

Уравнение баланса энергии в численных моделях с учетом вихревых токов в сердечниках магнитопровода

С. Н. Запольских

кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной физики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: zapose@mail.ru

Аннотация. С целью повышения точности расчета с помощью численных моделей рассматривается уравнение баланса энергетических характеристик для электромеханических систем, в котором учитываются магнитные потоки, создаваемые вихревыми токами в листах электротехнической стали. Из этого уравнения получаются все энергетические характеристики в виде дифференциальных уравнений, включая магнитные потери в сердечниках магнитопровода. Полученные таким образом дифференциальные уравнения могут быть включены в общую систему дифференциальных уравнений численных моделей. К таким электромагнитным системам, для которых можно использовать полученные результаты, относятся электромеханические преобразователи энергии, в них осуществляется накопление магнитной энергии, а энергопреобразование происходит при постоянном потокосцеплении. Сюда также можно отнести импульсные трансформаторы, в которых вначале происходит накопление магнитной энергии от источника электрического тока, а затем отдача накопленной магнитной энергии в виде мощного импульса тока при подключении нагрузки. Для этих целей не подходят методы, используемые в системах переменного тока. Для учета влияния вихревых токов необходимо использовать именно дифференциальные уравнения, которые и позволяют учесть влияние магнитного потока вихревых токов на основной магнитный поток и получить таким образом более точные результаты. Уравнение для потерь энергии представлено не в интегральном, а в дифференциальном виде, что позволит включить это уравнение в общую систему дифференциальных уравнений численных моделей, исключить, таким образом, интерполяцию дискретных данных, получаемых при численном решении дифференциальных уравнений, и ускорить работу используемых для этих целей компьютерных математических систем.

Ключевые слова: электромеханические системы, дифференциальные уравнения, численное моделирование, накопители магнитной энергии, системы с постоянным потокосцеплением.

Введение. С развитием компьютерных средств и появлением математических пакетов программ, которые могут решать дифференциальные уравнения, появилась возможность разрабатывать численные модели, с помощью которых можно получать гораздо больше информации об исследуемом и разрабатываемом объекте, чем с помощью теоретических и экспериментальных исследований. Наиболее точно и полно физические законы отображаются именно дифференциальными и интегральными уравнениями, в частности это относится к механике и электромагнетизму, и все это можно использовать для технических целей. Разработка численных моделей является многоэтапным процессом, и разработку численной модели лучше всего начинать с простой абстрагированной модели, уравнения которой могут решаться аналитическими методами, не прибегая к программным средствам. По мере накопления данных численная модель уточняется, приближаясь к реальной системе. Результаты, которые дают численные модели, уже получены и представлены, например, в работе [1]. С помощью численных моделей получено значительное увеличение энергетических характеристик электромеханических систем с постоянным потокосцеплением, которое подтверждают экспериментальные данные, например, полученные в работе [2]. На данном этапе продолжается исследование, связанное с уточнением численных моделей.

Цель исследования. Целью работы является уточнение численных моделей электромеханических систем с постоянным потокосцеплением путем учета влияния магнитного поля вихревых токов в листах электротехнической стали на основной магнитный поток. Другой целью является представление в качестве примера, как можно дополнять новой информацией и совершенствовать такие численные модели.

Задачи исследования. Задачами работы является получение уравнений, способных учесть влияние магнитных потоков, создаваемых вихревыми токами и пригодных для использования в численных моделях.

Уравнение баланса энергий. Правильность учета энергетических характеристик в численных моделях электромеханических систем может быть проверена с помощью уравнения баланса энергетических характеристик. Например, в электрических двигателях с постоянным потокоцеплением работа, совершаемая источником питания, должна равняться энергии потерь в проводах, магнитным потерям, накопленной магнитной энергии как в рабочих зазорах, так и в сердечниках магнитопровода, магнитных потоках рассеяния и работе электромагнитной силы. Уравнение баланса энергий получается из основных уравнений электромагнетизма, которые обычно используются при расчете характеристик и параметров электромеханических устройств. Из уравнения баланса энергий также получают все выражения для энергетических характеристик в виде функциональных зависимостей, позволяющие рассчитать энергетические характеристики в любой момент и в любом положении вторичной части электромеханического преобразователя. Уравнение баланса энергий использовалось в работе [1] при расчете характеристик импульсных электрических двигателей, в которых осуществляется предварительное накопление магнитной энергии, а энергопреобразование осуществляется при постоянном потокоцеплении. В этой работе не учитывалось влияние магнитных потоков, создаваемых вихревыми токами в листах электротехнической стали, на основной магнитный поток, создаваемый обмоткой, и поэтому энергия магнитных потерь не входила в уравнение баланса энергии. Она рассчитывалась отдельно и затем учитывалась в окончательных результатах. В этой работе с целью повышения точности расчета характеристик импульсных электромеханических систем влияние магнитных потоков, создаваемых вихревыми токами на основной магнитный поток, учитывается. Основные уравнения электромагнетизма, представленные в виде уравнений электрических цепей и магнитной цепи, запишутся:

$$U - Ri = w \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

$$-r_F i_F = \frac{1}{n_F} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

$$(R_{M\delta} + R_{MM})\Phi = R_M \Phi = wi + i_F \quad (3)$$

где Φ – магнитный поток, проходящий через пакет электротехнической стали; i – электрический ток в обмотке; w – число витков обмотки; i_F – электрический ток в листе электротехнической стали; n_F – число листов электротехнической стали в пакете; $R_{M\delta}$ и R_{MM} – магнитные сопротивления рабочего зазора и магнитного материала для пакета электротехнической стали; R_M – полное магнитное сопротивление магнитной цепи.

