ и $A(Y)$ или $A_1(X)$ и $A_1(Y)$ над T_0 -пространствами X и Y не следует, вообще говоря, гомеоморфизм самих пространств X и Y .

Список литературы

1. Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Сер. 1: Алгебра. Топология. Геометрия. ВИНТИ. 1990. Т. 28. С. 3–46.
2. Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 687–693.
3. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Определяемость T_1 -пространств решеткой подалгебр полуколец непрерывных частичных действительных функций на них // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(22). С. 21–28.
4. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. О подалгебрах полуколец непрерывных частичных действительных функций // Advanced science. 2017. № 2. 0,5 п. л.
5. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Полукольца непрерывных частичных действительных функций // CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications" Yekaterinburg, Russia, February 5-11, 2017. С. 20–29.
6. Вечтомов Е. М. и др. Элементы функциональной алгебры : в 2 т. Т. 1 / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков ; под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : ООО «Изд-во «Радуга-ПРЕСС», 2016. 384 с.
7. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Элементы функциональной алгебры : в 2 т. Т. 2 / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков ; под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : ООО «Изд-во «Радуга-ПРЕСС», 2016. 316 с.

About subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions. II

E. M. Vechtomov¹, E. N. Lubyagina²

¹Doctor sciences of physics and mathematics, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru

²PhD of physics and mathematics, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Abstract. The article refers to the theory of semirings of continuous numerical functions developed within the framework of functional algebra. The object of the investigation is semirings $CP(X)$ of continuous partial functions on topological spaces X with the values in the topological field \mathbf{R} of real numbers. The subject of study is the subalgebras with identity of semirings $CP(X)$. The properties of the lattices $A(X)$ of all possible subalgebras and $A_1(X)$ of all subalgebras with identity of semirings $CP(X)$ over topological spaces X are considered. The structure of atoms and pre-atoms in lattices $A_1(X)$ is clarified. This allowed us to solve the problem of the determinability of T_1 -spaces X by the lattice $A_1(X)$: any T_1 -space X is uniquely determined up to a homeomorphism by the lattice $A_1(X)$ in the class of all topological spaces. As a corollary, we obtained a result from the previous work of the authors about the absolute definability of T_1 -spaces X by the lattice $A(X)$.

Keywords: semiring of continuous partial real-valued functions, subalgebra, subalgebra with identity, lattice of subalgebras, definability.

References

1. Vechtomov E. M. *Voprosy opredelyaemosti topologicheskikh prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnykh funktsij* [Problems of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions] // *Itogi nauki i tekhniki. Ser. 1: Algebra. Topologiya. Geometriya* – Results of science and technology. Ser. 1: Algebra. Topology. Geometry. All-Russian Institute of scientific and technical information. 1990. Vol. 28. Pp. 3–46.
2. Vechtomov E. M. *Reshetka podalgebr kolec nepreryvnykh funktsij i h'yuittovskie prostranstva* [Lattice of subalgebras of rings of continuous functions and Hewitt spaces] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1997, vol. 62, No. 5, pp. 687–693.
3. Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. *Opredelyaemost' T1-prostranstv reshetkoj podalgebr polukolec nepreryvnykh chastichnykh dejstvitel'noznachnykh funktsij na nih* [Definability of T_1 -spaces of the lattice of subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions on them] // *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2017, vol. 1 (22), pp. 21–28.
4. Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. *O podalgebrah polukolec nepreryvnykh chastichnykh dejstvitel'noznachnykh funktsij* [On subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions] // *Advanced science* – Advanced science. 2017, No. 2, 0.5 p.p.
5. Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. *Polukol'ca nepreryvnykh chastichnykh dejstvitel'noznachnykh funktsij* [Semirings of continuous partial real valued functions] // CEUR-WS.org_Vol-1894. Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications" Yekaterinburg, Russia, February 5–11, 2017. Pp. 20–29.
6. Vechtomov E. M. *etc. EHlementy funkcional'noj algebrы : v 2 t. T. 1* [Elements of functional algebra: in 2 vol. Vol. 1] / E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov; ed. by E. M. Vechtomov. Kirov: LLC "Publishing house "Raduga-PRESS". 2016. 384 p.
7. Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. *EHlementy funkcional'noj algebrы : v 2 t. T. 2* [Elements of functional algebra: in 2 vol. Vol. 2] / E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov; ed. by E. M. Vechtomov. Kirov: LLC "Publishing house "Raduga-PRESS". 2016. 316 p.

Особенности изучения групп диэдра и их подгрупп на спецкурсе по теории групп

Е. В. Евсюкова

кандидат педагогических наук, доцент, Тобольский педагогический институт им. Д. И. Менделеева (филиал)
ТюмГУ. Россия, г. Тобольск. Email: l-evsjukova@rambler.ru

Аннотация. Группы преобразований плоскости и пространства являются одним из наиболее наглядных примеров групп преобразований. Идея инвариантности некоторой конфигурации относительно определенной группы преобразований пришла из кристаллографии. Первым шагом в этом направлении является изучение групп симметрий плоских и пространственных фигур. В статье рассматриваются диэдральные группы подстановок, их нормальные циклические подгруппы, предложены геометрические схемы данных групп, позволяющие наглядно представлять изучаемые факты и способствующие их осознанному восприятию. Представлено доказательство двух теорем о строении элементов группы S_n . Элементы групп диэдра выражаются через элементы неприводимых систем образующих данных групп, что значительно упрощает доказательства теорем и сопутствующие вычисления, позволяет применить изученные факты для решения практических задач. Рассмотренные результаты могут быть использованы для организации исследовательской деятельности студентов, проектирования элективных курсов магистрантами математических направлений подготовки.

Ключевые слова: преобразование, диэдральная группа подстановок, система образующих, граф, строение элементов диэдральной группы.

Историко-методологические вопросы изучения теории групп, группы преобразований и подстановок подробно описаны в книгах [1; 3; 5]. На спецкурсах, в дипломных работах студенты и магистранты математических направлений подготовки изучают группы преобразований и подстановок, применяют изученные факты в различных областях математики, в решениях практических задач и при проектировании элективных курсов по математике для профильной школы [6; 7; 9]. В статьях [2; 8] описываются цели, принципы отбора и краткое содержание учебного материала для элективного курса.

1. Группа диэдра D_3

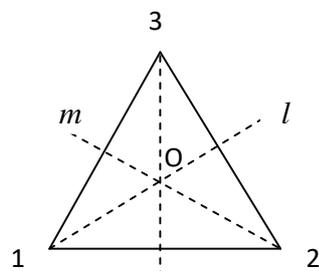


Рис. 1

Рассмотрим правильный треугольник (рис. 1). Центр правильного треугольника (точка O) является центром симметрии. Повороты $P^0, P^{\frac{2\pi}{3}}, P^{\frac{4\pi}{3}}$ на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ соответственно вокруг точки O против часовой стрелки переводят треугольник в себя. Кроме того, имеется три осевых симметрии S_l, S_m, S_n , определяемых осями симметрии l, m, n , проходящими через вершины правильного треугольника и середины его противоположных сторон. Совокупность преобразований $P^0, P^{\frac{2\pi}{3}}, P^{\frac{4\pi}{3}}, S_l, S_m, S_n$ треугольника в себя образует группу относительно композиции (умножения) преобразований. Удобно рассмотренные геометрические преобразования описывать подстановками. Занумеруем вершины правильного треугольника числами 1, 2, 3 и опишем каждое его преобразование подстановкой на множестве вершин треугольника

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) \end{pmatrix}$, где $\varphi(k)$ – номер места, которое после выполнения соответствующего преобразования заняла вершина k ($k \in \{1, 2, 3\}$). В результате получаем соответствие между самосовмещениями треугольника и подстановками множества вершин треугольника:

$$P^0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon, P^{\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3), P^{\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 2),$$

$$S_l \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3), S_m \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3), S_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2).$$

Группа симметрий правильного треугольника изоморфна симметрической группе подстановок S_3 . Подстановки в дальнейшем будем записывать в циклической форме записи: $S_3 = \{\varepsilon, (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 2)\}$. Правило умножения подстановок: $\forall a \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \psi \cdot \varphi(a) = \psi(\varphi(a))$. В произведении первый сомножитель φ пишется справа, а второй ψ – слева.

Геометрическим эквивалентом группы и одним из способов ее наглядного представления является граф. Граф группы невозможно построить без знания ее неприводимой системы образующих [4].

Множество H называется *системой образующих* группы $\langle G, \cdot \rangle$, если

$$(\forall g \in G) (\exists h_1, h_2, \dots, h_n \in H) (\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \{-1, 1\}) g = h_1^{k_1} \cdot h_2^{k_2} \cdot \dots \cdot h_n^{k_n}$$

Система образующих H группы G называется *неприводимой*, если никакая ее подсистема не является для группы G ее системой образующих.

План построения графа конечной группы малого порядка [9]:

- 1) находим для данной группы неприводимую систему образующих;
- 2) каждому элементу группы ставим в соответствие вершину графа;
- 3) строим таблицу умножения элементов группы на образующие элементы;
- 4) опираясь на таблицу, строим граф группы, соединяя вершины графа стрелками разного типа (каждому элементу h из неприводимой системы образующих соответствует стрелка определенного вида); стрелка выходит из вершины графа, изображающей элемент g данной группы, и приходит в вершину, изображающую элемент $h \cdot g$, где g является первым сомножителем, а h является вторым сомножителем (причем различные стрелки графа не должны пересекаться, но могут иметь общие начало или конец).

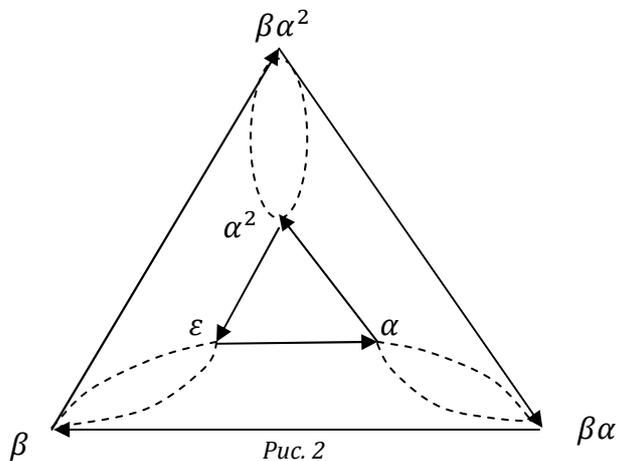
В качестве неприводимой системы образующих группы симметрий правильного треугольника, представленных подстановками (она называется группой диэдра D_6), выберем подстановки $\alpha = (1, 2, 3)$ и $\beta = (1)(2, 3) = (2, 3)$. Подстановка α задает поворот правильного треугольника на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг его центра против часовой стрелки в плоскости того треугольника, а β задает осевую симметрию относительно оси l (рис. 1). Все остальные элементы группы диэдра D_6 выразим через образующие элементы α и β :

$$D_6 = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3 = \varepsilon, \beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2\}, \beta^2 = \varepsilon, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha^2.$$

Подстановки $\alpha^3 = \varepsilon, \alpha, \alpha^2$ задают повороты правильного треугольника вокруг его центра против часовой стрелки на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. $C_3 = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2\}$ образует циклическую подгруппу в группе D_6 . Подстановки $\beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2$ задают осевые симметрии с осями l, m, n соответственно. Вычислим произведения элементов группы D_6 на образующие элементы α и β (табл. 1) и построим граф группы D_6 (рис. 2).

Таблица 1

\cdot	α	β
ε	α	β
α	α^2	$\beta \cdot \alpha$
α^2	ε	$\beta \cdot \alpha^2$
β	$\beta \cdot \alpha^2$	ε
$\beta \cdot \alpha$	β	α
$\beta \cdot \alpha^2$	$\beta \cdot \alpha$	α^2



На графе (рис. 2) переход от элемента g к элементу $\alpha \cdot g$ происходит по сплошной стрелке, а переход от элемента g к элементу $\beta \cdot g$ происходит по пунктирной стрелке.

2. Группы диэдра D_{2n} . В статье [9] рассмотрена группа диэдра

$$D_8 = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 = \varepsilon, \beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2, \beta \cdot \alpha^3\}, \text{ где } \alpha = (1, 2, 3, 4), \beta = (2, 4),$$

построена таблица умножения элементов D_8 на ее образующие элементы α и β и построен граф D_8 . Выбранный нами способ задания элементов группы диэдра в рассмотренных двух случаях поддается обобщению. Занумеруем вершины правильного n -угольника числами $1, 2, \dots, n$. Элементы группы симметрий правильного n -угольника, представленных подстановками (группы диэдра D_{2n}), можно перечислить, используя в качестве неприводимой системы образующих подстановки $\alpha = (1, 2, 3, \dots, n)$ и

$$\beta = \begin{cases} (1)(2, n)(3, n - 1) \dots \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right), n = 2m, m \in N/\{1\}, \\ (1)(2, n)(3, n - 1) \dots \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right), n = 2m - 1, m \in N/\{1\}. \end{cases}$$

$$D_{2n} = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n = \varepsilon, \beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2, \dots, \beta \cdot \alpha^{n-1}\},$$

где $\beta^2 = \varepsilon, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha^{n-1}$.

Подстановка α соответствует повороту правильного n -угольника на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг его центра против часовой стрелки в плоскости этого треугольника, подстановка β соответствует осевой симметрии относительно оси, проходящей через вершину 1 и центр правильного n -угольника.

$C_n = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ – группа поворотов правильного n -угольника вокруг его центра против часовой стрелки на углы $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ соответственно, представленная подстановками. C_n является нормальной циклической подгруппой в D_{2n} . Преобразования, заданные подстановками $\beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2, \dots, \beta \cdot \alpha^{n-1}$, соответствуют осевым симметриям с осями, проходящими через центр правильного n -угольника, порядок каждого из этих элементов равен 2.

Общий способ построения графа группы диэдра D_{2n} описан в статье [9].

3. Геометрические схемы групп диэдра и их подгрупп

Таблица 2

Группы подстановок	Соответствующие изоморфные группы		
$C_3 = A_3$	Группа поворотов правильного треугольника	Группа поворотов двойной правильной треугольной пирамиды	Группа поворотов правильного двухмерного симплекса с тремя вершинами
$D_6 = S_3$	Группа симметрий правильного треугольника	Группа симметрий двойной правильной треугольной пирамиды	Группа симметрий правильного двухмерного симплекса с тремя вершинами
D_8	Группа симметрий квадрата	Группа симметрий двойной правильной четырехугольной пирамиды	нет
D_{2n}	Группа симметрий правильного n -угольника	Группа симметрий двойной правильной n -угольной пирамиды	нет (при $n > 3$)
C_n	Группа поворотов правильного n -угольника	Группа поворотов двойной правильной n -угольной пирамиды	нет (при $n > 3$)

Дополнительные сведения можно найти в книге [10].

4. Строение элементов C_n . Наименьшее натуральное число n , такое, что $a^n = e$ называется порядком элемента a группы $\langle G, \cdot \rangle$ и обозначается $|a| = n$.

Известно [5]:

1. $a^t = e \rightarrow t : |a|$.

2. $\alpha = (1, 2, \dots, n), |a| = n$, т. е. порядком цикла является его длина.

3. Пусть $\varphi = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_s$, где c_1, c_2, \dots, c_s – независимые циклы, тогда $|\varphi| = \text{НОК}[l(c_1), l(c_2), \dots, l(c_s)]$, где символом $l(c_i)$ обозначена длина цикла c_i .

Теорема 1. Если $\alpha = (1, 2, \dots, n), |\alpha^k| = l, k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}, \text{НОД}(k, n) = d$, то $l = \frac{n}{d}$.

Доказательство. $|\alpha^k| = l$, поэтому $(\alpha^k)^l = \alpha^{kl} = \varepsilon$ и $(k \cdot l) : n$. $\text{НОД}(k, n) = d$, тогда $(\exists k_1, n_1 \in N) k = k_1 \cdot d, n = n_1 \cdot d$, где $\text{НОД}(k_1, n_1) = 1$. Так как $(k \cdot l) : n$, то $(k_1 \cdot d \cdot l) : (n_1 \cdot d)$, поэтому $(k_1 \cdot l) : n_1$. Поскольку $\text{НОД}(k_1, n_1) = 1$, получаем $l : n_1$. Воспользуемся тем, что порядок цикла α равен его длине n , получим:

$$(\alpha^k)^{n_1} = \alpha^{k \cdot n_1} = \alpha^{(k_1 \cdot d) \cdot n_1} = \alpha^{k_1 \cdot (d \cdot n_1)} = \alpha^{k_1 \cdot n} = (\alpha^n)^{k_1} = (\varepsilon)^{k_1} = \varepsilon.$$

По условию $|\alpha^k| = l$, поэтому $n_1 : l$. Учитывая, что $l : n_1$ получим $l = n_1 = \frac{n}{d}$.

Теорема 2. Если $\alpha = (1, 2, \dots, n)$, то элемент $\alpha^k \in C_n$ является произведением d независимых циклов длины $\frac{n}{d}$, где $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}, d = \text{НОД}(k, n)$.

Доказательство. Если $k = n$, то теорема справедлива. Методом от противного докажем, что при $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ подстановка α^k не имеет неподвижных элементов. Предположим противное. Пусть $\alpha^k(a) = a$. Поскольку $\alpha(a) = a + 1$ для $a \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ и $\alpha(n) = 1$, то $\alpha^k(a) = a \equiv a + k \pmod{n}$, т. е. $k : n$, что невозможно, так как $k < n$.

Если $\alpha^k = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_s$ – произведение независимых циклов, длины которых $l(c_1), l(c_2), \dots, l(c_s)$, причем $l(c_1) \leq l(c_2) \leq \dots \leq l(c_s)$, то после возведения в степень $l = l(c_1)$ обеих частей равенства имеем:

$(\alpha^k)^l = \alpha^{kl} = (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_s)^l = (c_1)^l \cdot (c_2)^l \cdot \dots \cdot (c_s)^l = \varepsilon \cdot (c_2)^l \cdot \dots \cdot (c_s)^l$ – подстановка с неподвижными элементами из цикла c_1 . Поэтому $(k \cdot l) : n$ и $(\exists t \in N) k \cdot l = n \cdot t$. Тогда $\alpha^{kl} = \alpha^{nt} = (\alpha^n)^t = \varepsilon^t = \varepsilon$, следовательно,

$\alpha^{kl} = (c_1)^l \cdot (c_2)^l \cdot \dots \cdot (c_s)^l = \varepsilon \leftrightarrow (c_i)^l = \varepsilon$ (при $i \in \{1, 2, \dots, s\}$), так как все циклы c_1, c_2, \dots, c_s независимы. $|c_i| = l(c_i)$, тогда имеем $l : l(c_i)$, но $l = l(c_1) \leq l(c_2) \leq \dots \leq l(c_s)$, а это возможно, лишь когда имеет место равенство $l = l(c_1) = l(c_2) = \dots = l(c_s)$. Кроме того, $|\alpha^k| = \text{НОК}[l(c_1), l(c_2), \dots, l(c_s)] = l$

По теореме 1 имеем: $l = \frac{n}{d}$, где $d = \text{НОД}(k, n)$, отсюда $d = \frac{n}{l}$.

Ранее доказано, что подстановка α^k не имеет неподвижных элементов, поэтому количество символов $n = l(c_1) + l(c_2) + \dots + l(c_s) = s \cdot l$, следовательно, $s = \frac{n}{l} = d$.

Следствие. Среди элементов подгруппы $C_n = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ для каждого делителя d числа n (и только для них) имеем ровно $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ подстановок, разлагающихся в d независимых циклов.

В [9] сформулированы теоремы о строении элементов $D_{2n} \setminus C_n$, сформулированы и решены комбинаторные задачи, решаемые с помощью изложенных теоретических фактов.

