УДК 517.97 DOI 10.25730/VSU.0536.20.014

Контрольная работа по спецкурсу «Вариационные принципы конформных отображений»*

Е. С. Алексеева[1], А. Э. Рассадин[2]
[1]член Нижегородского математического общества.
Россия, г. Нижний Новгород. ORCID: 0000-0001-7132-0931. E-mail: kometarella@mail.ru
[2]член Правления Нижегородского математического общества.
Россия, г. Нижний Новгород. ORCID: 0000-0001-5644-4012. E-mail: brat_ras@list.ru

Аннотация. В статье описана контрольная работа по дополнительным главам теории функций комплексного переменного, в которой перед учащимися ставится задача нахождения явного вида приближенного конформного отображения области, слабо отличающейся от единичного круга, на единичный круг. Для различных вариантов этой контрольной работы приведены графики границ таких областей и профили искажений декартовой координатной сетки, задаваемых приближенными конформными отображениями этих областей. Дан алгоритм увеличения числа вариантов контрольной работы в случае необходимости без потери их качества. Обсуждено применение полученных результатов для построения целых классов приближенных решений ряда задач теории функций одной комплексной переменной, а именно для нахождения асимптотического решения классической задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа и асимптотического разложения многочленов Фабера для областей с границами, близкими к единичной окружности как по положению, так и по кривизне.

Ключевые слова: комплексная плоскость, ряд Лорана, ряд Фурье, интеграл Шварца, суммирование степенных рядов.

> Мы – карлики, взобравшиеся на плечи гигантов. Мы видим больше и дальше, чем они, не потому, что згляд у нас острее и сами мы выше, но потому, что они подняли нас вверх и воздвигли на свою гигантскую высоту.
>
> *Бернар Шартрский*

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) является одним из краеугольных камней в фундаменте образования математиков, физиков и инженеров. В отечественной учебной литературе существует целый набор книг (см., например, [3; 13; 16; 18]), в которых излагаются простейшие свойства голоморфных и мероморфных функций, элементарная теория конформных отображений и приложения теории вычетов. Тем не менее при практической работе в различных разделах физики и техники – от традиционных областей, таких как механика сплошных сред или теплотехника [8], до более современных, таких как теория сверхпроводимости (см. [9] и ссылки там) и квантовая теория поля [4], – зачастую требуются гораздо более глубокие знания по ТФКП, чем те, которые могут дать классические руководства [3; 13; 16; 18].

Как правило, в университетах и институтах с повышенной подготовкой по математике этот пробел закрывается чтением спецкурсов по ТФКП, тематика которых определяется профилем вуза. Например, особо обширный выбор подобных спецкурсов предоставляет своим студентам Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского федерального университета [1; 5; 14]. Традиционно высокий уровень лекций по дополнительным главам ТФКП поддерживает Научно-образовательный центр при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН [17; 20]. Однако спецкурсы [1; 5; 14; 17; 20] имеют ярко выраженный теоретический характер. Между тем можно указать набор спецкурсов по ТФКП с четкой прикладной направленностью.

Среди возможных спецкурсов по ТФКП практического характера выделенной ролью обладает спецкурс с ориентировочным названием «Вариационные принципы конформных отображений», который можно наполнить результатами, изложенными в монографии [7], впоследствии полностью

* А. Э. Рассадин поддержан РФФИ, грант № 18-08-01356-а.

вошедшей в известное руководство [8] энциклопедического характера. Роль этого спецкурса в подготовке генерального конструктора, занимающегося концептуальным проектированием сложных технических систем [6; 10], очевидна: методы, развитые в книге [7], учат простым способам пересчета физических величин в системе при переходе от одной конструкции к близкой к ней по параметрам, например, расчету подъемной силы при вариации профиля крыла, при создании гидротехнических сооружений с учетом движения грунтовых вод и т. д. [7; 8]. Подчеркнем, что несмотря на то, что основные результаты, наполняющие такой спецкурс, получены более 70 лет назад, он не только не устарел, но в преддверии появления суперЭВМ экзафлопсной производительности [2] стал еще более актуален, чем раньше, потому что чем мощнее компьютер, тем лучше его пользователи должны уметь экономить его вычислительные ресурсы.

В этой связи естественно возникает вопрос о контроле знаний слушателей спецкурса «Вариационные принципы конформных отображений». Поскольку классической формой проверки усвоения материала учащимися является контрольная работа, то эта проблема сводится к вопросу о насыщении рассматриваемого спецкурса контрольными работами, поэтому в данной статье описана контрольная работа по одной из его основных тем, а именно по получению приближенных конформных отображений на единичный круг областей, мало отличающихся от него. Далее статья имеет следующую структуру: сначала для удобства изложения мы, следуя [8, гл. 4], изложим теоретическую часть предлагаемой контрольной работы, затем опишем шесть вариантов этой контрольной работы для конкретных односвязных областей, а в заключении статьи обсудим полученные результаты и перспективы дальнейших исследований.