Чтобы получить уравнение баланса энергий уравнение (1) нужно умножить на idt , а уравнение (2) – на $i_F dt$. Затем левые и правые части полученных выражений сложить:

$$Uidt - Ri^2 dt - n_F r_F i_F^2 dt = (wi + i_F) d\Phi. \quad (4)$$

В левой части уравнения (4) стоят дифференциал работы источника питания, дифференциал потерь в проводниках обмотки и в стальных сердечниках магнитопровода.

Энергетические характеристики. Проинтегрировав значение этих переменных до момента времени t , получим в виде:

$$W_E = \int_0^t Uidt, \quad (5)$$

$$W_{Dg} = R \int_0^t i^2 dt, \quad (6)$$

$$W_F = n_F r_F \int_0^t i_F^2 dt. \quad (7)$$

Целесообразнее представить эти выражения в дифференциальной форме и полученные выражения включить в общую систему дифференциальных уравнений численных моделей:

$$\frac{dW_E}{dt} = Ui, \quad (8)$$

$$\frac{dW_{Dg}}{dt} = Ri^2, \quad (9)$$

$$\frac{dW_F}{dt} = n_F r_F i_F^2. \quad (10)$$

Вывод формул для магнитных потерь в сердечниках и работы электромагнитной силы. В правую часть выражения (7) входит дифференциал, включающий магнитную энергию и работу электромагнитной силы.

$$(wi + i_F)d\Phi = id\Psi_M + i_F d\Psi_F = dW_M + dA_M + dW_F + dA_F,$$

где $\Psi_M = w\Phi$ и $\Psi_F = \Phi$ – потокосцепление обмотки с числом витков w с полным магнитным потоком Φ и потокосцепление вихревого тока i_F , который представляется протекающим по одному эквивалентному витку с магнитным потоком Φ ; W_M и W_F – магнитная энергия магнитного поля, создаваемая электрическим током обмотки и вихревым током; A_M и A_F работа электромагнитной силы, связанная с электрическим током обмотки и вихревым током.

Дифференциалы магнитной энергии и работы электромагнитной силы вычисляются по известным формулам:

$$dW_M = \frac{1}{2} id\Psi + \frac{1}{2} \Psi di = \frac{1}{2} wid\Phi + \frac{1}{2} w\Phi di,$$

$$dW_F = \frac{1}{2} i_F d\Psi_F + \frac{1}{2} \Psi_F di_F = \frac{1}{2} i_F d\Phi + \frac{1}{2} \Phi di_F,$$

$$dA_M = \frac{1}{2} id\Psi - \frac{1}{2} \Psi di = \frac{1}{2} wid\Phi - \frac{1}{2} w\Phi di,$$

$$dA_F = \frac{1}{2} i_F d\Psi_F - \frac{1}{2} \Psi_F di_F = \frac{1}{2} i_F d\Phi - \frac{1}{2} \Phi di_F.$$

Из этих уравнений с учетом (3) следует, что дифференциалы полной магнитной энергии и полной работы электромагнитной силы равны:

$$\begin{aligned} dW_{\Sigma M} = dW_M + dW_F &= \frac{1}{2} (wi + i_F) d\Phi + \frac{1}{2} \Phi d(wi + i_F) = \frac{1}{2} R_M \Phi d\Phi + \frac{1}{2} \Phi d(R_M \Phi) = \\ &= R_M \Phi d\Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 dR_M. \end{aligned} \quad (11)$$

$$dA_{\Sigma} = dA_M + dA_F = \frac{1}{2} (wi + i_F) d\Phi - \frac{1}{2} \Phi d(wi + i_F) = \frac{1}{2} R_M \Phi d\Phi - \frac{1}{2} \Phi d(R_M \Phi) = -\frac{1}{2} \Phi^2 dR_M. \quad (12)$$

Для работы электромагнитной силы была получена аналогичная формула [1], в которой получается то же магнитное сопротивление, но магнитный поток теперь уже состоит из двух магнитных потоков, магнитного потока, создаваемого током обмотки, и магнитного потока, создаваемого вихревыми токами сердечников, и эти два магнитных потока направлены противоположно.