Список литературы

1. Александров П. С. Введение в теорию групп (библиотечка «Квант»). М. : Наука, 1980. 143 с.
2. Азанова Т. Р., Евсюкова Е. В. Элективный курс «Группы симметрией геометрических фигур и группы подстановок» в профильной школе // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 15 : периодич. межвуз. сб. науч. метод. работ. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. С. 150–153.
3. Вечтомов Е. М. Историко-методологические вопросы при изучении теории групп // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 9. 2007. С. 5–22.
4. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. М. : Мир, 1971. 247 с.
5. Евсюкова Е. В. Введение в теорию групп : учеб.-метод. пособие для студ. физико-матем. специальностей. Тобольск, 2010. 153 с.
6. Евсюкова Е. В. Исследовательские задачи в обучении дисциплине «Основные алгебраические структуры» // Наука и образование в XXI веке : сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. 30 сентября 2013 г. Ч. 28. Тамбов, 2013. С. 50–51.
7. Евсюкова Е. В. Организация учебно-исследовательской деятельности будущих учителей математики в процессе изучения основ теории групп // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 16 : периодич. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2014. С. 143–147.
8. Евсюкова Е. В. Изучение групп движений в старших классах профильной школы // Преподавание математики, физики, информатики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики : материалы Всерос. науч. практ. конф. Глазов : Изд-во ООО «Глазов. тип.», 2015. С. 43–48.
9. Евсюкова Е. В., Савицкая Е. С. Представление групп диэдра подстановками // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 17 : период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. С. 119–125.
10. Сосинский А. Б. Геометрии / пер. с англ. Б. Р. Френкина. М. : МЦИНО, 2017. 263 с.

Peculiarities of studying dihedral groups and their subgroups on a special course on group theory

E. V. Evsjukova

PhD of pedagogical sciences, associate professor D. Mendeleev Tobolsk Pedagogical Institute (Tyumen State University branch), Russia. Tobolsk. E-mail: l-evsjukova@rambler.ru

Abstract. Groups of plane and space transformations are one of the most obvious examples of transformation groups. The idea of the invariance of some configuration with respect to a certain group of transformations came from crystallography. The first step in this direction is the study of symmetry groups of planar and three dimensional figures. The paper considers dihedral groups of permutations, their normal cyclic subgroups, geometric schemes of these groups are proposed, which make it possible to visually represent the facts studied and contribute to their conscious perception. A proof of two theorems on the structure of the elements of the group C_n is presented. Elements of dihedral groups are expressed in terms of elements of irreducible systems of generators of these groups, which greatly simplifies the proofs of theorems and computational calculations, allows us to apply the facts studied to solve practical prob-

lems. The considered results can be used for organization of research activity of students, designing elective courses by undergraduates of mathematical directions of preparation.

Keywords: transformation, the dihedral group of permutations, the generating system, structure of dihedral group elements.

References

1. Aleksandrov P. S. *Vvedenie v teoriyu grupp (bibliotekha «Kvant»)* [Introduction to the theory of groups (library "Quantum")]. M. Science, 1980. 143 p.
2. Azanova T. R., Evsyukova E. V. *EHlektivnyj kurs «Gruppy simmetrij geometricheskijh figur i gruppy podstanovok» v profil'noj shkole* [Elective course "Groups of symmetries of geometric figures and groups of substitutions" in profile school] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 15: periodical inter-univers. Coll. Of scient.-method. works. Kirov: Publishing house LLC "Raduga-PRESS". 2013. Pp. 150–153.
3. Vechtomov E. M. *Istoriko-metodologicheskie voprosy pri izuchenii teorii grupp* [Historical and methodological issues in the study of theory of groups] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 9. 2007. Pp. 5–22.
4. Grossman I., Magnus V. *Gruppy i ih grafy* [Groups and their graphs]. M. Mir. 1971. 247 p.
5. Evsyukova E. V. *Vvedenie v teoriyu grupp : ucheb.-metod. posobie dlya stud. fiziko-matem. special'nostej* [Introduction to group theory of groups: tutorial for students of physics-math. specialties]. Tobolsk. 2010. 153 p.
6. Evsyukova E. V. *Issledovatel'skie zadachi v obuchenii discipline «Osnovnye algebraicheskie struktury»* [Research problems in teaching the discipline "Basic algebraic structures"] // *Nauka i obrazovanie v XXI veke : sb. nauch. tr. po materialam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 30 sentyabrya 2013 g.* – Science and education in the XXI century: coll. of scient. works according to the materials of international scientific- prakt. conf. 30 September 2013. Pt. 28. Tambov. 2013. Pp. 50–51.
7. Evsyukova E. V. *Organizaciya uchebno-issledovatel'skoj deyatel'nosti budushchih uchitelej matematiki v processe izucheniya osnov teorii grupp* [Organization of educational and research activities of future teachers of mathematics in the process of studying the basics of theory of groups] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona. Vyp. 16 : periodich. mezhvuz. sb. nauch.-metod. rabot* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 16: periodical inter-university coll. of scient.-method. works. Kirov. Publishing house LLC "Raduga-PRESS". 2014. Pp. 143–147.
8. Evsyukova E. V. *Izuchenie grupp dvizhenij v starshih klassah profil'noj shkoly* [Study of groups of movements in high school profile] // *Prepodavanie matematiki, fiziki, informatiki v vuzah i shkolah: problemy sodержaniya, tekhnologii i metodiki : materialy Vseros. nauch. prakt. konf.* – Teaching mathematics, physics, computer science in universities and schools: problems of content, technology and methods: materials of All-Russia scientific pract. conf. Glazov. Publishing house "Glazov typ.". 2015. Pp. 43–48.
9. Evsyukova E. V., Savickas E. S. *Predstavlenie grupp diehdra podstanovkami* [Representation of groups by permutations diedre] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona. Vyp. 17 : period. mezhvuz. sb. nauch.-metod. rabot* – Mathematical herald of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region. Is. 17: period. inter-univ. coll. of scient.-method. works. Kirov. Publishing house LLC "Raduga-PRESS". 2015. Pp. 119–125.
10. Sosinskij A. B. *Geometrii.* [Geometries] / transl. from English by B. R. Frenkin. M. MCISS. 2017. 263 p.

Нелинейные регрессионные модели как инструмент анализа и прогнозирования в экологии

С. И. Торопова¹, А. В. Казакова²

¹ ассистент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-0533-5654. E-mail: svetori82@mail.ru

² студентка, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: anya.kazakova-a-v@yandex.ru

Аннотация. Одной из задач экологии на современном этапе является анализ влияния факторов окружающей среды на здоровье населения и прогнозирование его состояния при различных тенденциях в изменении антропогенного воздействия. Эффективный инструмент решения данной задачи средствами математики – использование регрессионных моделей. В работе представлен анализ взаимосвязи степени загрязнения атмосферного воздуха Кировской области и уровня заболеваемости подросткового населения региона болезнями органов дыхания с помощью нелинейных регрессионных моделей. Установлено, что статистически значимый вклад в рассматриваемую заболеваемость вносят летучие органические соединения и углеводороды (без летучих органических соединений). Построенные нелинейные модели соответствуют критериям, характеризующим их адекватность и значимость, и обеспечивают обоснованное прогнозирование роста изучаемой заболеваемости во времени.

Ключевые слова: нелинейная регрессия, математические модели.

Одной из основных проблем экологии человека является оценка воздействия факторов окружающей среды на здоровье населения [5; 13]. Исследования, посвященные изучению данной проблемы, осуществляются с привлечением разнообразных научных методов. Общим направлением, характерным для такого рода исследований, является применение корреляционно-регрессионного анализа [13].

С помощью регрессионных моделей устанавливается связь факторов окружающей среды и уровня распространения заболеваний, теснота обнаруженной связи оценивается методами корреляционного анализа [2]. Помимо анализа регрессионные модели используются для прогнозирования тенденции изменения изучаемой заболеваемости, например, под влиянием санитарно-гигиенических мероприятий, направленных на снижение и предупреждение антропогенного загрязнения атмосферного воздуха [9]. Изложенное выше дает основание считать регрессионные модели инструментом анализа и прогнозирования в экологии.

Существенное место среди упоминаемых исследований занимает изучение влияния загрязнения атмосферного воздуха на состояние здоровья всех групп населения, в том числе подросткового. Состояние здоровья подрастающего поколения особенно актуально, поскольку составляет основу социально-экономического, трудового и репродуктивного потенциала общества [4; 10]. Организм подростков особо чувствителен к неблагоприятным воздействиям окружающей среды в связи с тем, что происходящие у них возрастные изменения снижают адаптационные возможности взрослого организма [6]. Исследователи отмечают увеличение количества подростков с болезнями органов дыхания (БОД), кожи и подкожной клетчатки, мочеполовой системы и другими экологозависимыми болезнями в современных условиях [1; 4; 13].

Динамика экологозависимой заболеваемости подросткового населения рассмотрена в исследованиях на территории Приморского края [1; 2], Иркутской области [4; 5; 11], г. Самары [7, 9], г. Чебоксары [10] и некоторых других субъектов РФ. Из перечисленных работ в исследованиях [2; 4; 7] используются линейные регрессионные модели для анализа и прогнозирования распространения БОД подрастающего поколения в связи с загрязнением воздушной среды. В одной из наших предыдущих работ [12] отмечено, что нелинейные регрессионные модели могут представлять более значимый вариант моделирования, например в силу того обстоятельства, что многие явления в экологии носят нелинейный характер.

БОД занимают первое место в структуре общей заболеваемости населения РФ [2]. Высокий уровень указанной заболеваемости объясняется влиянием различных факторов, в частности экологических. Цель настоящего исследования – определить зависимость состояния атмосферного воз-

духа и первичной заболеваемости подросткового населения Кировской области БОД на основе нелинейных регрессионных моделей.

Информационной базой исследования явились статистические данные официальных сайтов правительства Кировской области, Кировстата и Роспотребнадзора за 2002–2017 гг. Математическое моделирование было реализовано с помощью корреляционно-регрессионного анализа с использованием программы MS Excel.

Было установлено, что статистически значимый вклад в формирование БОД подросткового населения области принадлежит летучим органическим соединениям (ЛОС) и углеводородам (без ЛОС). Рассмотрим детально анализ влияния загрязнения ЛОС y (тыс. тонн) воздушной среды Кировской области на первичную заболеваемость x (на 1 000 чел.) подросткового населения БОД.

Первоначально моделирование осуществлялось на основе линейного уравнения парной регрессии $y = 476,02 + 81,67x$. Статически значимые на уровне значимости $\alpha = 0,001$ характеристики данного уравнения следующие: коэффициент корреляции $r = 0,83$ и коэффициент детерминации $R^2 = 0,69$, расчетные значения критериев Фишера $F = 28,94$ и Стьюдента $t_b = 5,38$, $t_a = 8,77$.

Результаты моделирования с помощью нелинейных регрессионных моделей представлены в табл. 1.

Таблица 1

Оценка параметров нелинейных регрессионных моделей

Название и уравнение нелинейной регрессии, индекс детерминации R^2	Расчетные значения критериев Фишера F и Стьюдента t
Полиномиальная модель $\hat{y} = 53,24 + 346,01x - 34,61x^2$, $R^2 = 0,87$	$F = 38,8$, $t_{b1} = 5,14$, $t_{b2} = -3,97$, $t_a = 0,47$
Логарифмическая модель $\hat{y} = 320,52 - 203,8x + 994,89 \ln x$, $R^2 = 0,9$	$F = 54,57$, $t_{b1} = -3,56$, $t_{b2} = 5,06$, $t_a = 7,23$
Полулогарифмическая модель $\hat{y} = 412,54 + 301,97 \ln x$, $R^2 = 0,8$	$F = 50,74$, $t_b = 7,12$, $t_a = 8,3$
Обратная модель $\hat{y} = \frac{1}{0,0019 - 0,00016x}$, $R^2 = 0,61$	$F = 20,48$, $t_b = -4,53$, $t_a = 15,21$
Обратная параболическая модель $\hat{y} = \frac{1}{0,0029 - 0,00075x + 7,69 \cdot 10^{-5}x^2}$, $R^2 = 0,81$	$F = 25,89$, $t_{b1} = -4,49$, $t_{b2} = 3,57$, $t_a = 10,29$
Гиперболическая модель $\hat{y} = 1094,73 - \frac{968,88}{x}$, $R^2 = 0,87$	$F = 87,58$, $t_b = -9,36$, $t_a = 27,29$
Модель $\hat{y} = \frac{x}{0,0016 + 0,00081x}$, $R^2 = 0,93$	$F = 166,16$, $t_b = 12,89$, $t_a = 7,12$
Степенная модель $\hat{y} = 459,48 \cdot x^{0,42}$, $R^2 = 0,77$	$F = 42,52$, $t_b = 6,52$, $t_a = 80,94$
Показательная модель $\hat{y} = 503,23 \cdot 1,12^x$, $R^2 = 0,66$	$F = 24,73$, $t_b = 4,97$, $t_a = 76,44$

Параметры полулогарифмической, обратной, обратной параболической, гиперболической, степенной, показательной моделей и модели вида $\hat{y} = \frac{x}{a + bx}$ статистически значимы на уровне значимости $\alpha = 0,001$. Проверим, что случайные остатки для данных моделей распределены по нормальному закону распределения, не автокоррелированы и гомоскедастичны.

В связи с небольшим количеством наблюдений соответствие случайных остатков нормальному закону распределения установим с помощью коэффициентов асимметрии и эксцесса. Тест Дарбина – Уотсона позволит определить наличие или отсутствие автокорреляции в остатках (верх-

ная граница указанного критерия $D - W_u = 1,36$). Проверку выполнения требования гомоскедастичности случайных остатков осуществим на основе теста ранговой корреляции Спирмена.

Оценка случайных остатков представлена в табл. 2.

Таблица 2

Анализ случайных остатков

Вид модели	Коэффициенты асимметрии A и эксцесса E	Критерий Дарбина - Уотсона $D - W$	Коэффициент корреляции рангов Спирмена ρ , расчетное значение t_ρ
Линейная	$A = 0,39, E = 0,54$	$D - W = 1,12$	$\rho = -0,11, t_\rho = -0,4$
Полулогарифм.	$A = 0,73, E = 1,45$	$D - W = 1,29$	$\rho = -0,04, t_\rho = -0,16$
Обратная	$A = 0,45, E = 0,77$	$D - W = 1,2$	$\rho = -0,16, t_\rho = -0,6$
Обратная параболическая	$A = 0,37, E = 0,74$	$D - W = 2,22$	$\rho = -0,1, t_\rho = -0,35$
Гиперболическая	$A = 0,97, E = 2,11$	$D - W = 1,59$	$\rho = -0,19, t_\rho = -0,71$
$\hat{y} = \frac{x}{a + bx}$	$A = 0,007, E = 0,7$	$D - W = 1,46$	$\rho = 0,08, t_\rho = 0,3$
Степенная	$A = 0,2, E = 0,95$	$D - W = 1,35$	$\rho = -0,12, t_\rho = -0,43$
Показательная	$A = -0,01, E = 0,46$	$D - W = 1,14$	$\rho = -0,34, t_\rho = -1,29$

На основе реализованного анализа делаем вывод, что случайные остатки обратной параболической модели и модели вида $\hat{y} = \frac{x}{a + bx}$ распределены по нормальному закону распределения, не автокоррелированы и гомоскедастичны.

Дальнейший выбор наилучшей функции регрессии осуществлялся с использованием средней относительной ошибки аппроксимации \bar{A} . Для модели $\hat{y} = \frac{x}{0,0016 + 0,00081x}$ данный показатель

$\bar{A} = 6,03\%$, для обратной параболической – $\bar{A} = 7,3\%$. Указанные значения не превосходят 10%, следовательно, можно сделать вывод, что обе модели подобраны качественно и могут быть использованы для обоснованного прогноза. Например, согласно официальным статистическим данным [8], выбросы ЛОС в атмосферу Кировской области в 2017 г. составили 3,669 тыс. тонн. Следовательно, в указанном году прогнозируемое значение первичной заболеваемости БОД подросткового населения области составляет 802,5 случаев на 1 000 человек.

В заключение отметим, что результаты проведенного исследования согласуются с работами других ученых. Например, коллективом авторов [3] установлено, что превышение предельно допустимой концентрации формальдегида, бенз(а)пирена и некоторых других загрязнителей атмосферного воздуха приводит к задержке физического развития подростков г. Кирова.

Список литературы

1. Измайлова О. А. и др. Гигиенические аспекты распространенности экологозависимых заболеваний детей и подростков Приморского края / О. А. Измайлова, П. Ф. Куку, М. В. Ярыгина, В. Г. Морева, В. Ю. Ананьев, А. Б. Косолапов // Гигиена и санитария. 2016. № 95 (11). С. 1075–1079.
2. Куку П. Ф. и др. Эколого-гигиенические аспекты распространенности болезней органов дыхания у подростков и детей Приморского края / П. Ф. Куку, Б. И. Гельцер, М. В. Ярыгина, С. Н. Бениова, Т. В. Горборукова, В. Г. Морева, Н. С. Шитер, К. М. Сабирова, М. А. Мезенцева // Гигиена и санитария. 2016. № 95 (8). С. 749–753.
3. Кузнецова Д. А., Сизова Е. Н., Циркин В. И. Особенности влияния техногенного загрязнения на физическое развитие подростков в условиях Европейского Севера и средних широт // Экология человека. 2015. № 11. С. 3–12.
4. Кулеш Д. В. и др. Региональные экологические и социально-экономические аспекты заболеваемости подросткового населения в условиях проживания в промышленных центрах / Д. В. Кулеш, С. И. Колесников, В. В. Долгих, С. В. Шойко, Н. Н. Абашин, А. Г. Черкашина, Л. Н. Лебедева // Вестник РАМН. 2013. № 68 (3). С. 62–67.

5. Лисецкая Л. Г. и др. Оценка степени загрязненности воздуха и патология верхних дыхательных путей у подростков урбанизированных территорий Иркутской области / Л. Г. Лисецкая, Л. А. Дедкова, И. В. Тихонова, Н. А. Тараненко // Бюллетень ВСНЦ СО РАМН. 2013. № 3 (91). Ч. 1. С. 91–95.

6. Лыков И. Н., Шестакова Г. А., Клименко Е. А. Оценка воздействия загрязнения окружающей среды тяжелыми металлами на физическое развитие и состояние функциональных систем организма подростков // Экология человека. 2006. № 4. С. 10–15.

7. Мешков Н. А. и др. Оценка обусловленности заболеваемости населения города Самары воздействием факторов среды обитания / Н. А. Мешков, Е. А. Вальцева, Ю. И. Баева, Е. А. Крылицына // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 2 (2). С. 300–306.

8. О состоянии окружающей среды Кировской области в 2017 году: региональный доклад. URL: <http://www.kirovreg.ru/econom/ecology/Региональный%20доклад%202017.pdf> (дата обращения: 03.08.2018).

9. Сазонова О. В. и др. Среда обитания и заболеваемость населения Самары болезнями органов дыхания / О. В. Сазонова, О. Н. Исакова, И. Ф. Сухачева, М. В. Комарова // Гигиена и санитария. 2014. № 4. С. 33–36.

10. Самойлова А. В., Сусликов В. Л., Губанова Е. А. Влияние эколого-геохимических факторов на иммунную систему девушек г. Чебоксары // Вестник Чувашского университета. 2014. № 2. С. 343–346.

11. Тихонова И. В., Ефимова Н. В. Частота хронической патологии верхних дыхательных путей у подростков: роль некоторых факторов // Гигиена и санитария. 2012. № 6. С. 51–53.

12. Торопова С. И. Изучение нелинейной регрессии на занятиях по математике со студентами-экологами // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования : материалы Междунар. науч.-практ. конф. Рязань, 2016. С. 487–493.

13. Ярыгина М. В., Кикун П. Ф., Завьялова Я. С. Экологозависимые заболевания детского и подросткового населения в Приморском крае // Здоровье. Медицинская экология. Наука. 2016. № 3 (66). С. 65–68.

Nonlinear regression models as a tool of analysis and prediction in ecology

S. I. Toropova¹, A. V. Kazakova²

¹ assistant of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.
ORCID: 0000-0003-0533-5654. E-mail: svetori82@mail.ru

² student, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: anya.kazakova-a-v@yandex.ru

Abstract. Currently one of the ecological problems is to analyze the influence of environmental factors on the health of the population and forecast its state under different trends in the modification of anthropogenic impact. The use of regression models is an effective tool for solving this problem by means of mathematics. The paper presents an analysis of the correlation between the degree of atmospheric air pollution in the Kirov region and the incidence of tuberculosis diseases in the adolescent population of the region using nonlinear regression models. It has been established that volatile organic compounds (VOCs) and hydrocarbons (without VOCs) make a statistically significant contribution to the considered morbidity. The constructed nonlinear models meet the criteria characterizing their adequacy and significance, and provide a justified forecast for the growth of the studied morbidity over time.

Keywords: nonlinear regression, mathematical model.