Приближенное конформное отображение для области, мало отличающейся от единичного круга. Пусть D – звездная область на комплексной плоскости C, содержащая начало координат, с границей $\Gamma = \partial D$, и пусть полярное уравнение ее границы Γ имеет вид:

$$r = 1 - \varepsilon \cdot \delta(\varphi),\ \varphi \in [0,2\pi], \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, а периодическая с периодом $2 \cdot \pi$ функция $\delta \in C^2([0,2\pi])$, то есть замкнутая кривая (1) близка к единичной окружности $|z|=1$ ($z = x + i \cdot y$) как по своему расположению, так и по кривизне.

Как известно [7; 8], в этом случае для функции $w = f(z,\Gamma)$, реализующей конформное отображение области D на единичный круг $\Lambda_w = \{w \in C \,\|\, w| < 1\}$ и удовлетворяющей условиям $f(0,\Gamma) = 0$ и $f'(0,\Gamma) > 0$, справедлива следующая асимптотическая формула:

$$w = f(z,\Gamma) = z \cdot \left\{1 + \frac{\varepsilon}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \delta(\varphi) \cdot \frac{\exp(i\varphi) + z}{\exp(i\varphi) - z} d\varphi \right\} + O(\varepsilon^2). \tag{2}$$

На практике функцию $\delta(\varphi)$ в силу ее периодичности удобно представлять в виде ряда Фурье с действительными коэффициентами:

$$\delta(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi). \tag{3}$$

Далее заметим, что в фигурных скобках в формуле (2) перед ε стоит так называемый интеграл Шварца [8], в котором чисто мнимая постоянная добавка положена равной нулю:

$$[\hat{S}\delta(\varphi)](z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \delta(\varphi) \cdot \frac{\exp(i\varphi) + z}{\exp(i\varphi) - z} d\varphi. \tag{4}$$

Этот интегральный оператор $\hat{S}$ дает аналитическую в единичном круге $\Lambda_z = \{z \in C \,\|\, z| < 1\}$ функцию, действительная часть которой на единичной окружности $|z|=1$ принимает заданные значения (3) в каждой точке непрерывности функции $\delta(\varphi)$ [8, гл. 3].

Легко убедиться в том, что для $z \in \Lambda_z$ и $n \in N$:

$$[\hat{S}(\cos n\varphi)](z) = z^n,\ [\hat{S}(\sin n\varphi)](z) = -i \cdot z^n. \tag{5}$$

Действуя оператором (4) на ряд Фурье (3) с учетом формул (5) получаем:

$$[\hat{S}\delta(\varphi)](z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n - i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot z^n. \tag{6}$$

Таким образом, если удается просуммировать входящие в выражение (6) степенные ряды, то член первого порядка по ε в формуле (2) выписывается в конечном виде. На этом факте и базируется описываемая здесь контрольная работа.

Варианты контрольной работы. В качестве основы для реализации предложенной в предыдущем разделе идеи возьмем задачу 20.32 из сборника задач [15]. В этой задаче требуется разложить вещественные функции с периодом $2\cdot\pi$ в ряды Фурье с помощью их известной связи с рядами Лорана на единичной окружности [8, гл. 5]. Тем самым в каждом примере из рассматриваемой задачи содержится «заготовка» в виде разложения (3) потенциальной вариации радиуса области D, которое необходимо для применения формулы (6), нужной в свою очередь для записи выражения (2) приближенного конформного отображения этой области на единичный круг Λ_w. Более того, оказалось, что все ряды Фурье из этой задачи приводят в формуле (6) к суммируемым в конечном виде степенным рядам.

Отталкиваясь от примеров, имеющихся в этой задаче, можно составить 6 различных вариантов контрольной работы. Во всех вариантах параметр $a \in (-1, 1)$.