Дифференциальные уравнения для магнитной энергии и работы электромагнитной силы, таким образом, запишутся:

$$\frac{dW_{\Sigma M}}{dt} = R_M \Phi \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dR_M}{dt}, \quad (13)$$

$$\frac{dA_{\Sigma}}{dt} = -\Phi^2 \frac{dR_M}{dt}. \quad (14)$$

Уравнения (1), (2) и (3) применяются непосредственно к расчету электромеханических систем, работающих в режиме электрического двигателя с постоянным потокосцеплением, исследованием которых у нас в настоящее время и занимаются. Для электромеханических систем, работающих в режиме электрического генератора, эти уравнения тоже могут быть использованы с небольшой доработкой. Электрический генератор с постоянным потокосцеплением отличается от подобного электрического двигателя тем, что в нейтральном положении вторичной части, когда магнитное сопротивление рабочего зазора минимальное, в обмотку поддается импульс тока возбуждения, а затем при перемещении вторичной части работа внешних сил преобразуется в магнитную энергию. В конце такта, когда магнитное сопротивление рабочего зазора становится максимальным, накопленная магнитная энергия при подключении нагрузки преобразуется в электриче-

скую энергию, например в тепло на активном сопротивлении. Поэтому в уравнение (1) импульс напряжения силового источника питания надо заменить импульсом напряжения возбуждения малой энергии. Так как работа совершается внешними силами, которые направлены противоположно электромагнитной силе, то работы, совершаемые внешними силами и электромагнитной силой, надо брать с противоположным знаком. Кроме того, систему уравнений (1) и (2) при вычислении энергии, отдаваемой нагрузке, надо дополнить аналогичной системой с параметрами нагрузки, например активным сопротивлением нагрузки. При необходимости все это может быть проанализировано и более подробно изложено в отдельной публикации.

Результаты исследования, их обсуждение. Получены дифференциальные уравнения для магнитной энергии и работы электромагнитной силы, учитывающие влияние магнитных потоков, создаваемых вихревыми токами, и пригодные для использования в численных моделях.

Выводы. Учет магнитных потоков, создаваемых вихревыми токами, позволит повысить точность результатов, даваемых численными моделями. Полученные результаты можно использовать для электромеханических преобразователей энергии, в которых осуществляется накопление магнитной энергии, а энергопреобразование происходит при постоянном потокосцеплении. Сюда также можно отнести импульсные трансформаторы, в которых вначале происходит накопление магнитной энергии от источника электрического тока, а затем отдача накопленной магнитной энергии в виде мощного импульса тока при подключении нагрузки. Эти уравнения могут быть включены в общую систему основных дифференциальных уравнений численных моделей, а само уравнение баланса энергий использовано для проверки правильности учета энергетических характеристик.

Список литературы

1. *Запольских С. Н.* Импульсные системы с индуктивными накопителями энергии / С. Н. Запольских. Киров : ПРИП ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2012. 121 с.
2. *Ряшенцев Н. П., Угаров Г. Г., Львицин А. В.* Электромагнитные прессы. Новосибирск : Наука, Сиб. отделение, 1989. 216 с.

Energy balance equation in numerical models taking into account eddy currents in magnetic cores

S. N. Zapolsky

PhD of technical sciences, associate professor of the Department of engineering physics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. E-mail: zapose@mail.ru

Abstract. In order to improve the accuracy of the calculation with the help of numerical models, the equation of the balance of energy characteristics for electromechanical systems is considered, which takes into account the magnetic fluxes generated by eddy currents in the sheets of electrical steel. From this equation all energy characteristics are obtained in the form of differential equations, including magnetic losses in the cores of the magnetic circuit. Thus obtained differential equations can be included in the general system of differential equations of numerical models. Such electromagnetic systems for which it is possible to use the obtained results are electromechanical energy converters in them is the accumulation of magnetic energy, and energy formation is carried out at constant flux linkage. This also includes pulse transformers, in which the first accumulation of magnetic energy from the source of electric current occurs, and then the return of the accumulated magnetic energy in the form of a powerful current pulse when the load is connected. For these purposes, the methods used in AC systems are not suitable. To take into account the influence of eddy currents, it is necessary to use differential equations, which allow to take into account the influence of the magnetic flux of eddy currents on the main magnetic flux and thus obtain more accurate results. The equation for energy losses is presented not in integral, but in differential form, which will allow to include this equation in the general system of differential equations of numerical models, to exclude, thus, interpolation of discrete data obtained by numerical solution of differential equations, and to accelerate the work of computer mathematical systems used for this purpose.

Keywords: electromechanical systems, differential equations, numerical modeling, magnetic energy storage, systems with constant flow coupling.

References

1. *Zapol'skih S. N.* *Impul'snye sistemy s induktivnymi nakopitelyami energii* [Pulse systems with inductive energy storage] / S. N. Zapolsky. Kirov. VyatSU. 2012. 121 p.
2. *Ryashencev N. P., Ugarov G. G., L'vicin A. V.* *Elektromagnitnye pressy* [Electromagnetic presses]. Novosibirsk. Nauka. Sib. department. 1989. 216 p.