Reference

1. Izmajlova O. A. et al. *Gigienicheskie aspekty rasprostranennosti ehkologozavisimyh zabolevanij detej i podrostkov Primorskogo kraja* [Hygienic aspects of the prevalence of ecologically dependent diseases of children and adolescents in Primorsky region] / O.A. Ismailova, P. F. Kiku, M. V. Yarygina, V. G. Moreva, V. Yu. Anan'ev, A.B. Kosolapov // *Gigiena i sanitariy* – Hygiene and sanitation. 2016, No. 95 (11), pp. 1075–1079.

2. Kiku P. F. et al. *EHkologo-gigienicheskie aspekty rasprostranennosti boleznej organov dyhaniya u podrostkov i detej Primorskogo kraja* [Ecological-hygienic aspects of diseases of the respiratory system of children and adolescents in Primorsky region] / P. F. Kiku, B. I. Geltzer, M. V. Yarygina, S. N. Beniova, T. V. Gorburokova, G. V. Moreva, N.S. Shiter, K. M. Sabirova, M. A. Mezentseva // *Gigiena i sanitariy* – Hygiene and sanitation. 2016, No. 95 (8), pp. 749–753.

3. Kuznecova D. A., Sizova E. N., Cirkin V. I. *Osobennosti vliyaniya tekhnogennogo zagryazneniya na fizicheskoe razvitie podrostkov v usloviyah Evropejskogo Severa i srednih shirot* [Features of influence of technogenic pollution on physical development of teenagers in the conditions of the European North and middle latitudes] // *EHkologiya cheloveka* - Ecology of the person. 2015, No. 11, pp. 3–12.

4. Kulesh D. V. et al. *Regional'nye ehkologicheskie i social'no-ehkonomicheskie aspekty zabolevaemosti podrostkovogo naseleniya v usloviyah prozhivaniya v promyshlennykh centrakh* [Regional environmental and socio-economic aspects of morbidity of the teenage population in the conditions of living in industrial centers] / D. V. Kulesh, S. I. Kolesnikov, V. V. Dolgikh, S. V. Shoyko, N. N. Abashin, A. G. Cherkashina, L. N. Lebedeva // *Vestnik RAMN* – Herald of RAMS. 2013, No. 68 (3), pp. 62–67.

5. Liseckaya L. G. et al. *Ocenka stepeni zagryaznennosti vozduha i patologiya verhnih dyhatel'nykh putej u podrostkov urbanizirovannykh territorij Irkutskoj oblasti* [Assessment of the degree of air pollution and pathology of the

upper respiratory tract among adolescents in urbanized areas of the Irkutsk region] / L. G. Lisetskaya, L. A., Dedkova, I. V. Tikhonova, N.A. Taranenko // *Byulleten' VSNC SO RAMN* – Bulletin of East Siberian scientific center SB RAMS. 2013, № 3 (91), part 1, pp. 91–95.

6. Lykov I. N., SHeStakova G. A., Klimenko E. A. *Ocenka vozdeystviya zagryazneniya okruzhayushchej sredy tyazhelymi metallami na fizicheskoe razvitie i sostoyanie funkcional'nyh sistem organizma podrostkov* [Evaluation of the impact of environmental pollution by heavy metals on the physical development and functional systems of adolescents] // *EHkologiya cheloveka* – Ecology of human. 2006, No. 4, pp. 10–15.

7. Meshkov N. A. et al. *Ocenka obuslovlennosti zaboлеваemosti naseleniya goroda Samary vozdeystviem faktorov sredy obitaniya* [Evaluation of the condition of morbidity of the population of the city of Samara the influence of factors of environment] / N. A. Meshkov, E. A. Valcheva, Yu. I. Baeva, E. A. Krylitsyna // *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk* – News of the Samara Scientific center, Russian Academy of Sciences. 2017, vol. 19, No. 2 (2), pp. 300–306.

8. *O sostoyanii okruzhayushchej sredy Kirovskoj oblasti v 2017 godu: regional'nyj doklad* – On the state of the environment of the Kirov region in 2017: regional report. Available at: [http://www.kirovreg.ru/econom/ecology/Региональный%20 доклад%202017.pdf](http://www.kirovreg.ru/econom/ecology/Региональный%20доклад%202017.pdf)(date accessed: 03.08.2018).

9. Sazonova O. V. et al. *Sreda obitaniya i zaboлеваemost' naseleniya Samary boleznymi organov dyhaniya* [Habitat and morbidity of the population of Samara respiratory diseases] / O. V. Sazonova, O. N. Isakova, I. F. Sukhacheva, M. V. Komarova // *Gigiena i sanitariy* – Hygiene and sanitation. 2014, No. 4, pp. 33–36.

10. Samojlova A. V., Suslikov V. L., Gubanova E. A. *Vliyanie ehkologo-geohimicheskikh faktorov na immunnuyu sistemu devushek g. Cheboksary* [Influence of ecological and geochemical factors on the immune system of girls from Cheboksary, Russia] // *Vestnik CHuvashskogo universiteta* – Herald of the Chuvash University. 2014, No. 2, pp. 343–346.

11. Tihonova I. V., Efimova N. V. *CHastota hronicheskoy patologii verhnih dyhatel'nyj putej u podrostkov: rol' nekotoryh faktorov* [Frequency of chronic upper respiratory diseases in adolescents: the role of some factors] // *Gigiena i sanitariy* – Hygiene and sanitation. 2012, No. 6, pp. 51–53.

12. Toropova S. I. *Izuchenie nelinejnoj regressii na zanyatiyah po matematike so studentami-ehkologami* [Study of nonlinear regression in mathematics classes with students-ecologists] // *Matematika: fundamental'nye i prikladnye issledovaniya i voprosy obrazovaniya : materialy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* – Mathematics: fundamental and applied research and education: proceedings of the international scientific- prakt. conf. Ryazan. 2016. Pp. 487–493.

13. YArgina M. V., Kiku P. F., Zav'yalova YA. S. *EHkologozavisimye zabolevaniya detskogo i podrostkovogo naseleniya v Primorskom krae* [Ecologically dependent diseases of children and adolescents in Primorsk region] // *Zdorov'e. Medicinskaya ehkologiya. Nauka* – Health. Medical ecology. Science. 2016, № 3 (66), pp. 65–68.

К вопросу о формировании научно-исследовательской деятельности студентов-экологов средствами математики

С. И. Торопова¹, Т. М. Мохина²

¹ ассистент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-0533-5654. E-mail: svetori82@mail.ru

² студентка, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: tmoxina@yandex.ru

Аннотация. В работе установлено, что одним из существенных требований, предъявляемых работодателями к профессиональной подготовке будущих экологов, является приобщение студентов к осуществлению самостоятельных научных исследований. Обосновано, что наиболее эффективным направлением реализации научно-исследовательской деятельности студентов-экологов средствами математики является совместная с преподавателем работа над прикладными исследовательскими проектами в области экологии. Рассмотрен пример подобного проекта, направленного на классификацию районов Кировской области по определенным экологическим показателям с помощью многомерных статистических методов (кластерного анализа, метода корреляционных плед, ранжирования) на пять групп: стабильно благополучные, стабильно неблагополучные, районы с наблюдаемым улучшением экологической ситуации, территории с ухудшением состояния окружающей среды, районы, характеризующиеся умеренными значениями анализируемых показателей и незначительными колебаниями между улучшением и ухудшением экологической ситуации.

Ключевые слова: научно-исследовательская деятельность, прикладные исследовательские проекты, студенты-экологи.

Одним из показателей качества высшего образования является востребованность выпускников вузов на рынке труда. Анализ ряда исследований [1; 5; 8; 11], посвященных изучению требований работодателей к профессиональной подготовке будущих экологов, позволил выявить наиболее востребованные ими профессиональные компетенции в области научно-исследовательской деятельности, в частности умение самостоятельно анализировать элементы окружающей среды в полевых и лабораторных условиях, описывать, оформлять документально и представлять результаты исследования; выбирать и применять необходимые инструменты для анализа и обработки информации по вопросам экологии; способность проводить самостоятельные, оригинальные, научно и практически значимые исследования в предметной сфере [5; 11]. К числу приоритетных задач, стоящих в современных условиях перед вузами с точки зрения работодателей, относятся проведение совместных научных исследований, стимулирование творческой активности и исследовательской деятельности студентов [1].

С учетом представленных запросов работодателей необходимой и существенной составляющей повышения конкурентоспособности студентов-экологов является овладение ими исследовательскими компетенциями.

В соответствии с действующими ФГОС ВО экологических направлений подготовки исследовательские компетенции представлены как составляющие профессиональных компетенций наряду с компетенциями в области производственно-технологической, проектной, организационно-управленческой и других видах деятельности.

Проиллюстрируем сказанное на примере ФГОС направления подготовки «Техносферная безопасность» [13], согласно которому у выпускника должны быть сформированы следующие профессиональные компетенции, соответствующие научно-исследовательской деятельности: способность принимать участие в научно-исследовательских разработках по профилю подготовки, т. е. систематизировать информацию по теме исследований, принимать участие в экспериментах, обрабатывать полученные данные (ПК-20); способность решать задачи профессиональной деятельности в составе научно-исследовательского коллектива (ПК-21); способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач (ПК-22); способность применять на практике навыки проведения и описания исследований, в том числе экспериментальных (ПК-23).

Часть общекультурных компетенций ориентирована на формирование научно-исследовательских умений и навыков. Например, способность работать самостоятельно (ОК-8); способность к познавательной деятельности (ОК-10); способность к абстрактному и критическому мышлению, к

принятию нестандартных решений и разрешению проблемных ситуаций (ОК-11); использование основных программных средств, умение пользоваться глобальными информационными ресурсами, способность применять навыки работы с информацией из различных источников для решения профессиональных и социальных задач (ОК-12).

В одной из наших предыдущих работ [12] мы рассматривали возможные направления реализации научно-исследовательской деятельности студентов-экологов средствами математики, в частности решение задач профессиональной направленности исследовательского и олимпиадного характера, подготовка совместных с преподавателем публикаций, реализация прикладных исследовательских проектов в области экологии. Последнему направлению уделялось особое внимание, поскольку в процессе самостоятельного исследования студенты осуществляют создание объективно нового научного знания и осваивают структуру научно-исследовательской деятельности, начиная с формулирования цели, задач, гипотезы исследования, заканчивая оформлением и представлением его результатов.

В упоминаемой работе представлен пример прикладного исследовательского проекта, направленного на классификацию районов Кировской области по экологическому состоянию с помощью методов кластерного анализа на пять групп: районы со стабильно благополучной ситуацией (Афанасьевский, Верхнекамский, Мурашинский, Лузский, Опаринский, Пижанский, Уржумский и Юрьянский); районы с наблюдаемым улучшением экологической ситуации (Вятскополянский, Кикнурский, Котельничский, Оричевский и Яранский); районы, на территории которых зафиксировано ухудшение экологической обстановки (Кильмезский, Омутнинский, Подосиновский); районы со стабильно неблагоприятной ситуацией (Арбажский, Богородский, Лебяжский, Орловский, Санчурский и Фаленский); районы, характеризующиеся незначительными колебаниями между улучшением и ухудшением ситуации (все остальные).

Однако многомерная классификация может быть реализована с помощью других методов математической статистики, например ранжирования и метода корреляционных плеяд. В связи с тем что большие возможности для формирования исследовательских навыков студентов представляет решение задач разными методами, было принято решение о продолжении данного исследования с привлечением указанных статистических методов.

В исследовании [7] подчеркивается важность предварительной классификации загрязняющих веществ и источников их поступления в окружающую среду перед анализом их опасности для здоровья населения. В указанной работе с помощью ранжирования осуществлено распределение химических веществ с учетом объемов их поступления в окружающую среду Красноярского края и его территорий по канцерогенной опасности промышленных выбросов. Метод ранжирования используется также для группировки территорий других субъектов РФ, в частности районов Северо-Западного федерального округа по экологической ситуации [6], муниципальных образований Смоленской области по значению интегрального показателя качества воды [9], территорий г. Казани по уровню загрязнения тяжелыми металлами снежного покрова и почвы [10].

Представленное выше распределение территорий нашего региона на пять кластеров согласуется с результатами ранжирования, реализованного с помощью табличного процессора MS Excel.

Метод корреляционных плеяд П. В. Терентьева согласно работе [2] эффективен при изучении разных по силе зависимостей, в том числе слабых корреляционных связей, преобладающих во взаимоотношениях человека с окружающей природной средой. Данный метод используется, например, в исследованиях, посвященных классификации территории Приморского края на зоны распространенности болезней определенного класса. В работе [14] рассматриваются болезни системы кожи как индикатора экологозависимой заболеваемости населения от места проживания, в источниках [3] и [2] – болезни органов дыхания и выделительной системы соответственно.

В настоящем исследовании результаты метода корреляционных плеяд согласуются с данными кластерного анализа, в частности выделение корреляционных плеяд при пороговом значении $r = 0,98$ соответствует разбиению на шесть кластеров.

В заключение исследования отметим, что все три рассмотренных метода многомерной классификации дополняют друг друга. Кластерный анализ является наиболее универсальным из них, однако его применение ограничено двумя существенными условиями. Во-первых, использованием специализированного программного обеспечения, отсутствующего в свободном доступе и требующего специальных знаний и навыков. Во-вторых, согласно источнику [2], пакеты прикладных статистических программ при их высокой технологичности могут быть недостаточно эффективны в процессе анализа слабых связей, свидетельствующих о косвенном воздействии природной среды на человека.

Преимуществом метода ранжирования является его простота, возможность реализации с использованием общедоступного программного обеспечения; недостатком – невозможность вычисления расстояния между рангами. Например, данный метод не обеспечивает решение задачи по определению того факта, на сколько объект исследования, которому присвоен первый ранг, превосходит объекты со вторым, третьим и последующими рангами. Установление меры близости изучаемых объектов осуществляется с помощью двух других упоминаемых методов.

Метод корреляционных плеяд относится к числу эвристических приемов, труднореализуемых с помощью программного обеспечения. Его применение связано с определенными вычислительными сложностями. Например, в настоящем исследовании использование данного метода было основано на анализе полной корреляционной матрицы, содержащей 1 600 элементов (размер указанной матрицы равен 40×40 по числу изучаемых территорий: г. Киров и 39 районов Кировской области).

Список литературы

1. Борисова Е. В., Пузырев Н. М. Вопросы взаимодействия работодателей и вуза в подготовке бакалавров направления «Техносферная безопасность» // Современная наука. 2016. № 2. С. 33–38.
2. Веремчук Л. В., Вязова А. В. Метод корреляционных плеяд в определении структуры зависимости заболеваемости выделительной системы с факторами окружающей среды // Вестник новых медицинских технологий. 2005. Т. XII. № 3–4. С. 39–41.
3. Кику П. Ф., Ананьев В. Ю., Горборукова Т. В. Распространение болезней органов дыхания в биоклиматических зонах Приморского края // Экология человека. 2011. № 6. С. 43–48.
4. Лавриненко П. А., Рыбаков Д. А. Сравнительный анализ региональных различий в сферах здоровья населения, экологии и здравоохранения // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2015. № 5 (41). С. 198–210.
5. Малькова И. Л. Выявление приоритетных компетенций студентов направления подготовки «Экология» в рамках проекта «Тьюнинг» // Вестник Удмуртского университета. 2012. Вып. 3. С. 147–154.
6. Молчанова Е. В. Оценка региональных медико-эколого-экономических процессов // Экономика российских регионов. 2009. С. 123–130.
7. Новиков С. М. и др. Сравнительная оценка канцерогенных рисков здоровью населения при многосредовом воздействии химических веществ / С. М. Новиков, Т. А. Шашина, Н. С. Додина, В. А. Кислицин, Л. М. Воробьева, Д. В. Горяев, И. В. Тихонова, С. В. Куркатов // Гигиена и санитария. 2015. № 94 (2). С. 88–92.
8. Попова Л. В. Концептуальные подходы к определению базового содержания высшего профессионального экологического образования (естественнонаучное направление) // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 2. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6098> (дата обращения: 11.05.2018).
9. Сидоренкова Л. М. и др. Интегральная оценка качества питьевой воды централизованных систем водоснабжения Смоленской области / Л. М. Сидоренкова, Е. Г. Майорова, В. А. Барсуков, А. В. Авчинников // Вестник Смоленской государственной медицинской академии. 2017. Т. 16. № 1. С. 165–172.
10. Степанова Н. В., Валеева Э. Р., Фомина С. В. Подходы к ранжированию городской территории по уровню загрязнения тяжелыми металлами // Гигиена и санитария. 2015. № 94 (5). С. 56–61.
11. Стурман В. И., Малькова И. Л., Захарова С. А. Анализ рынка труда экологов как необходимое условие формирования образовательных программ направления подготовки «Экология и природопользование» // Вестник Удмуртского университета. 2012. Вып. 4. С. 179–183.
12. Торопова С. И. Математический аппарат как источник формирования и реализации научно-исследовательской деятельности студентов-экологов // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. 2018. № 7. С. 33–42.
13. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/8348> (дата обращения: 01.11.2017).
14. Ярыгина М. В., Кику П. Ф., Горборукова Т. В. Особенности распространенности болезней системы кожи как индикатора экологозависимой заболеваемости населения в биоклиматических зонах Приморского края // Гигиена и санитария. 2015. № 94 (7). С. 128–134.

On the question of the formation of scientific-research activity of students-ecologists by means of mathematics

S. I. Toropova¹, T. M. Mohina²

¹ assistant of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.

ORCID: 0000-0003-0533-5654. E-mail: svetori82@mail.ru

² student, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: tmoxina@yandex.ru

Abstract. The paper found that one of the essential employers' requirements for the training of future ecologists is the involvement of students in independent scientific research. It is substantiated that the most effective direction of realization of students-ecologists' scientific research activity by means of mathematics is teamwork on the applied research projects in the field of ecology with the teacher. An example of a similar project is given. It is aimed at classifying districts of the Kirov region according to certain environmental indicators using multi-dimensional statistical methods (cluster analysis, method of correlation pleiades, ranking) into five groups. They are stably prosperous, stably unsuccessful, areas with observable environmental improvement, territories with deterioration of the environment and areas characterized by moderate values of the analyzed indicators and minor fluctuations between environmental improvement and degradation.

Keywords: research activity, tasks of professional ecological orientation, applied research projects, students-ecologists.