<u>Вариант 1</u>

Вариация радиуса области D_1:

$$\delta_1(\varphi) = \frac{1 - a\cdot\cos\varphi}{1 - 2\cdot a\cdot\cos\varphi + a^2}.$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\delta_1(\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \cos n\varphi.$$

Приближенное конформное отображение области D_1 на Λ_w:

$$f(z, \Gamma_1) = z + \varepsilon \cdot \frac{z}{1 - a\cdot z} + O(\varepsilon^2).$$

<u>Вариант 2</u>

Вариация радиуса области D_2:

$$\delta_2(\varphi) = \frac{a\cdot\sin\varphi}{1 - 2\cdot a\cdot\cos\varphi + a^2}.$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\delta_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \sin n\varphi.$$

Приближенное конформное отображение области D_2 на Λ_w:

$$f(z, \Gamma_2) = z - i\cdot\varepsilon \cdot \frac{a\cdot z^2}{1 - a\cdot z} + O(\varepsilon^2).$$

<u>Вариант 3</u>

Вариация радиуса области D_3:

$$\delta_3(\varphi) = \frac{1 - a^2}{1 - 2\cdot a\cdot\cos\varphi + a^2}.$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\delta_3(\varphi) = 1 + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \cos n\varphi.$$

Приближенное конформное отображение области D_3 на Λ_w:

$$f(z, \Gamma_3) = z + \varepsilon\cdot z \cdot \frac{1 + a\cdot z}{1 - a\cdot z} + O(\varepsilon^2).$$

Вариант 4

Вариация радиуса области D_4:

$$\delta_4(\varphi) = \frac{1}{1 - a \cdot \sin\varphi} .$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\delta_4(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{2 \cdot a}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{2n} \cos 2n\varphi -$$

$$- \frac{2 \cdot a}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{2n-1} \sin(2n-1)\varphi$$

Приближенное конформное отображение области D_4 на Λ_w:

$$f(z, \Gamma_4) = z + \varepsilon \cdot \frac{a \cdot z}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{a - i \cdot z \cdot (1 - \sqrt{1-a^2})}{a + i \cdot z \cdot (1 - \sqrt{1-a^2})} + O(\varepsilon^2) .$$

Вариант 5

Вариация радиуса области D_5:

$$\delta_5(\varphi) = \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + 2 \cdot a \cdot \cos\varphi + a^2)^2} .$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\delta_5(\varphi) = \frac{1}{2 \cdot a^2 (1-a^2)} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n \cdot [1 + a^2 - n \cdot (1-a^2)] \cdot \cos n\varphi \right\} .$$

Приближенное конформное отображение области D_5 на Λ_w:

$$f(z, \Gamma_5) = z + \varepsilon \cdot z \cdot \frac{1 + 2 \cdot a \cdot (1-a^2) \cdot z - a^4 \cdot z^2}{2 \cdot a^2 \cdot (1-a^2) \cdot (1 + a \cdot z)^2} + O(\varepsilon^2) .$$

Вариант 6

Вариация радиуса области D_6:

$$\delta_6(\varphi) = \ln(1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos\varphi) .$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\delta_6(\varphi) = -2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cdot \cos n\varphi .$$

Приближенное конформное отображение области D_6 на Λ_w:

$$f(z, \Gamma_6) = z + \varepsilon \cdot 2 \cdot z \cdot \ln(1 - a \cdot z) + O(\varepsilon^2) .$$

Типичные графики границ Γ_j областей D_j, $j = \overline{1,6}$, построенные по уравнению (1), приведены на рис. 1–6. Также на этих рисунках показаны эпюры искажения декартовой координатной сетки при приближенных конформных отображениях $f(z, \Gamma_j)$, $j = \overline{1,6}$.

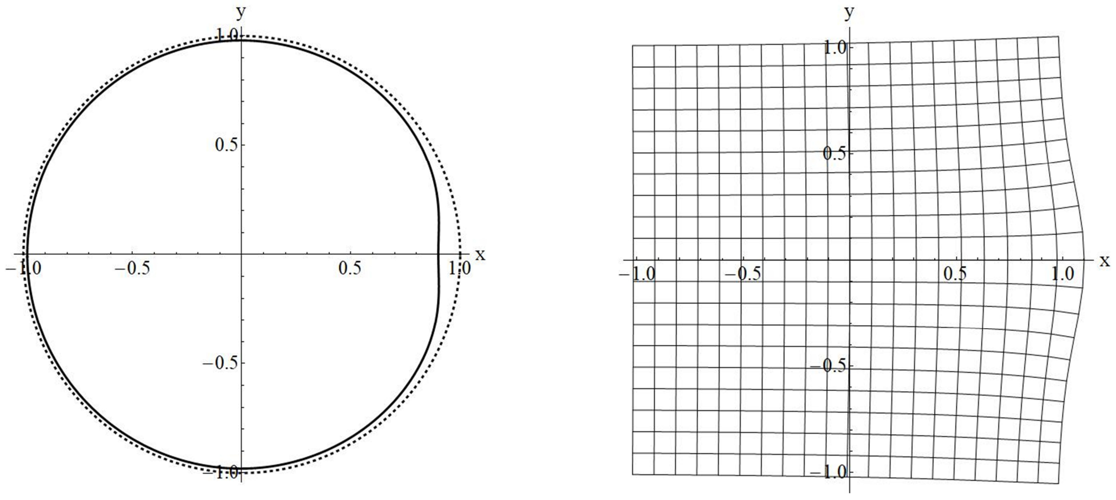

Рис. 1. Граница области (слева) и искажение координатной сетки (справа)
для варианта 1 при $\varepsilon = 0{,}03$ и $a = 0{,}7$