Reference

1. Borisova E. V., Puzyrev N. M. *Voprosy vzaimodejstviya rabotodatelej i vuza v podgotovke bakalavrov napravleniya «Tekhnosfernaya bezopasnost'»* [Issues of interaction between employers and universities in the preparation of bachelors in direction "Technosphere safety"] // *Sovremennaya nauka – Modern science*. 2016, No. 2, pp. 33–38.
2. Veremchuk L. V., Vyazova A. V. *Metod korrelyacionnyh pleyad v opredelenii struktury zavisimosti zaboлеваemosti vydelitel'noj sistemy s faktorami okruzhayushchej sredy* [Method of correlation pleiades in determining the dependence structure of morbidity excretory system and environmental factors] // *Vestnik novykh medicinskih tekhnologij – Herald of new medical technologies*. 2005, vol. XII, № 3-4, pp. 39–41.
3. Kiku P. F., Anan'ev V. YU., Gorborkova T. V. *Rasprostranenie boleznej organov dyhaniya v bioklimaticheskikh zonah Primorskogo kraja* [Wide-spread diseases of the respiratory system in bioclimatic zones of the Primorsk region] // *EHkologiya cheloveka – Human Ecology*. 2011, No. 6, pp. 43–48.
4. avrinenko P. A., Rybakov D. A. *Sravnitel'nyj analiz regional'nyh razlichij v sferah zdorov'ya naseleniya, ehkologii i zdravoohraneniya* [Comparative analysis of regional differences in the areas of health, ecology and healthcare] // *EHkonomicheskie i social'nye peremeny: fakty, tendencii, prognoz – Economic and social changes: facts, trends, forecast*. 2015, № 5 (41), pp. 198–210.
5. Mal'kova I. L. *Vyyavlenie prioritetnyh kompetencij studentov napravleniya podgotovki «EHkologiya» v ramkah proekta «Tyuning»* [Identification of priority competences of students in the field of "Ecology" within the project "Tuning"] // *Vestnik Udmurtskogo universiteta – Herald of the Udmurt University*. 2012, vol. 3, pp. 147–154.
6. Molchanova E. V. *Ocenka regional'nyh mediko-ehkologo-ehkonomicheskikh processov* [Assessment of regional medical, ecological and economic processes] // *EHkonomika Rossijskikh regionov – Economics of Russian regions*. 2009, pp. 123–130.
7. Novikov S. M. et al. *Sravnitel'naya ocenka kancerogennyh riskov zdorov'yu naseleniya pri mnogosredovom vozdeystvii himicheskikh veshchestv* [Comparative evaluation of carcinogenic risks to public health when multiple effects of chemicals] / Novikov S. M., Shashina T. A., N. S. Dodina, V. A. Kislitsin, L. M. Vorob'eva, D. V. Goryaev, I. V. Tikhonova, S. V. Kurkatov // *Gigiena i sanitariya – Hygiene and sanitation*. 2015, No. 94 (2), pp. 88–92.
8. Popova L. V. *Konceptual'nye podhody k opredeleniyu bazovogo sodержaniya vysshego professional'nogo ehkologicheskogo obrazovaniya (estestvennonauchnoe napravlenie)* [Conceptual approaches to the definition of the basic content of higher professional environmental education (natural science direction)] // *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya – Modern problems of science and education*. 2012, No. 2. Available at: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6098> (date accessed: 11.05.2018).
9. Sidorenkova L. M. et al. *Integral'naya ocenka kachestva pit'evoy vody centralizovannykh sistem vodosnabzheniya Smolenskoj oblasti* [Integral assessment of drinking water quality of centralized water supply in Smolensk region] / L. M. Sidorenkova, E. G. Mayorova, V. A. Barsukov, A. V. Avchinnikov // *Vestnik Smolenskoj gosudarstvennoj medicinskoj akademii – Herald of the Smolensk State Medical Academy*. 2017, vol. 16, No. 1, pp. 165–172.
10. Stepanova N. V., Valeeva E. H. R., Fomina S. V. *Podhody k ranzhirovaniyu gorodskoj territorii po urovnyu zagryazneniya tyazhelymi metallami* [Approaches to urban area ranking by the level of heavy metal pollution] // *Gigiena i sanitariya – Hygiene and sanitation*. 2015, No. 94 (5), pp. 56–61.
11. Sturman V. I., Mal'kova I. L., Zaharova S. A. *Analiz rynka truda ehkologov kak neobhodimoe uslovie formirovaniya obrazovatel'nykh programm napravleniya podgotovki «EHkologiya i prirodopol'zovanie»* – [The analysis of

the labor market of ecologists as a necessary condition for the formation of educational programs in the field of "Ecology and environmental management" // *Vestnik Udmurtskogo universiteta* – Herald of the University of Udmurt. 2012, vol. 4, pp. 179–183.

12. *Toropova S. I. Matematicheskij apparat kak istochnik formirovaniya i realizacii nauchno-issledovatel'skoj deyatel'nosti studentov-ehkologov* [Mathematical apparatus as a source of formation and realization of scientific-research activity of students-ecologists] // *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* – News of Volgograd State Pedagogical University. 2018, No. 7, pp. 33–42.

13. Federal state educational standard of higher education in the field of training 20.03.01 Technosphere safety. Available at: <http://минобрнауки.рф/документы/8348> (date accessed: 01.11.2017). (in Russ.)

14. *Yarygina M. V., Kiku P. F., Gorborkova T. V. Osobnosti rasprostranennosti boleznej sistemy kozhi kak indikatora ehkologozavisimoy zaboлеваemosti naseleniya v bioklimaticheskikh zonah Primorskogo kraja* [Peculiarities of prevalence of diseases of the skin as an indicator of ecologically dependent morbidity of the population in the bioclimatic zones of the Primorsk territory] // *Gigiena i sanitariya* – Hygiene and sanitation. 2015, No. 94 (7), pp. 128–134.

Модель взаимодействия разновозрастных групп занятых в экономике на примере Кировской области

И. О. Зыкова¹, С. В. Чучкалова²

¹магистрант I курса факультета экономики и финансов, Вятский государственный университет.

Россия, г. Киров. E-mail: zyкова_irinka@mail.ru

²кандидат экономических наук, доцент кафедры цифровых технологий в образовании,

Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: chuchkalova@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается применение математического моделирования при исследовании численности разновозрастных групп занятых в экономике региона. Была проведена идентификация имитационной модели, представленной системой дифференциальных уравнений. Для этого по статистическим данным Кировской области численно определялись производные. В результате были получены алгебраические уравнения для определения корректирующих параметров. При нахождении параметров модели использовался эконометрический анализ, компьютерные пакеты Maple, MS Excel. С помощью найденных параметров модели была проведена классификация взаимодействий разновозрастных групп экономически активного населения. Между занятыми в экономике возможны типы взаимодействий: отсутствие взаимного влияния, помощь, угнетение, дискриминация, конкуренция, партнерство. С помощью имитационных экспериментов были реализованы разные сценарии для получения прогноза численности рынка труда. Результаты исследования могут быть использованы при принятии управленческих решений в области социально-экономической политики в регионе.

Ключевые слова: имитационная модель, экономически активное население, идентификация модели.

В последние десятилетия при исследовании социально-экономических систем часто используют синергетический подход. Как известно, синергетика основана на идеях неравновесной термодинамики. Качественная теория динамических систем является адекватным математическим аппаратом изучения социально-экономических процессов [1]. В настоящее время становится актуальным использование биологических моделей, которые основаны на взаимосвязях популяций и потоках биомасс, для изучения процессов на рынке труда. В данной статье рассматривается одна из таких моделей.

В модели рассмотрены следующие группы населения: численность экономически активного населения в возрасте 15–29 лет, численность экономически активного населения в возрасте 30–49 лет, численность экономически активного населения в возрасте 50 лет и старше. Данные возрастные группы соответствуют трем категориям занятых: работникам с малым опытом работы, работникам со значительным опытом работы и занятым предпенсионного и пенсионного возраста.

Математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = b_1 + (K_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)x_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = b_2 + (K_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3)x_2 \\ \frac{\partial x_3}{\partial t} = b_3 + (K_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2)x_3 \end{cases} \quad (1),$$

где x_i – численность занятых i -й группы, t – переменная времени, b_i – коэффициенты миграционных потоков i -й группы, K_i – переток из экономически активного населения в неактивное, смертность, переход в следующую возрастную группу, α_{ij} – коэффициенты влияния группы i на группу j ; $i, j=1,2,3$ (одна из групп 15–29 лет, 30–49 лет, 50 лет и старше).

Всего модель содержит 12 параметров: $K_1, K_2, K_3, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, b_1, b_2, b_3$.

Имитационная модель была выполнена в пакете Ithink [5]. Начальные значения численности каждой из трех возрастных групп устанавливались согласно статистическим данным за 2013 г.: $x_1 = 147,13$; $x_2 = 313,45$; $x_3 = 179,75$ [2; 3].

Первоначальные значения 12 параметров модели (1) были найдены в процессе идентификации модели. Для этого с помощью пакета MS Excel для переменных x_1, x_2, x_3 , задающих численности разновозрастных групп занятых в экономике, по статистическим данным были подобраны уравнения трендов:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 1,77t^2 - 9,21t + 155,77; R_1^2 = 0,89; \\x_2(t) &= 1,68t^2 - 7,81t + 319,98; R_2^2 = 0,81; \\x_3(t) &= 3,71t^2 - 22,08t + 160,8; R_3^2 = 0,95,\end{aligned}$$

где t соответствует определенному году из временного отрезка 2013–2017 гг.

Далее находились производные x_1', x_2', x_3' по найденным уравнениям трендов:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 3,54t - 9,21; \\x_2'(t) &= 3,36t - 7,81; \\x_3'(t) &= 7,42t - 22,08.\end{aligned}\tag{2}$$

Подставляя в уравнения (2) вместо переменной t значения 1,...,4, получим численные значения производных x_1', x_2', x_3' для каждого года временного отрезка 2013–2016 гг. Для нахождения 12 параметров на основе системы (1) с использованием статистических данных была составлена система из 12 линейных уравнений:

$$\begin{cases} -5,67 = b_1 + (K_1 + \alpha_{12} * 313,453 + \alpha_{13} * 179,756) * 147,131 \\ -4,45 = b_2 + (K_2 + \alpha_{21} * 147,131 + \alpha_{23} * 179,756) * 313,453 \\ -14,56 = b_3 + (-K_3 + \alpha_{31} * 147,131 + \alpha_{32} * 313,453) * 179,756 \\ -2,13 = b_1 + (K_1 + \alpha_{12} * 312,228 + \alpha_{13} * 188,369) * 143,857 \\ -1,09 = b_2 + (K_2 + \alpha_{21} * 143,857 + \alpha_{23} * 188,369) * 312,228 \\ 7,24 = b_3 + (-K_3 + \alpha_{31} * 143,857 + \alpha_{32} * 312,228) * 188,369 \\ 1,41 = b_1 + (K_1 + \alpha_{12} * 310,472 + \alpha_{13} * 195,411) * 136,916 \\ 2,27 = b_2 + (K_2 + \alpha_{21} * 136,916 + \alpha_{23} * 195,411) * 310,472 \\ 0,18 = b_3 + (-K_3 + \alpha_{31} * 136,916 + \alpha_{32} * 310,472) * 195,411 \\ 4,95 = b_1 + (K_1 + \alpha_{12} * 315,959 + \alpha_{13} * 189,189) * 138,353 \\ 5,63 = b_2 + (K_2 + \alpha_{21} * 138,353 + \alpha_{23} * 189,189) * 315,959 \\ 7,6 = b_3 + (-K_3 + \alpha_{31} * 138,353 + \alpha_{32} * 315,959) * 189,189 \end{cases}\tag{3},$$

где левые части равны численным значениям производных, а в правых частях подставлены статистические данные вместо переменных x_1, x_2, x_3 по соответствующим годам временного отрезка 2013–2016 гг.

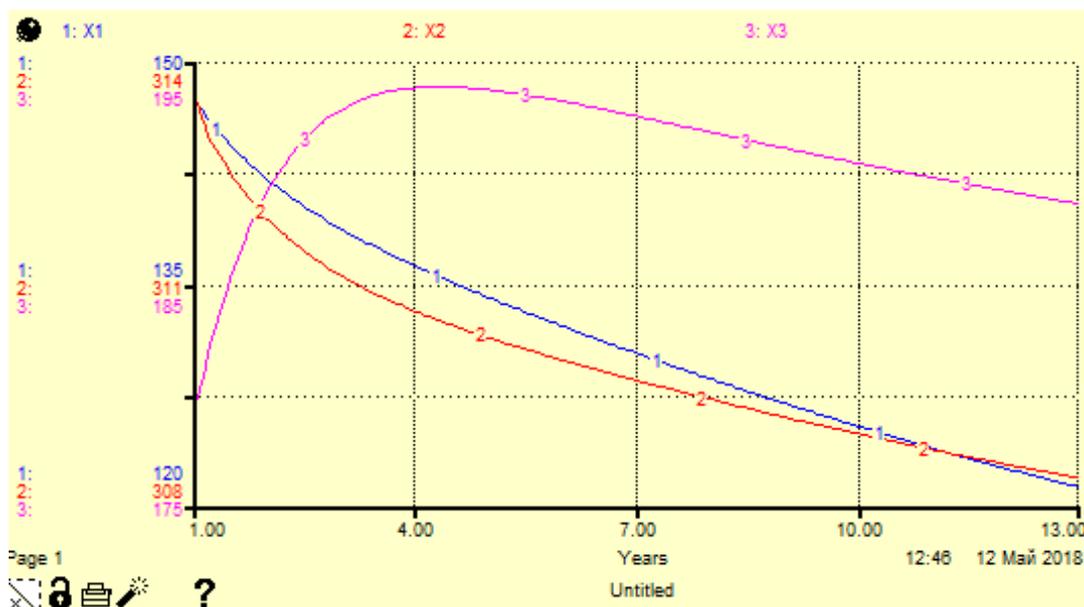
Решение системы (3) было выполнено с помощью компьютерного пакета Maple. В табл. 1 представлены значения найденных параметров.

Таблица 1

Параметр	Значение
K_1	-2,478
K_2	-14,067
K_3	-2,797
α_{12}	0,006
α_{13}	0,002
α_{21}	0,007
α_{23}	-0,002
α_{31}	0,004
α_{32}	-0,014
b_1	33,306
b_2	418,721
b_3	182,999

С помощью критерия Рауса – Гурвица было проверено, что система (3) устойчива.

При запуске модели с найденными коэффициентами-параметрами были получены прогнозные значения до 2024 г. Результаты моделирования представлены на рисунке.



Графики изменения численности возрастных групп Кировской области

В соответствии с прогнозом численность экономически активного населения возрастных групп 15–29 и 30–49 лет Кировской области будет уменьшаться, численность группы 50 лет и старше в течение 5 лет будет увеличиваться по сравнению с 2013 годом, а затем ожидается тенденция сокращения численности данной возрастной группы. Согласно статистике в 2013 г. занятых в экономике 15–29 лет, 30–49 лет, 50 лет и старше составляет 147,13; 313,45; 179,75 тысячи человек соответственно, а к 2024 г. эти величины изменятся до 125,29; 308,96; 190,45 тысячи человек соответственно.

Результаты модельных расчетов незначительно отличаются от статистических данных. Были рассчитаны средние ошибки аппроксимации по каждой возрастной группе. Рассчитанные значения количества экономически занятого населения отличаются от фактических значений в среднем на 2–3%.

Под взаимодействиями занятых понимаются обобщенные социально-экономические механизмы, которые способны вызвать в той или иной степени взаимосвязанные изменения численности занятых различных возрастных групп. Эти взаимодействия в рамках данной модели можно описать по аналогии с взаимодействиями биологических популяций.

Представленная модель (1) может описывать различные типы взаимодействий между разновозрастными работниками. По аналогии с классификацией влияния одной популяции на другую можно определить варианты взаимоотношений занятых разных возрастных групп в регионе. Эти варианты представлены в табл. 2 [4, с. 444].

Таблица 2

Классификация взаимодействий разновозрастных специалистов в экономике региона

Тип взаимодействия в биологии	Тип взаимодействия на рынке труда	Влияние первой группы на вторую	Влияние второй группы на первую
Нейтрализм	Отсутствие влияния	0 ($\alpha_{ij} = 0$)	0 ($\alpha_{ji} = 0$)
Комменсализм	Помощь	+ ($\alpha_{ij} > 0$)	0 ($\alpha_{ji} = 0$)
Аменсализм	Угнетение	- ($\alpha_{ij} < 0$)	0 ($\alpha_{ji} = 0$)
Жертва-эксплуататор	Дискриминация	+ ($\alpha_{ij} > 0$)	- ($\alpha_{ji} < 0$)
Конкуренция	Конкуренция	- ($\alpha_{ij} < 0$)	- ($\alpha_{ji} < 0$)
Мутуализм	Партнерство	+ ($\alpha_{ij} > 0$)	+ ($\alpha_{ji} > 0$)

Примечание: «+» – увеличение (уменьшение) численности занятых одной группы вызывает увеличение (уменьшение) численности занятых другой группы; «0» – отсутствие влияния; «+» – увеличение (уменьшение) численности занятых одной группы вызывает увеличение (уменьшение) численности занятых другой группы [4].

По найденным параметрам, используя табл. 2, можно сделать вывод, что группы 30–49 лет и 50 лет и старше находятся между собой в состоянии конкуренции, в которой в более выигрышном положении оказывается первая группа. Это можно объяснить недостатком рабочих мест. Вероятно,

из равновозможных вариантов при трудоустройстве работника в возрасте 30–49 лет и работников предпенсионного возраста работодатель отдаст предпочтение первому.

При этом, если допустить ситуацию, при которой $a_{23} = 0,0001$ и $a_{32} = -0,0136$, то группы 30–49 лет и 50 и старше будут находиться между собой в состоянии дискриминации, в которой в лучшем положении будет находиться первая группа. При данном изменении коэффициентов на рынке труда будет наблюдаться рост занятости экономически активного населения в когортах 15–29 лет, 30–49 лет, 50 и старше соответственно на 13,9%, 0,6% и 16,3%.

Занятые до 29 лет и 30–49 лет находятся в отношениях партнерства. Можно предположить, что если работодатель ставит перед собой цель – принимать молодые кадры, то он заинтересован в трудоустройстве как молодых (учеников), так и работников со стажем (мастеров).

В аналогичной ситуации партнерства находятся группы до 29 лет и работники предпенсионного возраста.

Данная модель взаимодействия разновозрастных занятых в экономике Кировской области спрогнозировала пессимистический сценарий развития рынка труда.

Цель оптимистического сценария – подбор коэффициентов модели таким образом, чтобы в результате можно было наблюдать увеличение количества экономически занятого населения во всех возрастных группах.

Для привлечения населения на территорию области можно провести ряд следующих мероприятий: повышение заработной платы; создание новых рабочих мест и модернизация старых; информирование граждан о наличии вакансий на соответствующих территориях; участие в областных и федеральных программах, содействие развитию малого предпринимательства; доступное жилье; развитие сельского хозяйства и лесной промышленности и освобождение их от налогообложения; усиление социальной поддержки.

Были изменены следующие параметры: $b_1 = 37$, $b_2 = 419$, $b_3 = 185$.

Таким образом, при увеличении коэффициентов миграционных потоков b_1 на 11,1%, b_2 на 0,1%, b_3 на 1,1%, был получен сценарий, при котором можно наблюдать тенденцию к росту численности экономически активного населения.

Итак, в Кировской области, согласно результатам исследования, происходит старение занятого населения. Основной рабочей силой являются люди 30–49 лет. Это связано не только с демографическими тенденциями, но и с недостаточной поддержкой работающей молодежи до 29 лет: недостаток рабочих мест или работодатели не принимают на работу без опыта. В результате происходит отток из Кировской области работников до 29 лет.

Прогноз по данной модели показывает снижение численности занятых групп до 29 лет и 30–49 лет в течение последующих 10 лет. Численность занятых предпенсионного возраста увеличивается с последующей тенденцией к снижению. В целом, к 2024 г. наблюдается снижение численности занятых до 29 лет на 12,99%, снижение занятых 30–49 лет на 2,4% и увеличение численности занятых предпенсионного возраста на 0,1% по сравнению с 2013 г.

Таким образом, необходима своевременная адекватная политика в области занятости экономически активного населения в регионе.

Список литературы

1. Милованов В. П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 264 с.
2. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2017: P32 : стат. сб. / Росстат. М., 2017. 1402 с.
3. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Кировской области. URL: <http://kirovstat.gks.ru> (дата обращения 29.07.18).
4. Хавинсон М. Ю., Кулаков М. П. Математическое моделирование динамики численности разновозрастных групп занятых в экономике региона // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6. № 3. С. 441–454.
5. An Introduction to Systems Thinking, High Performance Systems, Inc. URL: <http://www.iseesystems.com/> (дата обращения: 12.07.18).

Model of interaction of different age groups employed in the economy on the example of the Kirov region

I. O. Zykova¹, S. V. Chuchkalova²

¹ 1st year student of the faculty of economics and finance, Vyatka State University. Russia, Kirov.

E-mail: zykova_irinka@mail.ru

²PhD of economics, associate professor of the Department of digital technologies in education, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: chuchkalova@mail.ru

Abstract. The article discusses the use of mathematical modeling in the study of the number of employees in the economy of the region. The identification of the simulation model represented by the system of differential equations was carried out. For this purpose, the derivatives were numerically determined from the statistical data of the Kirov region. As a result, algebraic equations for determining the correction parameters were obtained. When finding the parameters of the model, econometric analysis was used, computer packages Maple, MS Excel were used. With the help of the found parameters of the model the classification of interactions of different age groups of the economically active population was carried out. Between the employed in the economy, there are possible types of interactions: lack of influence, assistance, oppression, discrimination, competition, partnership. With the help of simulation experiments, different scenarios were implemented to obtain a forecast of the labor market size. The results of the study can be used in decision-making in the field of socio-economic policy in the region.

Keywords: simulation model, economically active population, model identification.

References

1. Milovanov V. P. *Neravnovesnye social'no-ehkonomicheskie sistemy: sinergetika i samoorganizaciya* [Non-equilibrium socio-economic system: synergy and self-organization]. M. Editorial URSS. 2001. 264 p.
2. *Regiony Rossii. Social'no-ehkonomicheskie pokazateli* – Regions of Russia. Socio-economic indicators. 2017: P32: stat. coll. / Rosstat. M. 2017. 1402 p.
3. Territorial body of the Federal State Statistics Service of the Kirov region. Available at: <http://kirovstat.gks.ru> (accessed 29.07.18). (in Russ.)
4. Havinson M. YU., Kulakov M. P. *Matematicheskoe modelirovanie dinamiki chislennosti raznovozrastnyh grupp zanyatyh v ehkonomike regiona* [Mathematical modeling of the dynamics of the number of employed groups in the economy of the region] // *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie* – Computer studies. 2014, vol.6, No. 3, pp. 441–454.
5. An Introduction to Systems Thinking, High Performance Systems, Inc. Available at: <http://www.iseesystems.com/> (accessed: 12.07.18).

The application of dynamic reactions of ties in the connection of elements to estimate the capabilities of vibration protection system

S. V. Eliseev¹, A. V. Eliseev², A. S. Mironov³, Q. T. Vuong⁴

¹Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher - Director of the scientific educational center of modern technologies, system analysis and modeling ISTU, Irkutsk State Transport University. Russia, Irkutsk. ORCID: 0000-0001-6876-8786. E-mail: eliseev_s@inbox.ru

²Senior Researcher, Candidate of Technical Sciences, The scientific educational center of modern technologies, system analysis and modeling ISTU, Irkutsk State Transport University. Russia, Irkutsk. ORCID: 0000-0003-0222-2507. E-mail: eavsh@ya.ru

³Candidate of Scientific Degree, Scientific and Educational Center of Modern Technologies, System Analysis and Modeling of ISTU, Irkutsk State Transport University. Russia, Irkutsk. E-mail: art.s.mironov@mail.ru

⁴Postgraduate of Scientific and Educational Center of Modern technologies, systems analysis and modeling, Irkutsk State Transport University. Russia, Irkutsk. ORCID: 0000-0003-3026-5301. E-mail: trucvq1990@gmail.com

Abstract. Assessment of the level of vibration effects on the elements of technological and transportation vehicles is one of the most important approaches in ensuring their reliability and operational safety. The aim of the research is to develop a method for constructing mathematical models of technical objects, whose vibrational interactions are estimated by the dynamic responses of the connections of the elements between themselves and the supporting surfaces. The work uses approaches based on the development of methods of structural mathematical modeling and introduces the concepts of dynamic responses of characteristic points of mechanical oscillatory systems, transfer functions of constraint responses and their frequency characteristics. The research demonstrates features of the dynamic properties of systems and the possibility of the occurrence of new dynamic effects. As additional constraints, a motion transformation device is introduced. It is shown that the ratio of the dynamic responses of constraints on the object of protection and on the support surface can be chosen as a parameter of the dynamic state of the system. Analytical dependencies are obtained to determine the coefficient of response dynamism.

Numerical modeling is performed within the scope of the model problem; Dynamic effects are revealed that reflects the properties of the system in the possibilities of creating zones of suppression of external influences when varying adjusting parameters. The possibilities of implementing such approaches are shown through a change in the ratio of spring stiffness in the "cascade".

Keywords: dynamic responses of constraints, transfer functions, motion transformation devices, dynamic stiffness.

Introduction. The reliability and safety of the operation of many technical facilities operating under dynamic loading conditions depends on the level and forms of the occurring vibrations. The management of the dynamic states of technical objects is ensured by special tools and devices introduced into the structure of systems to make it possible to keep the emerging dynamic processes within certain limits. The search of a method and means of vibration protection as one of the urgent problems of modern mechanical science was reflected in the works of domestic and foreign specialists [1, 2]. Reducing the vibrational background of technological and transportation vehicles requires attention to the assessment of the dynamic capabilities of technical objects at all stages of their life cycle, in particular, in predevelopment studies and preliminary calculations [3, 4].

The use of computational schemes of technical objects, followed by the unification of methods, approaches and methods for estimating dynamic states, has become very popular in solving dynamic problems. In this direction, various methods of constructing mathematical models and technologies for their transformation have been developed and are being applied that allow taking into account the features of constructive and technical forms of objects, the conditions for the formation of dynamic states under the influence of various external disturbances, etc.

The methods of structural mathematical modeling [5 ÷ 7] possess certain advantages in the estimation of dynamic effects when mechanical oscillatory systems are introduced as computational

schemes of technical objects. Within the framework of this approach, a structural mathematical model in the form of a structural diagram of a dynamically equivalent automatic control system is compared to a mechanical oscillatory system with several degrees of freedom [7-9]. The further use of the analytical tools of the automatic control theory provides the possibilities of applying advanced technologies for frequency analysis of the dynamic properties of systems.

The proposed article develops a methodological basis for estimating the dynamic properties of mechanical oscillatory systems as physical models of technical objects under the influence of periodic external disturbances; a new approach is proposed for estimating dynamic states. It is based on the introduction of such parameters as dynamic responses of the constraints of interacting elements, which requires certain developments in the techniques of structural transformations of mathematical models and appropriate methods for estimating dynamic states.

I. Some general provisions

Many technical objects, in particular, traction electric motors of vehicles (locomotives) are considered as systems with two degrees of freedom, consisting of a solid body making plane oscillatory movements. External influences in such problems are determined by periodic motions of the support surface and are supposed to be known. A schematic diagram of a technical object of this kind (in particular, the traction motor of a locomotive) with a computational scheme in the form of a mechanical oscillatory system with two degrees of freedom is shown in Fig. 1.

The motion of the system is considered in the system of coordinates y_1, y_2 , connected with the fixed basis. The system uses elastic elements with stiffnesses k_1, k_2, k_3 and additional constraints in the form of the motion transformation device (MTD). A technical object in the form of a solid body that performs vertical oscillations on elastic supports can be represented, as shown in Fig. 1, by a mechanical oscillatory system.

The system consists of two elastic branches: one is determined by the serial connection of the elastic element k_1 and the block of parallel running springs k_2 , and the motion transformation device with reduced mass L .

The characteristic points of connection of the three elements of the branch are pp. $(B), (B_1), (B_2)$. The second elastic branch is represented by a spring with a stiffness coefficient k_3 with characteristic attachment points p. (A) and p. (A_1) . The support surface performs harmonic vibrations $z(t)$. The object has mass m ; the motion transformation device (MTD) in this case is implemented by a screw non-locking mechanism with a flywheel nut of mass L ; the value of this reduced mass depends on the MTD parameters

$$L = \frac{J}{r_{cp}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \tag{1}$$

where J is the moment of inertia of the flywheel nut, r_{cp} is the average radius of the thread, and α is the spiral angle of inclination [9].

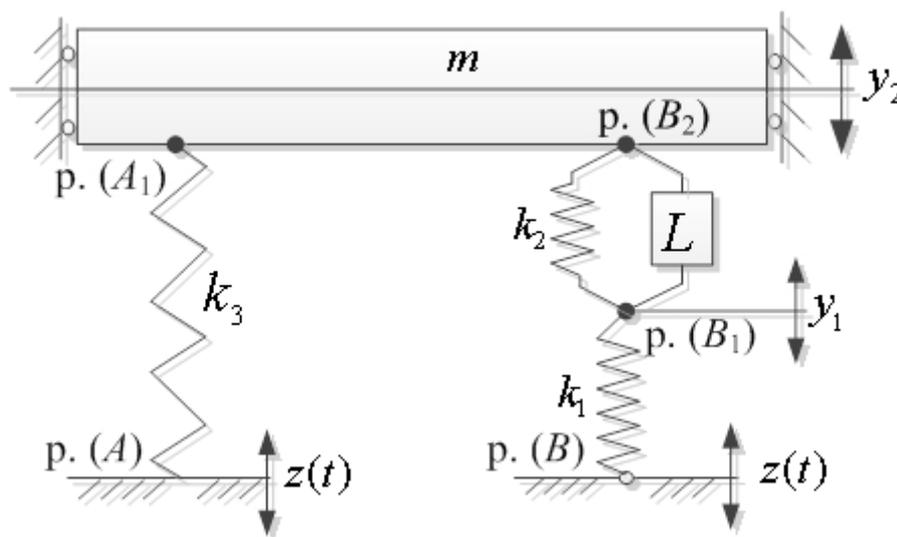


Fig. 1. The computational scheme of a technical object in the form of a mechanical oscillatory system (pp. $(A), (A_1), (B) \div (B_2)$ are characteristic points in which dynamic responses of constraints occur)

The motion of the system is considered in the coordinates y_1 and y_2 : y_2 determines the position of the object m , and the coordinate y_1 determines the position of p. (B_1) , in which there is a connection of three

typical elements of the system (springs with stiffnesses k_1 and k_2 with an MTD having a reduced mass L). It is assumed that the system has linear properties and oscillates with respect to the position of static equilibrium. The coordinate system is connected with a fixed basis, the resistance forces are supposed to be vanishingly small.

1. Mathematical model of the technical object in Fig. 1 can be represented as a system of ordinary differential equations of the second order with constant coefficients. Using the technique given in [7], we find expressions for the kinetic and potential energies of the system in the coordinates y_1, y_2 :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} L (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2, \tag{2}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_2 - z)^2. \tag{3}$$

We perform auxiliary calculations and write the equations in the coordinates y_1, y_2 in the time domain:

$$\ddot{y}_1 L + y_1 (k_1 + k_2) - \ddot{y}_2 L - y_2 k_2 = k_1 z, \tag{4}$$

$$\ddot{y}_2 (m + L) + y_2 (k_2 + k_3) - \ddot{y}_1 L - y_1 k_2 = k_3 z. \tag{5}$$

After Laplace transformations under zero initial conditions, the system of equations (4), (5) can be represented in the operator form

$$\bar{y}_1 [Lp^2 + (k_1 + k_2)] - \bar{y}_2 (Lp^2 + k_2) = k_1 \bar{z}, \tag{6}$$

$$\bar{y}_2 [(m + L)p^2 + k_2 + k_3] - \bar{y}_1 (Lp^2 + k_2) = k_3 \bar{z}, \tag{7}$$

where $p = j\omega$ is the complex variable ($j = \sqrt{-1}$); the icon $\langle - \rangle$ above the variable means its Laplace transform [7].

A structural mathematical model in the form of a structural diagram of a dynamically equivalent automatic control system is shown in Fig. 2.

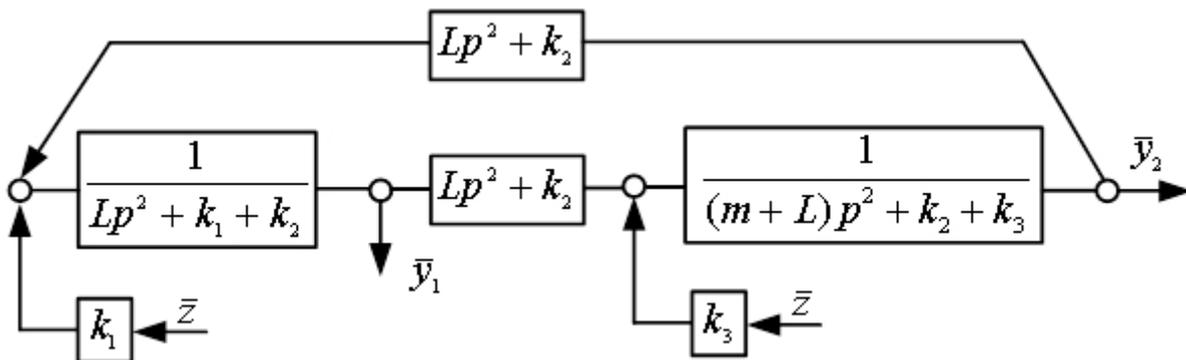


Fig. 2. Structural mathematical model (structural diagram) of the technical object in Fig. 1

From Fig. 2 it follows that the structural model reflects the specific properties of the system; the structure of the system is formed from two partial blocks having elastic-inertial interpartial constraints. At the frequency of the external disturbance

$$\omega^2 = \frac{k_2}{L}, \tag{8}$$

the interaction between the partial frequencies can be violated. To estimate the features of the dynamic properties of systems with an external harmonic perturbation (in this case this kinematic perturbation $z(t)$), partial frequencies have a definite value:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{L}, \tag{9} \quad n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m + L}, \tag{10}$$

which predetermine, in a sense, the possibility of implementing regimes of dynamic damping of oscillations in the system.

2. The transfer functions of the original system in Fig. 1 can be determined from the structural mathematical model or structural diagram in Fig. 2:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{k_1[(m+L)p^2 + k_2 + k_3] + k_3(Lp^2 + k_2)}{A(p)}, \tag{11}$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{k_3(Lp^2 + k_1 + k_2) + k_1(Lp^2 + k_2)}{A(p)}, \tag{12}$$

where

$$A(p) = (Lp^2 + k_1 + k_2)[(m+L)p^2 + k_2 + k_3] - (Lp^2 + k_2)^2 \tag{13}$$

is the characteristic frequency equation of the system.

To evaluate the dynamic responses of constraints, the methodological basis presented in [7] is used, according to which the dynamic response at the characteristic points of the initial system (that is, at the connection points or the contact interaction of its elements) can be found as the product of dynamic stiffness by the magnitude of the dynamic displacement on the coordinate under consideration.

In general, the dynamic stiffness depends on the frequency of the system's oscillations (in this case, on the frequency of the external harmonic kinematic effect). While such approaches are applied to specific schemes, one can usually distinguish the dynamic stiffness of system fragments and dynamic stiffness of individual elements or typical elementary links.

The data on the composition of a set of typical elementary links are presented in [1, 5, 7] with consideration of the elastic, dissipative, inertial properties of elements and motion transformation devices (MTD). In the operator form (Fig. 2) the transfer functions of the elementary links, introduced into the structural mathematical model, have the corresponding form: $W_{\text{elas}}(p) = k$ for the usual linear system (k is the spring stiffness); $W_{\text{diss}}(p) = bp$ for the dissipative link (viscous friction damper); $W_{\text{iner}}(p) = mp^2$ (or Lp^2) for an inertial link or a motion transformation device.

Each of the typical elementary links, in essence, within the scope of structural mathematical modeling, is considered as a link, the input signal in which is the dynamic displacement, and the output signal is the effort (power factor).

In the expressions for the transfer functions of the system (11), (12) the dynamic stiffness will be determined by converting these expressions, which predetermines the representation of the characteristic equation (13), that is, the denominator of the transfer functions (11), (12) in general. If the dynamic stiffness of the system as a whole is zero, this means that under the influence of the harmonic external action a resonance regime will develop, when the motion of the corresponding inertial element, to which an external disturbance is applied, will not face any counteraction movements; the dynamic stiffness of the system as a whole becomes zero at the same time.

3. If the system has two degrees of freedom, then the dynamic stiffness of the system, as a whole, will take zero values twice; such frequencies are frequencies of natural oscillations. The structural diagram in Fig. 2 when considering dynamic responses at characteristic points, for example, at p. (B_2), can be transformed to the form shown in Fig. 3, a, b. In this case, the element m is an object whose dynamic state is evaluated; the transfer

function of an object is interpreted by an integrating link of the second order $\left(\frac{1}{mp^2}\right)$.

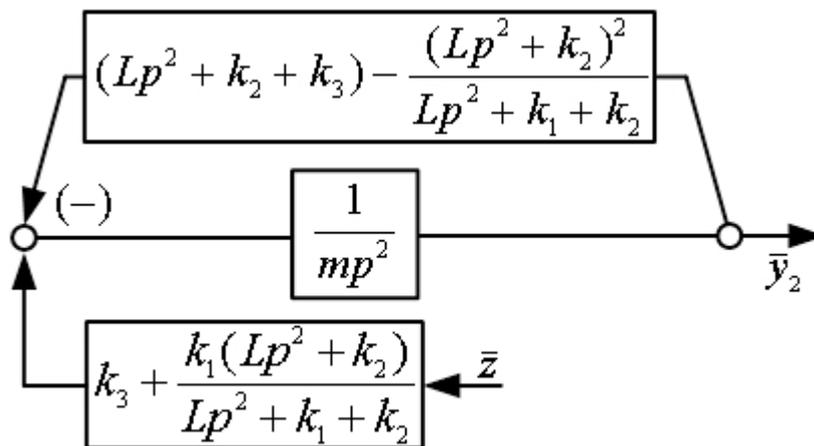


Fig. 3. The structural diagram of the initial system in Fig. 2 with the elimination of the coordinate y_1

In the structural diagram in Fig. 3, the negative feedback loop with respect to the object m represents, in the physical sense, the dynamic stiffness of the structural formation consisting of two

branches: the first is a spring with stiffness k_3 , the second has the dynamic stiffness of the system fragment of the elements k_1 , k_2 and L (cascade), which has been mentioned above.

On the basis of such representations, the dynamic responses of the constraints at the characteristic points of the system (A) , (A_1) , (B) , (B_1) , (B_2) can be written as:

$$\left| \bar{R}_A \right| = \left| \bar{R}_{A_1} \right| = k_3 \cdot \bar{y}_2, \quad \left| \bar{R}_B \right| = \left| \bar{R}_{B_1} \right| = k_1 \cdot \bar{y}_1, \quad \left| \bar{R}_{B_2} \right| = \bar{k}_{\text{coer}} \cdot \bar{y}_2 \quad (14)$$

where $\bar{y}_1 = W_1(p)\bar{z}$, $\bar{y}_2 = W_2(p)\bar{z}$, $\bar{k}_{\text{coer}}(p) = k_3 + \frac{k_1(Lp^2 + k_2)}{Lp^2 + k_1 + k_2}$.

The dynamic stiffness \bar{k}_{np} in the expressions (13) can also be determined as the transfer function of the negative feedback circuit. On the structural diagram (Figure 3) this can be represented as an expression for the reduced dynamic stiffness

$$\bar{k}_{\text{coer}}(p) = \frac{(Lp^2 + k_2 + k_3)(Lp^2 + k_1 + k_2) - (Lp^2 + k_2)^2}{Lp^2 + k_1 + k_2}, \quad (15)$$

which coincides with the previously obtained results in (14). Thus, the dynamic responses characterizing the properties of the suspension can be written as

$$\begin{aligned} \bar{R}_m &= \bar{k}_{\text{coer}} \cdot \bar{y}_2 = \frac{\bar{z}[k_3(Lp^2 + k_1 + k_2) + k_1(Lp^2 + k_2)] \times}{(Lp^2 + k_1 + k_2)A(p)} = \\ &= \frac{\bar{z}[Lp^2(k_1 + k_3) + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3]^2}{(Lp^2 + k_1 + k_2)A(p)}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\text{supp}} &= \bar{R}_A + \bar{R}_B = k_3 \cdot \bar{z} \cdot W_2(p) + k_1 \cdot \bar{z} \cdot W_1(p) = \\ &= \frac{k_3 \cdot \bar{z} \cdot [k_3(Lp^2 + k_1 + k_2) + k_1(Lp^2 + k_2)] +}{A(p)} \\ &= \frac{+ k_1 \cdot \bar{z} \cdot [k_1[(m + L)p^2 + k_2 + k_3] + k_3(Lp^2 + k_2)]}{A(p)}. \end{aligned} \quad (17)$$

4. To characterize the properties of the suspension, a transfer function of the dynamic links between the responses of the support surface $\left| \bar{R}_{\text{supp}} \right|$ and the responses of the constraints $\left| \bar{R}_m \right|$ created by the external kinematic perturbation \bar{z}

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \frac{\bar{R}_m}{\bar{R}_{\text{supp}}} = \frac{[-L\omega^2(k_1 + k_3) + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3]^2}{\{-[k_3^2L + k_1^2(m + L) + 2k_1k_3L]\omega^2 + \\ &+ k_3^2(k_1 + k_2) + k_1^2(k_2 + k_3) + 2k_1k_2k_3\} \cdot (-L\omega^2 + k_1 + k_2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

It follows from analysis (18) that the graph of $N(\omega)$ will have one frequency of "zeroing" the numerator

$$\omega_{\text{dyn}}^2 = \frac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}{L(k_1 + k_3)}. \quad (19)$$

The denominator of expression (18) can be "nullified" at two frequencies:

$$\omega_{10\text{nat}}'^2 = \frac{k_1 + k_2}{L}, \quad \omega_{20\text{nat}}'^2 = \frac{k_3^2(k_1 + k_2) + k_1^2(k_2 + k_3) + 2k_1k_2k_3}{k_3^2L + k_1^2(m + L) + 2k_1k_3L}. \quad (20)$$

It should be noted that expression (20) coincides with expression (9) for determining the partial frequency.