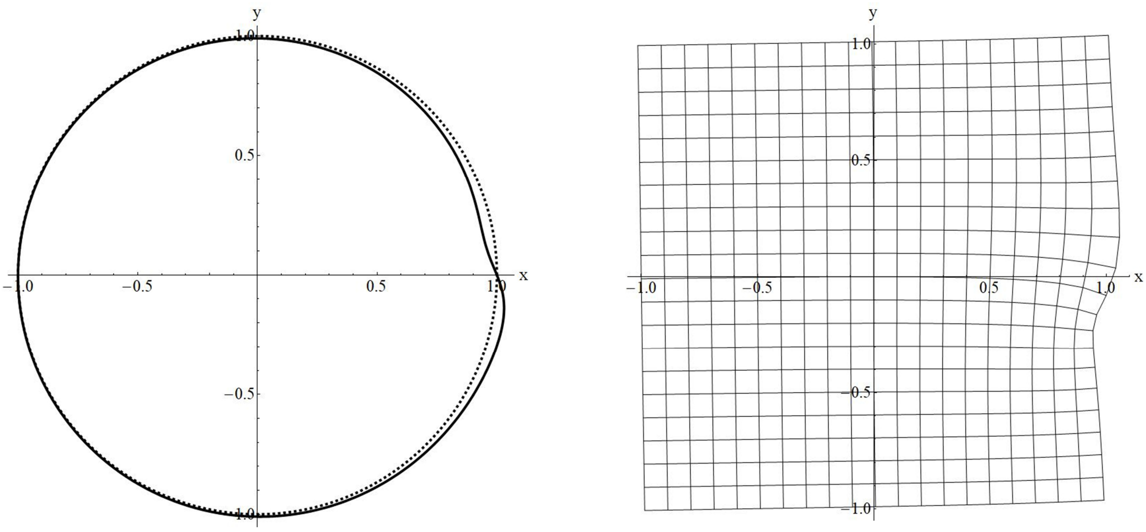

Рис. 2. Граница области (слева) и искажение координатной сетки (справа)
для варианта 2 при $\varepsilon = 0{,}02$ и $a = 0{,}8$

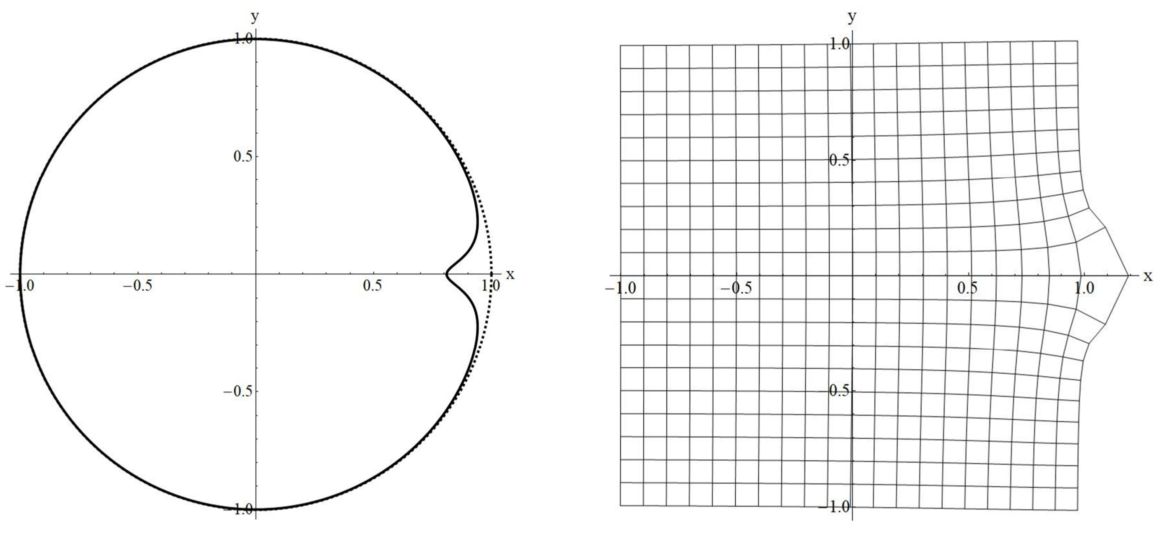

Рис. 3. Граница области (слева) и искажение координатной сетки (справа)
для варианта 3 при $\varepsilon = 0{,}01$ и $a = 0{,}9$