The introduction of the relation for the dynamic responses $N(\omega)$ at the characteristic points of the suspension (support surface and protection object) has a definite meaning: the kinematic parameters of the motion and the dynamic forces occurring in the joints of the elements should be related to each other in a certain way. When the dynamic loading parameters change, the system should react (or be adjusted) in a

certain way. In this case it is proposed to introduce an adjusting parameter in the form of a ratio of the stiffness coefficients of the two suspension branches (k_1 and k_3). The physical possibilities of implementing such approaches in practice exist and are used in active vibration protection systems.

II. Estimation of the dynamic properties of the system

Let us denote

$$k_2 = \beta \cdot k_1, k_3 = \gamma \cdot k_1, \quad (22)$$

then the expressions (11), (12) are respectively transformed

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{k_1[(m+L)p^2 + \beta k_1 + \gamma k_1] + \gamma k_1(Lp^2 + \beta k_1)}{A_1(p)}, \quad (23)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{\gamma k_1(Lp^2 + k_1 + \beta k_1) + k_1(Lp^2 + \beta k_1)}{A_1(p)}, \quad (24)$$

where

$$A_1(p) = (Lp^2 + k_1 + \beta k_1)[(m+L)p^2 + \beta k_1 + \gamma k_1] - (Lp^2 + \beta k_1)^2. \quad (25)$$

1. The ratio of dynamic constraint responses represented by expression (18) can be written in the form

$$N(\omega) = \frac{[-L\omega^2(1+\gamma) + k_1(\beta + \gamma + \beta\gamma)]^2}{\{-[m+L(1+\gamma)^2]\omega^2 + k_1[\beta(1+\gamma)^2 + \gamma^2 + \gamma]\} \cdot (-L\omega^2 + k_1 + \beta k_1)}. \quad (26)$$

From analysis of the transfer function (23) it follows that two resonance regimes are possible with respect to the coordinate \bar{y}_1 . The frequencies of resonances or natural vibrations are determined by solving the characteristic frequency equation (25). It should be noted that the values of the frequencies of natural oscillations depend on the adjusting parameters β and γ , as well as on the reduced mass L of the motion transformation device (MTD).

With respect to the coordinate \bar{y}_1 there can be a mode of dynamic damping of oscillations at a frequency

$$\omega_{1\text{dyn}}^2 = \frac{k_1(\beta + \gamma + \beta\gamma)}{m + L(1 + \gamma)}. \quad (27)$$

With respect to the coordinate \bar{y}_2 the frequency of dynamic damping of the oscillations is:

$$\omega_{2\text{dyn}}^2 = \frac{k_1(\beta + \gamma + \beta\gamma)}{L(1 + \gamma)}. \quad (28)$$

For $L = 0$, a dynamic damping mode of the oscillations is possible only with respect to the coordinate \bar{y}_1 .

The ratio of the dynamic responses of the constraints $N(\omega)$ can be called the coefficient of response dynamism, since it characterizes the peculiarities of the transfer of force effects from the supporting surface towards the object.

In the general case, $N(\omega)$ can have a zero value at the frequency

$$\omega_{N\text{dyn}}^2 = \frac{k_1(\beta + \gamma + \beta\gamma)}{L(1 + \gamma)}, \quad (29)$$

which follows from the "zeroing" of the numerator (26).

In turn, $N(\omega)$ has infinitely large values at two frequencies

$$\omega_{\text{dyn}N_1}^2 = \frac{k_1(1 + \beta)}{L}, \quad \omega_{\text{dyn}N_2}^2 = \frac{k_1[\beta(1 + \gamma)^2 + \gamma^2 + \gamma]}{m + L(1 + \gamma)^2}. \quad (30)$$

As the frequency of the external influence ($\omega^2 \rightarrow \infty$) increases, $N(\omega)$ tends to the limiting value

$$N(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{L(1 + \gamma)^2}{m + L(1 + \gamma)^2}. \quad (32)$$

2. Frequency characteristics (FC) of the constraint responses are shown in Fig. 4, *a, b*. For example, the following parameters are chosen in the model problem: $m = 1000 \text{ kg}$, $L = 100 \text{ kg}$, $k_1 = 1000 \text{ N/m}$, $\beta = 1$.

a)

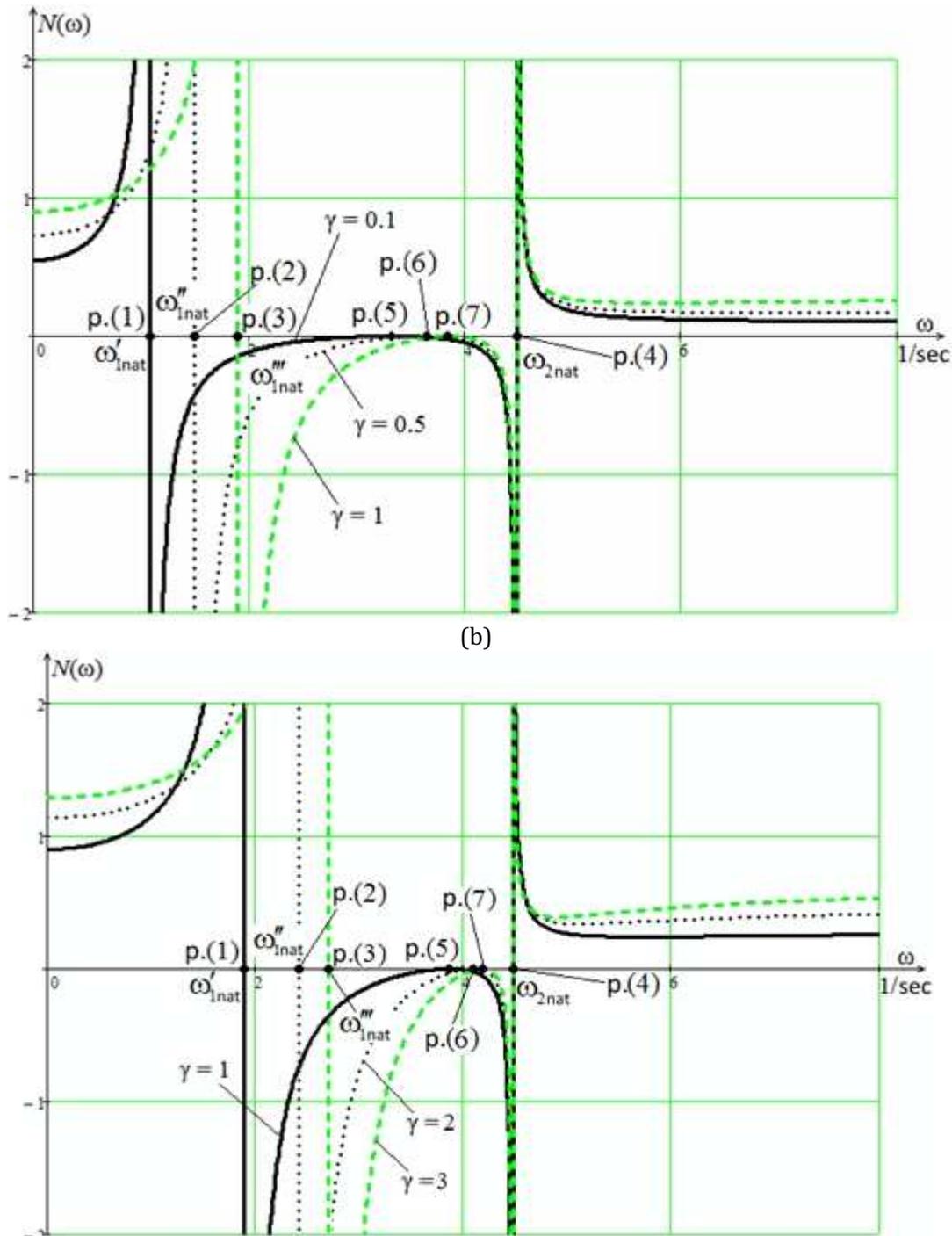


Fig. 4. Frequency characteristics of the responses of constraints at the characteristic points of the mechanical oscillatory system (pp. (A), (A₁), (B), (B₂)):
 a) $\gamma = 0.1, 0.5, 1$; b) $\gamma = 1, 2, 3$

In Fig. 4, a, b pp. (1), (2), (3), (4) reflect the shift to the right (in the direction of increase) of the frequencies of resonance increase $N(\omega)$. The points on the abscissa axis (pp. (1), (2), (3), (4)) reflect the positions of the corresponding frequencies of increase in amplitudes of $N(\omega)$ to large values. When comparing pp. (1) ÷ (4) in Fig. 4, a and pp. (1) ÷ (4) in Fig. 4, b, there is a shift of frequencies to the right, observed before the coincidence of pp. (4) in Fig. 4, b, with increasing the adjusting parameter.

In the limiting cases (Figure 4, b) the points can coincide, which indicates a strong influence of adjusting parameters on the distribution of dynamic responses in the interactions of the elements of the system. When comparing the FC for different γ , we note that the frequency of the dynamic damping of the oscillations (pp. (5), (6), (7)) is shifted to the right to p. (4), which is due to the separate dependence of the dynamic states on the adjusting parameters β and γ .

2. Fig. 5 shows the FCs of dynamic responses in isometric form, where the spatial distribution of the graphs of the $N(\omega)$ dependences has an additional coordinate axis along which the adjusting parameter γ is plotted.

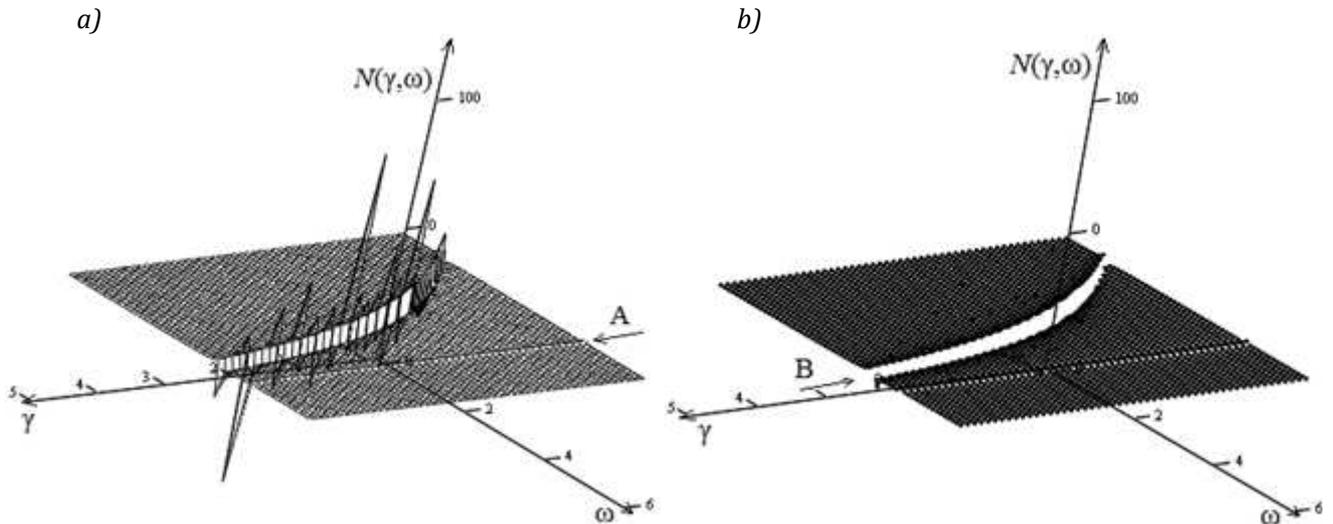


Fig. 5. The graph of the $N(\omega)$ dependences in isometric form: a) surface graph; b) data points

Fig. 5 shows an isometric representation of the frequency-characteristic relations of dynamic responses depending on the frequency of the external influence, taking into account the deep variation of the parameters. Fig. 5, *a* denotes the zone of abrupt change in the values of $N(\omega)$ that occur at frequencies, increasing (or amplifying) the transmission of power disturbances.

The spatial diagram (Figure 5, *a*) presents two regions of the values of the intensive increase in dynamic response; the zone marked by the arrow A (Figure 5, *a*) is shown in detail in Fig. 6, *a*.

Fig. 6, *b* shows the overall picture of changes in the values and forms of the dynamism coefficients, which makes it possible to assess the general conditions for the influence of adjusting parameters on the dynamic properties of the suspension system.

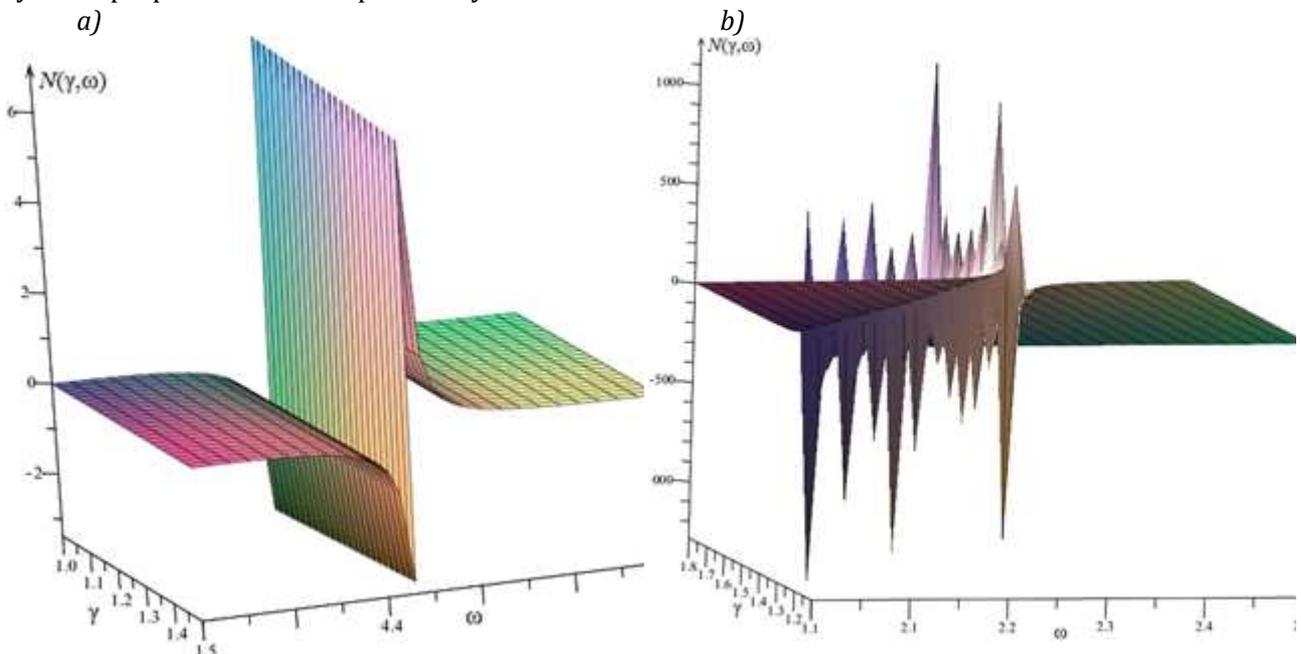


Fig. 6. Detailed view of the graphs in Fig. 5: *a*) the zone marked by the arrow A (Figure 5, *a*); *b*) the zone marked by the arrow B (Figure 5, *b*)

Conclusion

This paper develops new methodological approaches to evaluate the dynamic properties of mechanical oscillatory systems considered as computational schemes of technical objects. It is shown that the traditional ideas about the formation of the dynamic properties of mechanical oscillatory systems, including suspensions and suspension systems of vehicles, based on a comparative analysis of kinematic parameters, can be additionally detailed by taking into account the dynamic responses of constraints.

The work introduces a number of new concepts that reflect the features of dynamic interactions of system elements, which is reflected in the frequency characteristics of the dynamic responses of constraints. Such approaches create the prerequisites for the development of a comprehensive analysis of the overall picture of the interaction of the elements of the system and for the creation of conditions for improving the reliability of the machine components designed with allowance for a more complex system of vibrational loading during intensive machine operation.

In general, the work is related to the development of a new method for estimating the dynamic properties of objects, vibration loadings, as well as the technologies for its implementation, using the example of the analysis of the transport suspension model as a mechanical system with two degrees of freedom.

References

1. Karnovsky I. A., Lebed E. *Theory of vibration protection*. Switzerland: Springer, 2016. 708 p.
2. de Silva C. W. *Vibration. Fundamentals and Practice*. Boca Raton, London, New York, Washington, DC: CRC Press, 2000. 957 p.
3. Doronin S. V., Lupekhin A. M., Moskvichev V. V., Shokin Yu. I. *Simulation of strength and fracture of load-bearing structures of technical systems*. Novosibirsk: Nauka Publ., 2005. 250 p.
4. Harris S. M., Piersol A. G. *Shock and Vibration Handbook*. New York: McGraw - Hill Book Co, 2002. 1457 p.
5. Belokobylsky S. V., Eliseev S. V., Sitov I. S. *Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial-elastic constraints*. St. Petersburg: Politekhnik Publ., 2013. 319 p.
6. Tarasik V. P. *Mathematical modeling of technical systems*. 2nd ed., revised and enlarged. Minsk: Dizayn PRO Publ., 2004. 640 p.
7. Eliseev S. V., Artyunin A. I. *Applied theory of oscillations in problems of the dynamics of linear mechanical systems*. Novosibirsk: Nauka Publ., 2016. 459 p.
8. Kolovsky M. Z. *Automatic control of vibration protection systems*. Moscow: Nauka Publ., 1976. 320 p.
9. Frolov K. V., Furman F. A. *Applied theory of vibration protection systems*. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1980. 276 p.

Бутстреп методы оценки положения зон разрушения в модели сжатого массива горных пород*

А. С. Лосев

кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук. Россия, г. Владивосток.
E-mail: A.S.Losev@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе бутстреп методами проводится статистическое обоснование и выбор модели, характеризующей вид зависимости расположения первой зоны разрушения от предела прочности в задаче зональной дезинтеграции горных пород вокруг глубоких подземных выработок, в условиях рассмотрения предельно малой выборки натуральных данных. В качестве оценки исследуемой зависимости выступает коэффициент детерминации, значение которого определяется через ранее разработанный алгоритм построения доверительного интервала коэффициента детерминации. Проведен сравнительный анализ полученных доверительных интервалов традиционными и бутстреп методами. Получена оценка отклонения коэффициента детерминации от границ его бутстреп доверительного интервала в зависимости от размерности бутстреп выборки. Подтверждена статистическая значимость модели линейного вида зависимости расположения первой зоны разрушения от предела прочности.

Ключевые слова: бутстреп методы, алгоритм, зональные разрушения, доверительный интервал.

Исследования зонального разрушения массива горной породы вокруг выработки в условиях сильного сжатия отличаются высокой сложностью и разнообразием используемых методов [2; 5; 9]. Общее стремление исследователей в данной области направлено на выявление законов, характеризующих геомеханические явления. Однако высокая себестоимость новых месторождений не позволяет оперировать большими объемами данных, что сильно осложняет получение аналитических результатов.

В качестве возможного решения проблемы предлагается использовать методы численного ресамплинга, позволяющие расширять объемы выборки в несколько раз [10]. В частности, в работе [6] автором используются бутстреп методы при исследовании аналитической зависимости параметра периодичности функции дефектности от положения зон разрушения в задаче дезинтеграции горных пород. Полученный результат имеет существенное преимущество по сравнению с традиционными подходами, его качество напрямую зависит от числа бутстреп реализаций и объема бутстреп выборки, что особенно значимо в работе с предельно маленькой выборкой.

В настоящей работе с помощью бутстреп методов проводится статистическое обоснование аналитической зависимости расположения середины первой зоны разрушения от предела прочности. Определена наиболее значимая модель, характеризующая рассматриваемую зависимость.

Обратимся к задаче о распределении поля напряжений вокруг выработки круглого сечения, которая рассматривается как плоская и стационарная, в условиях несжимаемости и гидростатичности нагружения на бесконечности:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0.$$

Бигармоническое уравнение для функции дефектности определено как

$$\Delta^2 R - \gamma^2 R = 0,$$

и граничные условия

$$R|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial R}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0,$$

где σ_{rr} – нормальное радиальное напряжение, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – нормальное тангенциальное напряжение, Δ – оператор Лапласа, γ – параметр периодичности модели. Решение для расстояния от центра выработки до точки массива определено в виде:

$$R(r) = aJ_0(\sqrt{\gamma r}) + bN_0(\sqrt{\gamma r}) + cK_0(\sqrt{\gamma r}),$$

где J_0, N_0, K_0 – функции Бесселя, Неймана и Макдональда нулевого порядка [3].