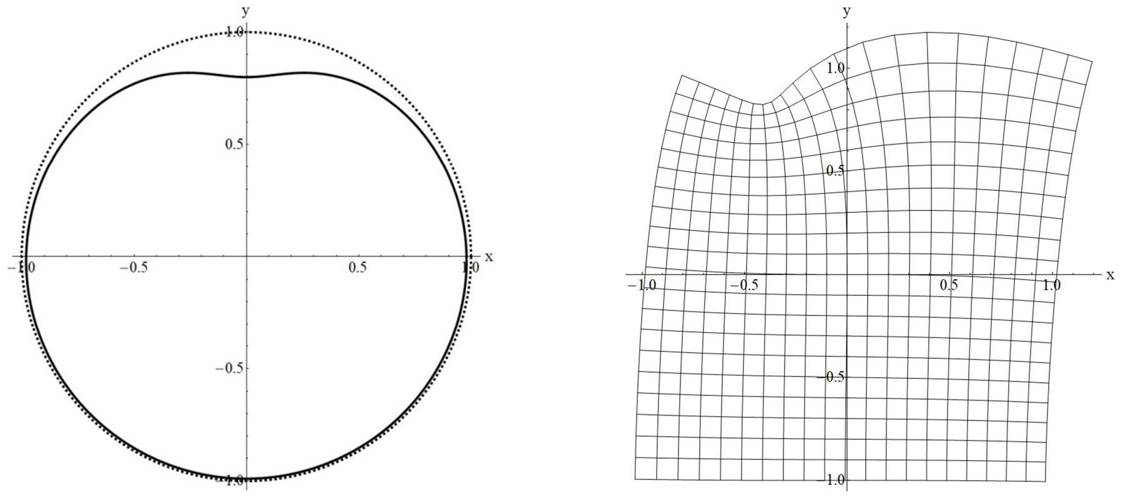

Рис. 4. Граница области (слева) и искажение координатной сетки (справа)
для варианта 4 при $\varepsilon = 0{,}02$ и $a = 0{,}9$

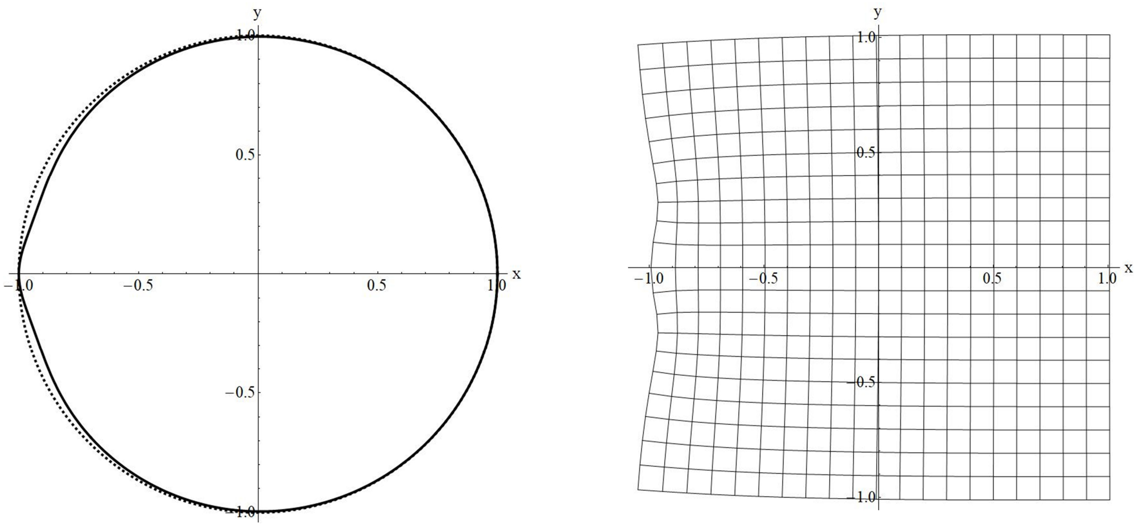

Рис. 5. Граница области (слева) и искажение координатной сетки (справа)
для варианта 5 при $\varepsilon = 0{,}01$ и $a = 0{,}7$

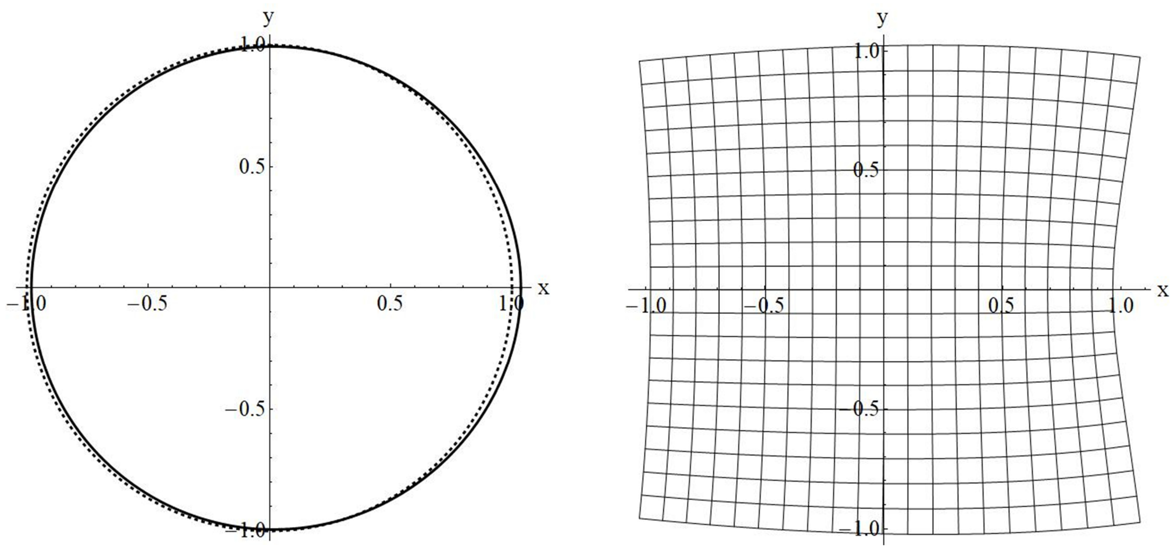

Рис. 6. Граница области (слева) и искажение координатной сетки (справа)
для варианта 6 при $\varepsilon = 0{,}02$ и $a = 0{,}6$

Заключение. В данной статье описана контрольная работа по спецкурсу «Вариационные принципы конформных отображений», заключающаяся в определении приближенного конформного отображения области с границей (1) на единичный круг по профилю $\delta(\varphi)$ вариации ее границы, и даны шесть ее вариантов.

При необходимости увеличить число вариантов в контрольной работе можно, например, умножением функций $\delta_j(\varphi)$ ($j=\overline{1,6}$) на $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$, получив для таких произведений ряды Фурье с помощью элементарных тригонометрических преобразований из рядов Фурье для исходных вариаций границ областей.

Используя системы компьютерной математики [11], можно следить за эволюцией как границ (1) исследуемых областей, так и порожденных ими приближенных конформных отображений при изменении параметров a и ε.

Более того, развитая в данной работе методика позволяет описать целые классы приближенных решений задачи Дирихле – рассмотрим классическую задачу Дирихле для двумерного уравнения Лапласа [8; 18]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ z\in D,\ u\big|_{z\in\Gamma}=u_0(z). \tag{7}$$

Как известно [18, с. 343], если функция $w=f(z)$ реализует конформное отображение области D на Λ_w, то решение задачи (7) записывается в виде:

$$u(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma u_0(\zeta)\cdot\frac{f(\zeta)+f(z)}{f(\zeta)-f(z)}\cdot\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\cdot d\zeta\right]. \tag{8}$$

Подставляя в формулу (8) любое из приближенных конформных отображений $f(z,\Gamma_j)$ ($j=\overline{1,6}$), выписанных в предыдущем разделе, и раскладывая подынтегральное выражение с точностью до членов первого порядка по ε включительно, получим приближенное решение задачи Дирихле (7) для каждой из областей D_j :

$$u_j(z,\varepsilon)=u^{(0)}(z)+\varepsilon\cdot u_j^{(1)}(z)+O(\varepsilon^2), \tag{9}$$

где $u^{(0)}(z)$ есть решение задачи (7) для единичного круга Λ_z .

Подчеркнем, что полученные в данной статье результаты имеют не только методический и прикладной, но также и академический интерес.

Для этого, в частности, заметим, что при замене $\varepsilon\to-\varepsilon$ в уравнении границы области (1) формула (2) остается справедливой и для приближенных конформных отображений внешности близких к единичному кругу областей на внешность единичного круга $\overline{C}\setminus\Lambda_w$, где $\overline{C}$ – расширенная комплексная плоскость: $\overline{C}=C\bigcup\{\infty\}$ при условии, что бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную точку [8, с. 357].