Ранее в работах [7; 8] автор исследовал параметр периодичности функции дефектности, определение которого позволяет осуществлять прогноз в разработках последующих месторождений. Методами статистического анализа на основе натуральных данных построена регрессионная модель, отражающая экспоненциальную зависимость параметра периодичности от положения середины первой зоны разрушения. Установлено, что расположение зон разрушения экспоненциально зависит от предела прочности породы. Определен числовой диапазон значений предела прочности породы, при котором параметр периодичности определяется с высоким уровнем достоверности.

В работе [4] установлено, что зависимость положения середины первой зоны разрушения, измеряемой в относительных к радиусу выработок единицах – r^* , от предела прочности породы на одноосное сжатие – σ , выражается в аналитической зависимости линейного вида:

$$r^* = 0,008\sigma + 0,757.$$

В работе [7] автором получена альтернативная модель данной зависимости нелинейного вида:

$$r^* = 0,8133\exp(0,0061\sigma).$$

Небольшая разница в соответствующих значениях коэффициентов детерминации R рассмотренных моделей (99,12% – линейный, 98,18% – нелинейный) и предельно маленькая выборка натуральных данных не позволяют однозначно определить более приемлемую модель. Поэтому вопрос уточнения раннее полученного результата является актуальным. Проведем уточнение данной статистической оценки значимости полученной модели с помощью бутстреп алгоритма построения доверительного интервала коэффициента детерминации, описанного в работе [6].

Обозначим данные о положении середины первой зоны разрушения и пределе прочности породы через множество $Z = \{z_i | z_i = (r_i, \sigma_i)\}, i = 1, \dots, 5$. Положим число бутстреп реализаций $B = 10^5$ и уровень значимости $\alpha = 0,1$.

Бутстреп алгоритм построения доверительного интервала коэффициента детерминации

Шаг 1. Генератором случайных чисел построим бутстреп выборку объемом n элементов, вытягивая на каждом шаге элементы из множества Z с повторением случайным образом и формируя из них выборку вида:

$$\{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\}_1 \text{ где } z_j^* \in Z, j = 1, \dots, n.$$

Шаг 2. Рассчитаем для полученной выборки бутстреп оценку коэффициента детерминации \tilde{R}_1^* .

Шаг 3. Повторим предыдущие шаги B раз, сформировав в результате набор коэффициента детерминации $\tilde{R}_1^*, \tilde{R}_2^*, \dots, \tilde{R}_B^*$.

Шаг 4. Отсортируем набор коэффициента детерминации $\tilde{R}_1^*, \tilde{R}_2^*, \dots, \tilde{R}_B^*$ в порядке возрастания.

Шаг 5. Определим доверительный интервал бутстреп распределения по формуле

$$\tilde{R}_{\frac{B \cdot \alpha}{2}}^* \leq \tilde{R}^*(n, \alpha) \leq \tilde{R}_{B \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}^*.$$

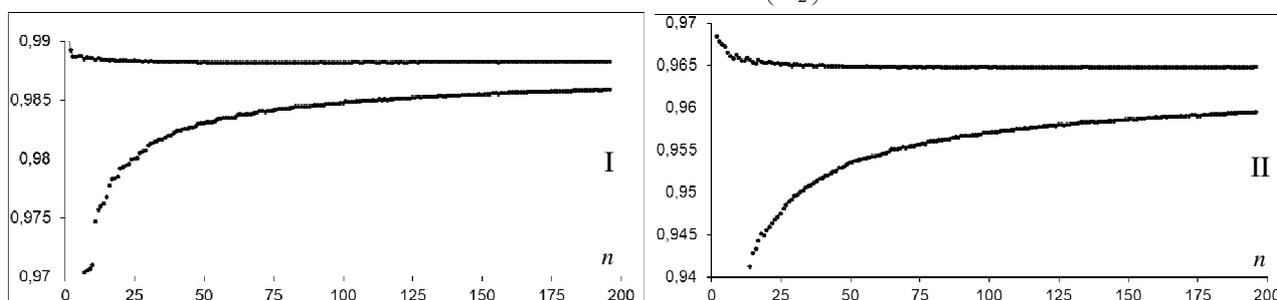


Рис. 1. Бутстреп интервалы коэффициента детерминации при $\alpha = 0,1$
(I – линейная модель, II – нелинейная модель)

Проведем сравнительный анализ построенных доверительных интервалов бутстреп методом (рис. 1) с традиционным подходом

$$\left(\sqrt{R} - t_{\alpha} \sqrt{\frac{1-R}{n-2}} \right)^2 \leq R \leq \left(\sqrt{R} + t_{\alpha} \sqrt{\frac{1-R}{n-2}} \right)^2, \quad (1)$$

где t_{α} – табличное значение t -критерия Стьюдента при заданном уровне значимости [1].

В результате доверительные интервалы, полученные традиционным способом (1), уже на малых бутстреп выборках больше бутстреп интервалов в 31 и 53 раза соответственно (таблица). В линейной модели, при максимальной бутстреп выборке, доверительный интервал в 133,3 раза длиннее бутстреп интервала, в нелинейной – 62,5 раза.

Сравнительная таблица доверительных и бутстреп интервалов

Модель	Доверительный интервал	Бутстреп интервал		Отношение длин интервалов
		n	Интервал	
Линейная	[0,7334; 1]	$n=50$	[0,983; 0,988]	53,3
		$n=100$	[0,985; 0,988]	88,9
		$n=150$	[0,985; 0,988]	88,9
		$n=200$	[0,986; 0,988]	133,3
Нелинейная	[0,6252; 1]	$n=50$	[0,953; 0,965]	31,2
		$n=100$	[0,957; 0,965]	46,9
		$n=150$	[0,958; 0,965]	53,5
		$n=200$	[0,959; 0,965]	62,5

Анализ данных, выраженных в процентном соотношении бутстреп полуинтервала от его середины (рис. 2), показал, что отклонение коэффициента детерминации в линейной модели стабильно не превышает 0,5% при $n \geq 25$, в то время как в нелинейной модели данный результат достигается только при $n > 100$.

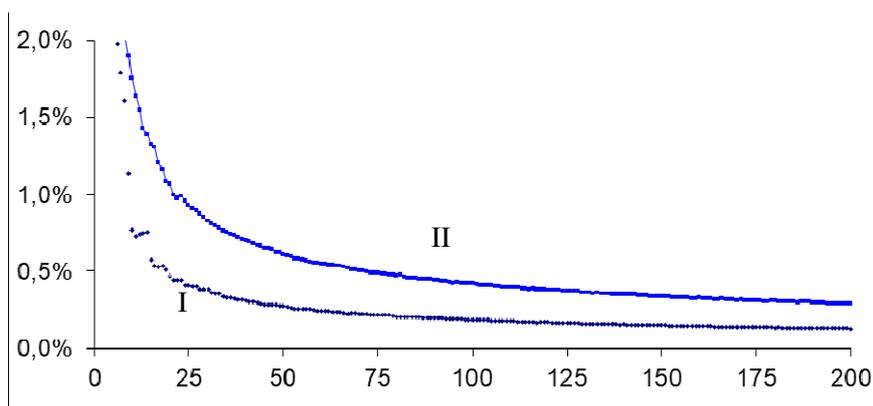


Рис. 2. Зависимость отклонения оценки коэффициента детерминации от границ бутстреп интервала от размерности бутстреп выборки (I – линейная модель, II – нелинейная модель)

Таким образом, можно утверждать, что линейная модель, характеризующая зависимость положения середины первой зоны разрушения от предела прочности породы, наиболее значима и статистически обоснована из числа рассмотренных. Интерес представляет дальнейший сравнительный анализ с другими возможными моделями. В данном случае использование бутстреп методов оценки различных характеристик в исследовании геомеханических явлений и процессов в массивах горных пород имеет существенное преимущество по сравнению с традиционными подходами, так как отсутствие заданного уровня статистической обоснованности из-за рассмотрения предельно малой выборки компенсируется высоким числом бутстреп реализаций и объемом бутстреп выборки.

Список литературы

1. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М. : Финансы и статистика, 1985. 487 с.
2. Гузев М. А., Макаров В. В. Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. Владивосток : Дальнаука, 2007. 232 с.
3. Гузев М. А., Парошин А. А. Неевклидова модель зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42. № 1. С. 147–156.
4. Ксендзенко Л. С. Разработка метода определения параметров зональной структуры разрушения сильно сжатого массива вокруг подземных выработок // Вестник Дальневосточного государственного технического университета. 2011. № 3/4(8/9). С. 144–166.

5. Ксендзенко Л. С., Макаров В. В., Опанасюк Н. А., Голосов А. М. Закономерности деформирования и разрушения сильно сжатых горных пород и массивов : монография / Инженерная школа ДВФУ. Владивосток : Дальневост. федер. ун-т, 2014. 192 с.

6. Лосев А. С. Бутстреп методы построения доверительных интервалов оценки параметров модели зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017. № 44(4). С. 114–121.

7. Лосев А. С. Зависимость зоны разрушения массива вокруг горной выработки от предела прочности породы // Горные науки и технологии. 2017. № 2. С. 43–49.

8. Лосев А. С. Статистическая оценка параметра периодичности модели зональной дезинтеграции горных пород // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. № 7(20). С. 78–82.

9. Макаров П. В. Об иерархической природе деформации и разрушения твердых тел и сред // Физ. мезомех. 2004. Т. 7. № 4. С. 25–34.

10. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М. : Финансы и статистика, 1988. 263 с.

Bootstrap methods for assessing the position of fracture zones in a model compressed massive of rocks

A. S. Losev

candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher of the Institute of Applied Mathematics of the Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences. Russia, Vladivostok.

E-mail: A.S.Losev@yandex.ru

Abstract. In this paper, bootstrap methods are the way to carry out statistical justification and selection of a model that characterizes the type of dependence of the location of the first fracture zone on the tensile strength in the problem of zonal disintegration of rocks around deep underground workings, in the conditions of consideration of a very small sample of field data. As an assessment of the dependence under study there is the coefficient of determination the value of which is determined through a previously developed algorithm for constructing the confidence interval of the coefficient of determination. A comparative analysis of the confidence intervals obtained by traditional and bootstrap methods is carried out. The estimation of the deviation of the coefficient of determination from the boundaries of its bootstrap confidence interval, depending on the dimension of the bootstrap sample is obtained. The statistical significance of the linear model of the dependence of the location of the first fracture zone on the tensile strength is confirmed.

Keywords: bootstrap methods, algorithm, zonal destruction, confidence interval.

References

1. Ajvazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika. Issledovanie zavisimostej* [Applied statistics. The study of dependencies]. M. Finance and statistics. 1985. 487 p.

2. Guzev M. A., Makarov V. V. *Deformirovanie i razrushenie sil'no szhatyh gornyh porod vokrug vyrabotok*. [Deformation and destruction of strongly compressed rocks around excavations]. Vladivostok. Dal'nauka. 2007. 232 p.

3. Guzev M. A., Paroshin A. A. *Neevklidova model' zonal'noj dezintegracii gornyh porod vokrug podzemnoj vyrabotki* [Non-Euclidean model of zonal disintegration of rocks around underground mines] // *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* – Applied mechanics and technical physics. 2001, vol. 42, No. 1, pp. 147–156.

4. Ksendzenko L. S. *Razrabotka metoda opredeleniya parametrov zonal'noj struktury razrusheniya sil'no szhatogo massiva vokrug podzemnyh vyrabotok* [Development of a method for determining the parameters of the zonal structure of destruction of a highly compressed massives around underground workings] // *Vestnik Dal'nevostochnogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* – Herald of the Far Eastern State Technical University. 2011, No. 3/4 (8/9), pp. 144–166.

5. Ksendzenko L. S., Makarov V. V., Opanasyuk N. A., Golosov A. M. *Zakonomernosti deformirovaniya i razrusheniya sil'no szhatyh gornyh porod i massivov : monografiya* [Regularities of deformation and destruction of heavily compressed rocks and massives: monograph] / School of engineering of FEFU. Vladivostok. Far East. Feder. Un-ty. 2014. 192 p.

6. Losev A. S. *Butstrep metody postroeniya doveritel'nyh intervalov ocenki parametrov modeli zonal'noj dezintegracii gornyh porod vokrug podzemnoj vyrabotki* [Bootstrap methods for constructing confidence intervals of the parameter estimates of the model of the zonal disintegration of rocks around an underground excavation] // *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskije nauki* – Herald of the Dagestan State Technical University. Technical science. 2017, No. 44 (4), pp. 114–121.

7. Losev A. S. *Zavisimost' zony razrusheniya massiva vokrug gornoj vyrabotki ot predela prochnosti porody* [The dependence of the zone of destruction of the massive around the rock formation on the ultimate strength of the rock] / *Gornye nauki i tekhnologii* – Mining science and technology. 2017, No. 2, pp. 43–49.

8. Losev A. S. *Statisticheskaya ocenka parametra periodichnosti modeli zonal'noj dezintegracii gornyh porod* [Statistical estimation of the parameter of the model of zonal disintegration of rocks] // *Byulleten' nauki i praktiki. EHlektron. zhurn.*- Herald of science and practice. Electron. Journal. 2017, № 7 (20), pp. 78–82.
9. Makarov P. V. *Ob ierarhicheskoj prirode deformacii i razrusheniya tverdyh tel i sred* [About the hierarchical nature of deformation and fracture of solids and solid bodies] // *Fiz. Mezomekh.*- Phys. mezomekh. 2004, vol. 7, No. 4, pp. 25–34.
10. EHfron B. *Netradicionnye metody mnogomernogo statisticheskogo analiza* [Non-traditional methods of multivariate statistical analysis]. M. Finance and statistics. 1988. 263 p.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 004.942

doi: 10.25730/VSU.0536.18.19

Теоретическое определение сопротивления сжимаемого воздуха движению осесимметричной пули

А. С. Кравчук¹, А. И. Кравчук²

¹доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры био- и наномеханики, Белорусский государственный университет. Республика Беларусь, г. Минск. E-mail: ask_belarus@inbox.ru

²кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет. Республика Беларусь, г. Минск.
E-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

Аннотация. Решена задача дозвукового вихревого обтекания осесимметричной пули потоком сжимаемого воздуха средствами модуля FLOTRAN CFD программы ANSYS 10 ED. Установлено отсутствие вихреобразования позади пули. В качестве методики определения силы торможения пули в воздухе принято интегрирование давления по поверхности пули с учетом направления нормали. При этом раздельное интегрирование по передней части (где давление положительное) и задней части (где давление отрицательное) пули будет давать силы сопротивления, соответствующие отдельно геометрическим параметрам этих частей, и позволит проводить их раздельную аэродинамическую оптимизацию.

Ключевые слова: вихревое течение, сжимаемый воздух, ANSYS, FLOTRAN.

Введение. Исследование вихреобразования при обтекании препятствий является актуальным для любых технических объектов, так как оно приводит к повышению сопротивления среды при движении исследуемого тела.

В данной статье использовалась предложенная ранее авторская методика [1], реализованная для ANSYS 10 ED. Она применена к исследованию дозвукового обтекания осесимметричной пули.

Предлагаемый авторами подход к исследованию дозвукового обтекания объекта представляется более простым, чем изложенный в известной работе [2].

Краткое описание задачи. Хотя в постановке задачи необходимо рассмотреть осесимметричную пулю, движущуюся с постоянной скоростью в неподвижном воздухе, но очевидно, что для проведения расчетов достаточно обдувать неподвижную пулю набегающим потоком воздуха. В этом случае достаточно рассмотреть цилиндрический фрагмент среды (воздуха), описанный вокруг оси абсолютно твердой и недеформируемой осесимметричной пули. Естественно предполагается, что максимальный радиус отклонения формы пули от ее оси существенно меньше радиуса цилиндрического фрагмента среды, соосного с пулей. При этих предположениях достаточно рассмотреть плоское радиальное сечение цилиндрического фрагмента среды, в котором присутствует плоский профиль радиального сечения осесимметричной пули [1; 2].

Предварительные действия перед началом создания модели. Несмотря на то что решения структурных задач механики твердого тела с помощью ANSYS 10 ED совершенно не чувствительны к предварительному заданию рабочего имени файла и рабочей директории (папки), в модуле FLOTRAN CFD это действие имеет существенное значение, без которого работа данного модуля будет невозможна [1].

В список подготовительных мероприятий входит выбор типа решаемой задачи с помощью включения опции FLOTRAN CFD в окне Preferences, вызываемого через пункт главного меню Main Menu > Preferences. После появления окна Preferences for GUI filtering в нем необходимо выбрать FLOTRAN CFD и подтвердить выбор кнопкой OK [1].

Далее следует зафиксировать тип задачи с помощью выбора конкретного типа элемента, который будет использоваться в дальнейшем при решении, в пункте главного меню Main Menu> Preprocessor> Element Type> Add/Edit/Delete. После его использования появится окно Element Types, в котором следует нажать Add, а в следующем окне Library of Element Types необходимо выбрать элемент 2D FLOTRAN 141 [1]. Далее в окне Element Types следует нажать кнопку Options окна Element Types. В появившемся окне FLUID 141 element type options в раскрывающемся списке Element coordinate system K3 следует выбрать опцию Axisymm about Y и нажать кнопку ОК. После этого закрыть окно Element Types.

Создание твердотельной модели осевого сечения цилиндрического объема воздуха и осесимметричной пули. Создадим ключевые точки, определяющие некоторые габаритные размеры модели. Это действие выполняется с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Modeling> Create> Keypoints> In Active CS. В появившемся окне Create Keypoints in Active Coordinate System необходимо ввести последовательно номера и координаты ключевых точек в полях Keypoint number и X, Y, Z Location in active CS [3; 4], приведенные в табл. 1.

Далее необходимо с помощью сплайна создать линию, имитирующую переднюю и боковую поверхность пули, с помощью пункта меню Main Menu> Preprocessor> Modeling> Create> Lines> Splines> Spline thru KPs [3; 4]. При использовании указанного пункта следует последовательно выбрать точки 1–4 (табл. 1).

Таблица 1

Координаты ключевых точек (КП) плоского радиального сечения цилиндрического фрагмента воздуха с препятствием в виде пули

Номер КП	X-Лос (м)	Y-Лос (м)	Номер КП	X-Лос (м)	Y-Лос (м)
1	0	0	6	0	0.05
2	0.003	0.015	7	0.03	0.05
3	0.003	0.02	8	0.03	0.025
4	0.0025	0.025	9	0.03	0
5	0	0.025	---	---	--

Создание прямых линий модели сечения пули и цилиндрического фрагмента среды необходимо осуществить с помощью Main Menu> Preprocessor> Modeling> Create> Lines> Straight Line [3; 4]. Далее необходимо последовательно соединить ключевые точки 4 и 5 (L2), 5 и 6 (L3), 6 и 7 (L4), 7 и 8 (L5), 8 и 9 (L6), 9 и 0 (L7), 4 и 8 (L8) (рис. 1).

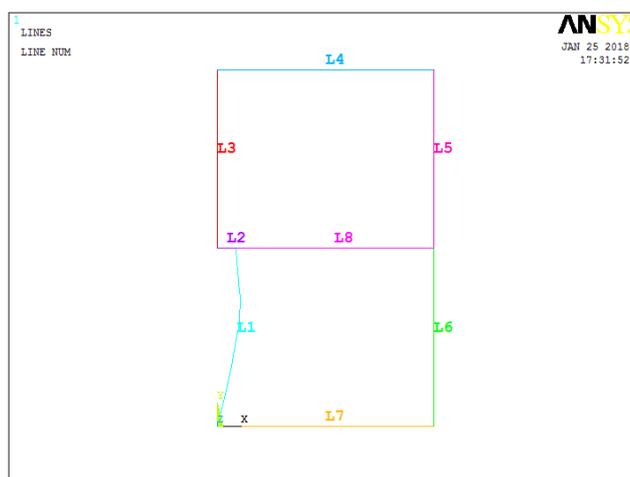


Рис. 1. Некоторые нумерованные линии создаваемой модели

На завершающем этапе создания плоской твердотельной модели осевого сечения ступенчатой трубы с поперечным препятствием происходит построение поверхностей, которое можно осуществить с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Modeling> Create> Areas> Arbitrary> By Lines [3; 4]. В этом случае необходимо выбрать линии L1, L8, L6, L4, L7 (для создания поверхности A1), L2, L3, L4, L5, L8 (для создания поверхности A2) (рис. 2).