Во-первых, это обстоятельство, позволяет получать для многочленов Фабера [19] $\Phi_n(z,\varepsilon)$ такой области асимптотическое разложение с точностью до членов первого порядка по ε включительно, аналогичное по своей структуре разложению (9):

$$\Phi_n(z,\varepsilon)=z^n+\varepsilon\cdot\Phi_n^{(1)}(z)+O(\varepsilon^2).$$

Во-вторых, это наблюдение полезно при детальном исследовании эффективизации теоремы Римана, поскольку оно дает возможность сравнения точных конформных отображений, определяемых в рамках метода, описанного в статье [12], с приближенными конформными отображениями, которые находятся с помощью развитого в этой работе подхода.

Специальный курс «Вариационные принципы конформных отображений» может найти применение в промышленности – при подготовке и переподготовке кадров для предприятий аэрокосмической, судостроительной и нефтегазовой отраслей как России, так и стран СНГ в отечественных математических центрах мирового уровня, учрежденных Распоряжением Правительства Российской Федерации от 17.10.2019 № 2442-р.

Список литературы

1. *Авхадиев Ф. Г.* Введение в геометрическую теорию функций комплексного переменного : учебное пособие. Казань : Казанский университет, 2012. 127 с.

2. *Бетелин В. Б.* На пути к вычислениям экзафлопсного класса // Инновации. 2015. Т. 9 (203). С. 41–45.

3. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. : Наука, 1969. 240 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М. : ГИФМЛ, 1958. 203 с.
5. *Каюмов И. Р.* Банаховы пространства аналитических функций : учебное пособие. Казань : Казанский университет, 2015. 63 с.
6. Концептуальное проектирование самолетов : учебное пособие / В. А. Комаров, Н. М. Боргест, И. П. Вислов [и др.] ; под ред. В. А. Комарова. Самара : Изд-во СГАУ, 2013. 92 с.
7. *Лаврентьев М. А.* Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М.-Л. : ОГИЗ, 1946. 159 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1987. 688 с.
9. *Максимов И. Л., Максимова Г. М.* Границы устойчивости, структура и релаксация смешанного состояния в сверхпроводящих пленках с краевым барьером // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. Вып. 5. С. 405–410.
10. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. М. : Наука, 1979. 224 с.
11. *Муравьев В. А., Бурланков Д. Е.* Практическое введение в пакет MATHEMATICA : учебное пособие. Н. Новгород : Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2000. 124 с.
12. *Натанзон С. М.* Формальный ряд для τ-функции, реализующей теорему Римана об областях комплексной плоскости // Успехи математических наук. 2001. Т. 56. Вып. 4 (340). С. 155–156.
13. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М. : Наука, 1984. 432 с.
14. *Салахудинов Р. Г.* Введение в теорию изопериметрических неравенств. I (Метод конформных отображений в теории изопериметрических неравенств) : учебное пособие. Казань : Казанский университет, 2013. 100 с.
15. Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк [и др.] ; под ред. М. А. Евграфова. М. : Наука, 1969. 388 с.
16. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1967. 319 с.
17. *Сергеев А. Г.* Лекции об универсальном пространстве Тейхмюллера. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 21. М. : МИАН, 2006. 130 с.
18. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1989. 480 с.
19. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. М. : Наука, 1984. 336 с.
20. *Чирка Е. М.* Римановы поверхности. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 1. М. : МИАН, 2006. 105 с.

Control work on the special course "Variational principles of conformal mappings"

E. S. Alekseeva[1], A. E. Rassadin[2]
[1]member of the Nizhny Novgorod mathematical society.
Russia, Nizhny Novgorod. ORCID: 0000-0001-7132-0931. E-mail: kometarella@mail.ru
[2]member of the Board of the Nizhny Novgorod mathematical society.
Russia, Nizhny Novgorod. ORCID: 0000-0001-5644-4012. E-mail: brat_ras@list.ru

Abstract. The article describes a control work on additional chapters of the theory of functions of a complex variable, in which students are asked to find an explicit form of approximate conformal mapping of a domain that differs slightly from the unit circle to the unit circle. For various variants of this control work, graphs of the boundaries of such regions and distortion profiles of the Cartesian coordinate grid defined by approximate conformal maps of these regions are given. An algorithm is given for increasing the number of control work options, if necessary, without losing their quality. We discuss the application of the obtained results to construct entire classes of approximate solutions to a number of problems in the theory of functions of a single complex variable, namely, to find an asymptotic solution to the classical Dirichlet problem for the two-dimensional Laplace equation and an asymptotic expansion of Faber polynomials for regions with boundaries close to the unit circle in both position and curvature.

Keywords: complex plane, Laurent series, Fourier series, Schwarz integral, summation of power series.