Построенных на предыдущем шаге поверхностей недостаточно, так как перед пулей образуется фронт повышенного давления. Поэтому необходимо создать еще один прямоугольник с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Modeling> Create> Areas> Rectangle> By Dimensions [3; 4]. В появившемся окне Create rectangle by Dimensions необходимо набрать в полях первой

строки X1 X2 X-coordinates числа 0 и 0.03, а в полях второй строки Y1 Y2 Y-coordinates – числа 0 и -0.025 и нажать ОК. Будет создана поверхность A4 (рис. 2).

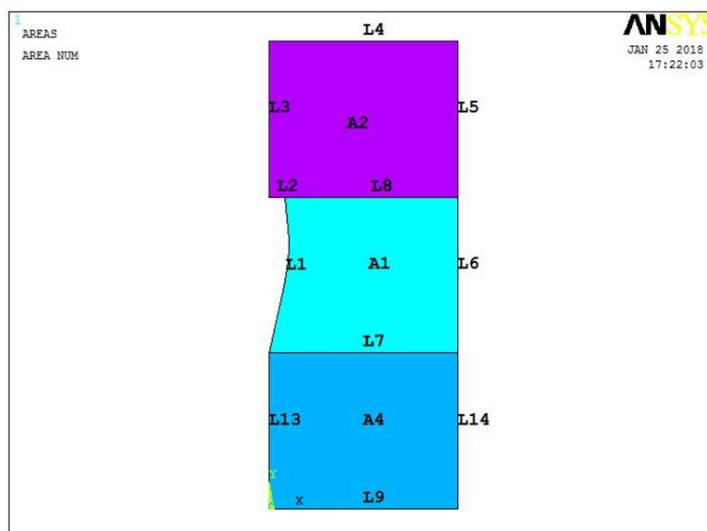


Рис. 2. Плоская модель радиального сечения цилиндрического объема воздуха и пули

Далее в связи с тем, что в дальнейшем будет строиться упорядоченное разбиение, необходимо склеить поверхности A1 и A3 с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Modeling> Operate> Booleans> Glue> Areas [3; 4]. При появлении меню выбора необходимо указать A1 и A3 и нажать кнопку ОК или сразу, пропустив выбор поверхностей, нажать кнопку Pick All.

Поскольку модель радиального сечения осесимметричной задачи должна лежать в первой четверти координатной плоскости (требование ANSYS), то построенные на предыдущих этапах поверхности должны быть перемещены вдоль положительного направления оси OY на 0.025. Для этого необходимо воспользоваться пунктом главного меню Main Menu> Preprocessor> Modeling> Move / Modify> Areas> Areas [3; 4]. В появившемся окне меню выбора необходимо нажать кнопку Pick All. Далее в окне ввода параметров в поле DY Y-offset in active CS ввести значение 0.025, а все остальные окна оставить пустыми (рис. 2).

Задание физических свойств сжимаемого воздуха. В отличие от структурного анализа и связанных задач структурного анализа, свойства газа или жидкости задаются в отдельном пункте меню, расположенном в разделе FLOTRAN Set Up главного меню ANSYS: Main Menu> Preprocessor> FLOTRAN Set Up> Fluid Properties [1; 2].

В окне Fluid Properties необходимо указать, что значения плотности (Density), динамической вязкости (Viscosity), теплопроводности (Conductivity) и удельной теплоемкости при постоянном давлении (Specific heat) соответствуют свойствам воздуха в системе единиц СИ, выбрав AIR-SI во всех списках. В полях Allow density variations?, Allow viscosity variations?, Allow conductivity variations?, Allow specific heat variations? необходимо выбрать Yes [1; 2], что означает возможность изменения соответствующих величин.

Далее необходимо задать термодинамические характеристики невозмущенного потока. Это выполняется с помощью пункта главного меню ANSYS: Main Menu> Preprocessor> FLOTRAN Set Up> Flow Environment> Ref Conditions [1; 2]. В окне Reference Conditions необходимо в поле Stagnation (total) temp указать величину температуры торможения T_0 , вычисляемую через нормальную температуру окружающей среды $T=293^{\circ}\text{K}$, скорость потока воздуха V (600 м/с) и удельную теплоемкость воздуха C_p (при нормальной температуре) по формуле:

$$T_0 = T + V^2 / (2 \cdot C_p) = 293 + 36 \cdot 10^4 / (2 \cdot 1005) \approx 472.$$

Назначать атрибуты построенным областям в данном случае необязательно, они определяются «по умолчанию».

Подготовка модели к разбиению. Назначение количества делений узлами конечно-элементной сетки на линиях модели сечения трубы можно выполнить с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Meshing> Size Cntrls> Manual Size> Lines> Picked Lines [1; 2]. Необходимо выбрать линии, приведенные в таблице, и в появившемся окне Element Sizes on Picked Lines указать количество делений в поле No. Of element divisions (NDIV) (табл. 2).

Таблица 2

**Значения количества делений узлами конечно-элементной сетки
на линиях геометрической модели**

Номер LINE	Количество делений NDIV	Номер LINE	Количество делений NDIV
1	15	8	20
2	5	13	20
3	20	---	---

Построение упорядоченного разбиения модели. Упорядоченное разбиение плоской модели сечения (рис. 2) будет осуществляться отдельно по поверхностям. Построение разбиения поверхности A1 можно осуществить с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Meshing> Mesh> Areas> Mapped> By Corners. Далее нужно последовательно выбрать Поверхность A1, нажать ОК и последовательно выбрать ее четыре угловые ключевые точки (рис. 2). Далее выбрать поверхность A2, нажать ОК и также указать ее угловые ключевые точки, выбрать поверхность A4 и повторить уже известное действие по выбору угловых точек и только после этого еще раз нажать ОК для завершения построения упорядоченного разбиения (рис. 3).

Задание краевых условий. Вначале зададим давление на границе цилиндрического фрагмента воздуха вокруг пули с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Loads> Define Loads> Apply> Fluid CFD> Pressure> On Lines [1; 2; 5]. Необходимо выбрать линии L5, L6, L9, L14 (рис. 2) и в появившемся окне Apply PRES on lines указать нулевое значение избыточного давления в поле Pressure value, затем выбрать Yes в поле Apply to endpoints.

Таким образом, в задаче предполагается, что радиус цилиндрического фрагмента окружающей среды достаточен для того, чтобы давление на его указанных границах оставалось невозмущенным.

Поскольку радиус цилиндрического фрагмента не настолько большой, чтобы утверждать что-либо о скоростях набегающего потока воздуха (как это делается в [2] для более значительного фрагмента среды), то граничные условия по скоростям будут задаваться на других границах.

Скорости на границах модели радиального сечения модели задаются с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> Loads> Define Loads> Apply> Fluid CFD> Velocity> On Lines [1; 2; 5]. Необходимо выбрать линии, приведенные в таблице, и в появившемся окне Apply VELO load on lines указать значения проекций вектора скорости в полях Vx Load value и Vy Load value, затем выбрать Yes в поле Apply to endpoints (табл. 3). Значения проекций вектора скорости на линиях L1, L2 (рис. 2) соответствуют условию прилипания (нулевые величины), на линиях L3, L13 (рис. 2) – условию симметрии задачи, на линии L9 (рис. 2) – скорости набегающего потока. Прочерки в полях указывают на то, что в соответствующем диалоговом окне не нужно ничего заполнять (оно должно остаться пустым).

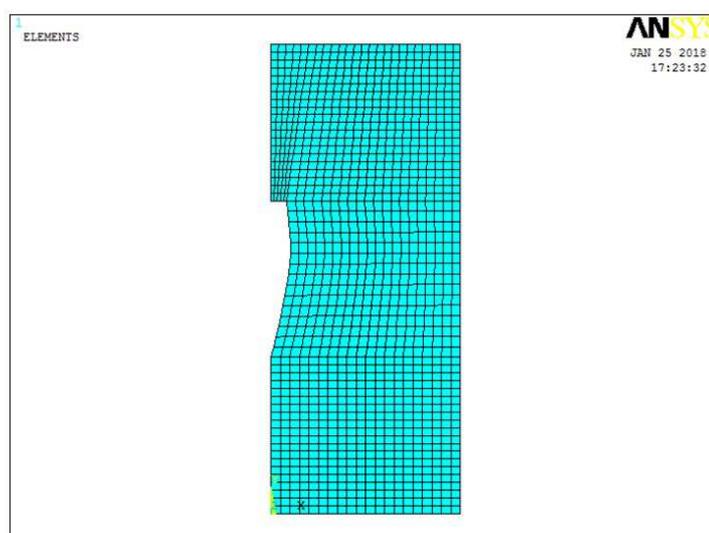


Рис. 3. Упорядоченное разбиение плоского радиального сечения цилиндрического объема воздуха вокруг пули

Список значений скоростей на границах сечения модели

Line	Vx	Vy	Line	Vx	Vy
1	0	0	9	0	600
2	0	0	13	0	---
3	0	--	---	---	---

Подготовительные мероприятия перед решением поставленной краевой задачи. Задача модели течения воздуха необходимо осуществить с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> FLOTRAN Set Up> Solution Options [1; 2]. В окне FLOTRAN Solution Options требуется выбрать опции: Steady State (стационарное течение), Adiabatic (адиабатическое течение), Turbulent (турбулентное течение), Compressible (сжимаемый воздух).

Выбор модели турбулентности. С помощью пункта главного меню: Main Menu> Preprocessor> FLOTRAN Set Up> Turbulence> Turbulence Model [1; 2]. В появившемся окне Turbulence Model необходимо выбрать модель турбулентности RNG (re-normalized group turbulence model), поскольку она является наиболее эффективной в моделях с искривленной геометрией. После нажать кнопку ОК. В появившемся окне RNG Model можно, при необходимости, изменить константы данной модели, но в данном случае константы оставляем без изменений.

Выбор алгоритма решения поставленной задачи осуществляется с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> FLOTRAN Set Up> Algorithm Cntrl. В окне Algorithm Control необходимо выбрать алгоритм Simplen [1; 2].

Назначение количества итераций осуществляется с помощью пункта главного меню Main Menu> Preprocessor> FLOTRAN Set Up> Execution Cntrl. В окне Steady State Control Settings следует указать число итераций 1000 в Global Iterations [1; 2].

При решении задачи может возникать ошибка с указанием на то, что в решаемой матрице на определенной итерации получаются отрицательные значения. Обойти данную ошибку можно с помощью пункта главного меню Main Menu > Preprocessor > FLOTRAN Set Up > Relax/Stab/Cap > MIR Stabilization. В окне MIR Stabilization нужно указать 0.35 в поле MOME Momentum Equation [1; 2].

Решение задачи и просмотр результатов. Запуск подготовленной задачи на решение осуществляется с помощью пункта главного меню: Main Menu> Solution> Run FLOTRAN [1; 2].

Для того чтобы получить доступ к результатам итерационного решения задачи, следует прочитать последние по времени данные решения. Выполняется это с помощью пункта меню: Main Menu > General Postproc > Read Results > Last Set [1; 2; 5].

Для симметричного отображения результатов решения необходимо выбрать пункт меню утилит Utility Menu > PlotCtrls > Style > Symmetry Expansion > 2D Axi-Symmetric Expansion. В появившемся окне следует выбрать 3/4 expansion [1; 2; 5].

Для отображения результатов нужно воспользоваться пунктом меню Main Menu > General Postproc > Plot Results > Nodal Solution [1; 2; 5]. В появившемся окне следует выбрать требуемые результаты в списке и нажать ОК (рис. 4).

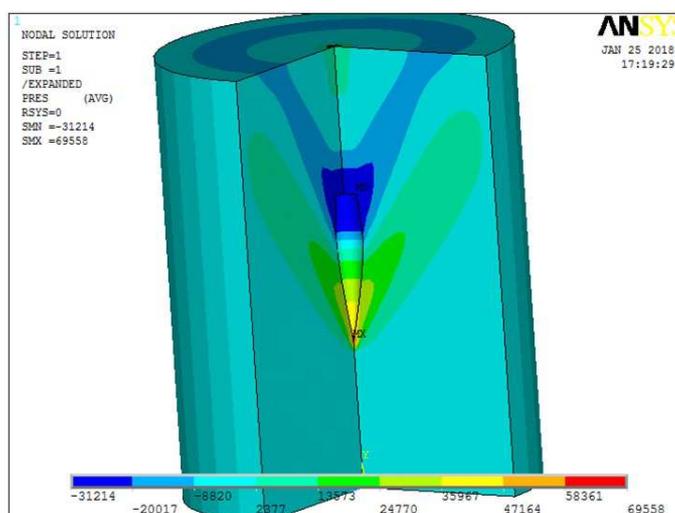


Рис. 4. Распределение давлений в цилиндрическом фрагменте сжимаемого воздуха

Выводы. Решена задача дозвукового вихревого обтекания осесимметричной пули потоком сжимаемого воздуха средствами модуля FLOTRAN CFD программы ANSYS 10 ED. Установлено отсутствие вихреобразования позади пули.

В качестве методики определения силы торможения пули в воздухе, очевидно, следует принять интегрирование по поверхности пули давления с учетом направления нормали. При этом раздельное интегрирование по передней части (где давление положительное) и задней части (где давление отрицательное) пули будет давать силы сопротивления, соответствующие отдельно геометрическим параметрам этих частей, и позволит проводить их раздельную аэродинамическую оптимизацию.

Список литературы

1. Кравчук А. С., Тарасюк И. А. Моделирование стационарного турбулентного обтекания цилиндрического препятствия потоком вязкой несжимаемой жидкости в ступенчатой трубе // *Машиностроение : сетевой электрон. науч. журн.* 2017. Т. 5. № 2. С. 26–31.

2. Шабаров В. В. Применение системы ANSYS к решению гидрогазодинамических задач. Н. Новгород : ННГУ, 2006. 108 с.

3. Кравчук А. С., Смалюк А. Ф., Кравчук А. И. Электронная библиотека механики и физики. Лекции по ANSYS с примерами решения задач : курс лекций для студ. механико-матем. фак., обуч. по спец. 1-31 03 02 «Механика (по направлениям)» : в 5 ч. Ч. 1. Графический интерфейс и командная строка. Средства создания геометрической модели. Минск : БГУ, 2013. 130 с. Деп. в БГУ 28.05.2013, № 001228052013. URL: <http://www.twirpx.com> (дата обращения: 20.02.2017).

4. Кравчук А. С., Смалюк А. Ф., Кравчук А. И. Электронная библиотека механики и физики. Лекции по ANSYS с примерами решения задач : курс лекций для студ. механико-матем. фак., обуч. по спец. 1-31 03 02 «Механика (по направлениям)» : в 5 ч. Ч. 2. Средства отображения и редактирования геометрических компонентов твердотельной модели. Примеры создания твердотельных моделей средствами ANSYS для решения физических задач. Минск : БГУ, 2013. 145 с. Деп. в БГУ 28.05.2013, № 001328052013. URL: <http://www.twirpx.com> (дата обращения: 20.02.2017).

5. Кравчук А. С., Смалюк А. Ф., Кравчук А. И. Электронная библиотека механики и физики. Лекции по ANSYS с примерами решения задач : курс лекций для студ. механико-матем. фак., обуч. по спец. 1-31 03 02 «Механика (по направлениям)» : в 5 ч. Ч. 4. Ограничения и нагрузки. Разделы Solution и General Postproc главного меню. Примеры постановки краевых задач, их решения и просмотра результатов. Минск : БГУ, 2013. 118 с. Деп. в БГУ 28.05.2013, № 001528052013. URL: <http://www.twirpx.com/> (дата обращения: 20.02.2017).

The theoretical determination of the resistance of compressible air to the motion of an axisymmetric bullet

A. S. Kravchuk¹, A. I. Kravchuk²

¹Doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, professor of the Department of bio- and nanomechanics, Belarusian State University. Republic of Belarus, Minsk. E-mail: ask_belarus@inbox.ru

²PhD of physical and mathematical sciences, associate professor, associate Professor of the Department of web technologies and computer modeling, Belarusian State University. Republic of Belarus, Minsk. E-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

Abstract. The problem of subsonic air flow around an axisymmetric bullet solved by means of the FLOTRAN CFD module of the ANSYS 10 ED program. It is established that there is no vortex formation behind the bullet. A technique for determining air resistance to the motion of a bullet based on the obtained data on the distribution of pressure at the boundary of the radial cross section of the bullet is proposed.

Keywords: Vortex flow, steady flow, compressible gas, ANSYS, FLOTRAN.

References

1. Kravchuk A. S., Tarasyuk I. A. *Modelirovanie stacionarnogo turbulentnogo obtekaniya cilindricheskogo prepyatstviya potokom вязкой несжимаемой жидкости в ступенчатой трубе* [Simulation of stationary turbulent flow past a cylindrical obstacle by flow of a viscous incompressible fluid in the stepped tube] // *Mashinostroenie : setevoy ehlektron. nauch. zhurn.* – Machinery: network electron. scientific journal. 2017, vol. 5, No. 2, pp. 26–31.

2. SHabarov V. V. *Primenenie sistemy ANSYS k resheniyu gidrogazodinamicheskikh zadach* [Application of the system ANSYS for solution of tasks of water and gas flows]. N. Novgorod. NNSU. 2006. 108 p.

3. Kravchuk A. S., Smalyuk A. F., Kravchuk A. I. *EHlektronnaya biblioteka mekhaniki i fiziki. Lekcii po ANSYS s primerami resheniya zadach : kurs lekcij dlya stud. mekhaniko-matem. fak., obuch. po spec. 1-31 03 02 «Mekhanika (po napravleniyam)» : v 5 ch. CH. 1. Graficheskij interfejs i komandnaya stroka. Sredstva sozdaniya geometricheskoy modeli.*

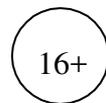
[Electronic library of mechanics and physics. Lectures on ANSYS with the examples of solving problems: a course of lectures for students of mechanics and math. fac., teaching on specialities 1-31 03 02 "Mechanics (on directions)" : 5 pts. Pt. 1. Graphical interface and command line. Tools for creating a geometric model. Minsk. BSU. 2013. 130 p. Dep. in BSU 28.05.2013, № 001228052013. Available at: <http://www.twirpx.com> (date accessed: 20.02.2017).

4. Kravchuk A. S., Smalyuk A. F., Kravchuk A. I. *EHlektronnaya biblioteka mekhaniki i fiziki. Lekcii po ANSYS s primerami resheniya zadach : kurs lekcij dlya stud. mekhaniko-matem. fak., obuch. po spec. 1-31 03 02 «Mekhanika (po napravleniyam)» : v 5 ch. CH. 2. Sredstva otobrazheniya i redaktirovaniya geometricheskikh komponentov tverdotel'noj modeli. Primery sozdaniya tverdotel'nyh modelej sredstvami ANSYS dlya resheniya fizicheskikh zadach* [Electronic library of mechanics and physics. Lectures on ANSYS with the examples of solving problems: a course of lectures for students. mechanics and math. fuck., teach. special. 1-31 03 02 "Mechanics (on directions)" : 5 p. 2. Tools for displaying and editing the geometric components of a solid model. Examples of creating solid-state models using ANSYS for solving physical problems. Minsk: BSU, 2013. 145 p. DEP. in BSU 28.05.2013, № 001328052013. Available at: <http://www.twirpx.com> (date accessed: 20.02.2017).

5. Kravchuk A. S., Smalyuk A. F., Kravchuk A. I. *EHlektronnaya biblioteka mekhaniki i fiziki. Lekcii po ANSYS s primerami resheniya zadach : kurs lekcij dlya stud. mekhaniko-matem. fak., obuch. po spec. 1-31 03 02 «Mekhanika (po napravleniyam)» : v 5 ch. CH. 4. Ogranicheniya i nagruzki. Razdely Solution i General Postproc glavnogo menyuu. Primery postanovki kraevykh zadach, ih resheniya i prosmotra rezul'tatov* [Electronic library of mechanics and physics. Lectures on ANSYS with the examples of solving problems: a course of lectures for students. mechanics and math. fac., teaching on specialities 1-31 03 02 "Mechanics (on directions)": in 5 pts. Pt. 4. Limitations and loads. Sections Solution and General Postproc of the main menu. Examples of setting boundary value problems, their solutions and viewing the results]. Minsk. BSU. 2013. 118 p. Dep. in BSU

28.05.2013, № 001528052013. Available at: <http://www.twirpx.com/> (accessed: 20.02.2017).

Научный журнал № 2 (2018)



Научное издательство Вятского государственного университета,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964