References

1. *Avhadiev F. G. Vvedenie v geometricheskuyu teoriyu funkcij kompleksnogo peremennogo : uchebnoe posobie* [Introduction to the geometric theory of functions of a complex variable : textbook]. Kazan. Kazan University. 2012. 127 p.
2. *Betelin V. B. Na puti k vychisleniyam ekzaflopsnogo klassa* [On the way to calculations of the exaflops class] // *Innovacii* – Innovations. 2015. Vol. 9 (203). Pp. 41–45.
3. *Bicadze A. V. Osnovy teorii analiticheskih funkcij kompleksnogo peremennogo* [Fundamentals of the theory of analytical functions of a complex variable]. M. Nauka. 1969. 240 p.
4. *Bogolyubov N. N., Medvedev B. V., Polivanov M. K. Voprosy teorii dispersionnyh sootnoshenij* [Questions of the theory of dispersion relations]. M. GIFML. 1958. 203 p.
5. *Kayumov I. R. Banahovy prostranstva analiticheskih funkcij : uchebnoe posobie* [Banach spaces of analytical functions : textbook]. Kazan. Kazan University. 2015. 63 p.

6. *Konceptual'noe proektirovanie samoletov : uchebnoe posobie* – Conceptual design of aircraft : textbook / V. A. Komarov, N. M. Borgest, I. P. Vislov [et al.] ; ed. by V. A. Komarov. Samara. SSAU. 2013. 92 p.

7. *Lavrent'ev M. A. Konformnye otobrazheniya s prilozheniyami k nekotorym voprosam mekhaniki* [Conformal mappings with applications to some questions of mechanics]. M.-L. OGIZ. 1946. 159 p.

8. *Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. M. Nauka. 1987. 688 p.

9. *Maksimov I. L., Maksimova G. M. Granicy ustojchivosti, struktura i relaksaciya smeshannogo sostoyaniya v sverhprovodyashchih plenkah s kraevym bar'erom* [Stability boundaries, structure and relaxation of the mixed state in superconducting films with an edge barrier] // Letters in ZhETF. 1997. Vol. 65. Is. 5. Pp. 405–410.

10. *Moiseev N. N. Matematika stavit eksperiment* [Mathematics puts an experiment]. M. Nauka. 1979. 224 p.

11. *Murav'ev V. A., Burlankov D. E. Prakticheskoe vvedenie v paket MATHEMATICA : uchebnoe posobie* [Practical introduction to the MATHEMATICA package : textbook]. N. Novgorod. Lobachevsky National University of Economics. 2000. 124 p.

12. *Natanzon S. M. Formal'nyj ryad dlya τ-funkcii, realizuyushchej teoremu Rimana ob oblastyah kompleksnoj ploskosti* [Formal series for a τ-function that implements the Riemann theorem on domains of the complex plane] // *Uspekhi matematicheskih nauk* – Advances in Mathematical Sciences. 2001. Vol. 56. Is. 4 (340). Pp. 155–156.

13. *Privalov I. I. Vvedenie v teoriyu funkcij kompleksnogo peremennogo* [Introduction to the theory of functions of a complex variable]. M. Nauka. 1984. 432 p.

14. *Salahudinov R. G. Vvedenie v teoriyu izoperimetricheskih neravenstv. I (Metod konformnyh otobrazhenij v teorii izoperimetricheskih neravenstv) : uchebnoe posobie* [Introduction to the theory of isoperimetric inequalities. I (conformal mapping method in the theory of isoperimetric inequalities) : training manual]. Kazan. Kazan University. 2013. 100 p.

15. *Sbornik zadach po teorii analiticheskih funkcij* – Collection of problems on the theory of analytical functions / M. A. Evgrafov, Yu. V. Sidorov, M. V. Fedoryuk [et al.] ; edited by M. A. Evgrafov. M. Nauka. 1969. 388 p.

16. *Sveshnikov A. G., Tihonov A. N. Teoriya funkcij kompleksnogo peremennogo* [Theory of functions of a complex variable]. M. Nauka. 1967. 319 p.

17. *Sergeev A. G. Lekcii ob universal'nom prostranstve Tejhmyullera. Lekcionnye kursy NOC. Vyp. 21* [Lectures on the universal Teichmuller space. REC lecture courses. Issue 21]. M. MIAN. 2006. 130 p.

18. *Sidorov Yu. V., Fedoryuk M. V., Shabunin M. I. Lekcii po teorii funkcij kompleksnogo peremennogo* [Lectures on the theory of functions of a complex variable]. M. Nauka. 1989. 480 p.

19. *Suetin P. K. Ryady po mnogochlenam Fabera* [Series on Faber polynomials]. M. Nauka. 1984. 336 p.

20. *Chirka E. M. Rimanovy poverhnosti. Lekcionnye kursy NOC. Vyp. 1* [Riemann surfaces. REC lecture courses. Is. 1]. M. MIAN. 2006. 105 p.